50. Internationale PhysikOlympiade
Tel Aviv, Israel 2019

Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen
Tel.: 0431 / 880 - 5120
email: petersen@ipho.info

Sabrina Borchert
Tel.: 0431 / 880 - 5387
email: sekretariat@ipho.info

Anschrift: IPN an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24118 Kiel
Fax: 0431 / 880 - 3148
Webseite: **www.ipho.info**

Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 50. IPhO 2019

Hinweise

In dem Auswahlwettbewerb zur Internationalen PhysikOlympiade 2019 wurde die 2. Runde erstmalig als Klausurrunde an den Schulen der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler durchgeführt. Neben Hinweisen zur Klausur sind nachfolgend die Aufgaben mit einem Lösungsvorschlag zu finden.

Die Korrektur der Klausur der 2. Runde erfolgt auf Grundlage dieser Musterlösung. Gemäß den Gepflogenheiten bei der Internationalen PhysikOlympiade wird dabei primär die Richtigkeit der Lösung bewertet und weniger die Sauberkeit der Ausarbeitung oder der sprachliche Ausdruck. Bei den Multiple-Choice Aufgaben werden alleine für die richtigen Antwortbuchstaben bereits jeweils 2 Punkte vergeben. Die in den Bewertungstabellen darüber hinaus angegebenen Punktzahlen beziehen sich jeweils auf den von uns ausgearbeiteten Lösungsweg. Bei anderen Lösungswegen wird die Bewertung sinngemäß abgeändert, wobei die Gesamtpunktzahl pro Aufgabenteil beibehalten wird. Folgefehler werden in der Regel nicht bestraft. Die Verwendung eines falschen Zwischenergebnisses sollte, sofern sich dadurch keine starke Vereinfachung des Problems ergibt, also bei folgenden Fragen nicht zu Punktabzug führen. Dies bedeutet insbesondere, dass ein numerisches Ergebnis auch dann als korrekt gewertet wird, wenn vorher eine falsche Formel abgeleitet, aber korrekt mit dieser Formel weitergerechnet wurde. Wenn bei einem Ergebnis jedoch die angegebene Einheit falsch ist, führt dies in jedem Fall zu Punktabzug.

Bei Fragen oder Anmerkungen freuen wir uns über eine Nachricht an sekretariat@ipho.info.

Regeln und Hinweise zur Klausur für Schülerinnen und Schüler

- Der **Termin für die Klausur** ist bundesweit einheitlich Dienstag, der 13. November 2018. In besonderen Fällen kann deine Lehrkraft den Termin um ein bis zwei Tage verschieben.
- Die **Bearbeitungszeit** für die Klausur beträgt 180 Minuten.
- Die Klausur ist **ohne fremde Hilfe und in Einzelarbeit** unter Aufsicht einer Lehrkraft zu bearbeiten.
- Zulässige **Hilfsmittel** sind Schreib- und Zeichenmaterialien, die auf der folgenden Seite abgedruckte Liste von Naturkonstanten sowie ein nicht graphikfähiger Taschenrechner. Insbesondere darfst du keine Aufzeichnungen oder Formelsammlungen in der Klausur verwenden.
- Du erhältst die Klausuraufgaben in einem verschlossenen und mit deinem Namen versehenen **Umschlag**. Öffne diesen erst, wenn die betreuende Lehrkraft das Signal zum Start der Klausur gibt.
- Insgesamt können in der Klausur **100 Punkte** erreicht werden. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl in der Überschrift angegeben, bei Teilaufgaben direkt bei den Teilaufgaben.
- Du kannst dir die **Reihenfolge** für die Bearbeitung der Aufgaben frei aussuchen und dir auch die Zeit frei einteilen. Es kann vorteilhaft sein, sich zunächst mit Aufgaben zu befassen, die du gut lösen kannst, und sich nicht zu sehr in einer Aufgabe zu verbeißen.
- Im ersten Teil der Klausur sind **10 Multiple-Choice Aufgaben** zu lösen, bei denen jeweils vier Antwortalternativen zur Wahl stehen, von denen genau eine richtig ist. Für jede korrekte Antwortwahl erhältst du 2 Punkte. Wenn keine, eine falsche oder mehr als eine Antwortoption angegeben ist, werden dafür Null Punkte vergeben. Zu deiner Antwortwahl wird außerdem eine physikalische Begründung erwartet. Einige Aufgaben erfordern dafür auch eine Rechnung. Für jede passende physikalische Begründung werden 3 Punkte vergeben. Für diesen Teil sind 60-80 Minuten eingeplant.
- Im zweiten Teil sind einige **längere theoretische Aufgaben** zu bearbeiten. Für diesen Teil sind 100-120 Minuten vorgesehen.
- Trage deine **Aufgabenbearbeitung in die entsprechenden Boxen** ein. Falls der Platz nicht ausreicht oder du einen weiteren Graphen zeichnen möchtest, findest du am Ende der Klausur **zusätzliches Arbeitspapier**. Kennzeichne unbedingt die Aufgabe, zu der die jeweiligen Aufzeichnungen gehören.
- Die Klausurblätter und das zusätzliche Arbeitspapier sind im oberen Teil mit deinem **Schülerinnen- bzw. Schülercode** versehen. Verwende nur diese Blätter zur Bearbeitung der Klausur und lege alle Blätter am Ende wieder in deinen Umschlag.
- Die Aufgaben sind so konzipiert, dass es schwer sein dürfte, alle Aufgaben vollständig zu lösen. **Verliere also nicht den Mut, wenn du nicht alles schaffst oder mal keine Idee zur Lösung hast!**
- Da die Klausuren an einigen Schulen wenige Tage später geschrieben werden, darfst du **keine Informationen zu den Klausuraufgaben** vor dem 19. November an andere Teilnehmende weitergeben.

Das Team der PhysikOlympiade in Deutschland wünscht dir viel Erfolg!

Naturkonstanten und gebräuchliche Größen

In den Aufgaben können die folgenden physikalischen Größen verwendet werden. Die Angaben können jeweils bis zur angegebenen Stelle als exakt angenommen werden.

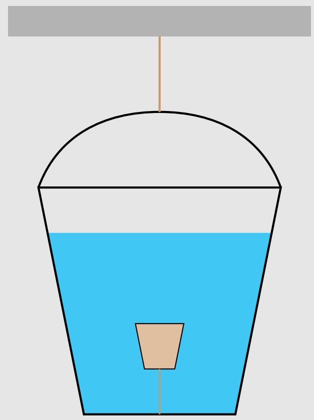
Konstante	**gebräuchliche Formelzeichen**	**Wert**
Absoluter Nullpunkt	T_0	$0\,\mathrm{K} = -273{,}15\,°\mathrm{C}$
Atomare Masseneinheit	u	$1{,}660\,539 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6{,}022\,141 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1{,}380\,65 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8{,}854\,187\,817 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m^{-1}}$
Elektronenvolt	eV	$1\,\mathrm{eV} = 1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$
Elementarladung	e	$1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s}$
Fallbeschleunigung auf der Erde	g	$9{,}806\,65\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Gravitationskonstante	γ, G	$6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c_0	$2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$1{,}256\,637\,061 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$
Normdruck, Atmosphärendruck	p_n	$101\,325\,\mathrm{N\,m^{-2}}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6{,}626\,070 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9{,}109\,384 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1{,}674\,927 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	$1{,}672\,622 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$1{,}097\,373\,157 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}$
Schallgeschwindigkeit in Luft	c_Luft	$343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (bei $20\,°\mathrm{C}$)
Stefan-Boltzmann-Konstante	α, σ	$5{,}6704 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Universelle Gaskonstante	R	$8{,}314\,46\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$

Multiple-Choice Aufgaben

Finde zu jeder der folgenden zehn Fragen den richtigen Lösungsbuchstaben und begründe physikalisch, warum dies die korrekte Lösung ist. Es ist jeweils nur eine Antwortmöglichkeit richtig. Nutze den Platz in der Box für Rechnungen sowie Begründungen und notiere deinen Antwortbuchstaben an der vorgesehenen Stelle am Ende jeder Box.

Aufgabe 1 Korken im Eimer (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Ein mit Wasser gefüllter Eimer ist an einem Seil aufgehängt. In dem Eimer befindet sich, wie nebenstehend abgebildet, ein Korken, der mit einem Faden am Boden des Eimers befestigt ist. Wenn der Faden durchtrennt wird, steigt der Korken an die Wasseroberfläche. Wird das Seil am Eimer durchtrennt, fällt dieser mit Inhalt nach unten.



Wie bewegt sich der Korken relativ zu dem Eimer, unmittelbar nachdem das Seil und der Faden gleichzeitig durchtrennt worden sind?

A Der Korken steigt schneller zur Wasseroberfläche.

B Der Korken steigt genau so schnell an die Wasseroberfläche.

C Der Korken bleibt in Ruhe.

D Der Korken sinkt zum Boden des Eimers.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Wenn das Seil und der Faden gleichzeitig durchtrennt werden, befinden sich der Eimer mit dem Wasser sowie dem Korken im freien Fall und fallen nach dem Äquivalenzprinzip gleich schnell. Sie sind also im Bezugsystem des Eimers schwerelos, so dass auch keine Auftriebskraft wirkt. Daher steigt der Korken weder auf noch sinkt er, er bleibt also in Ruhe.

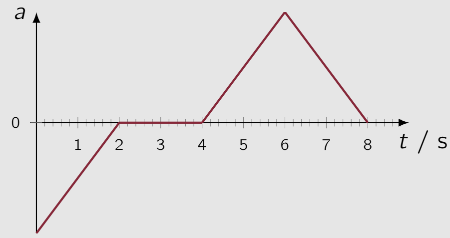
Korrekte Antwort: *C*

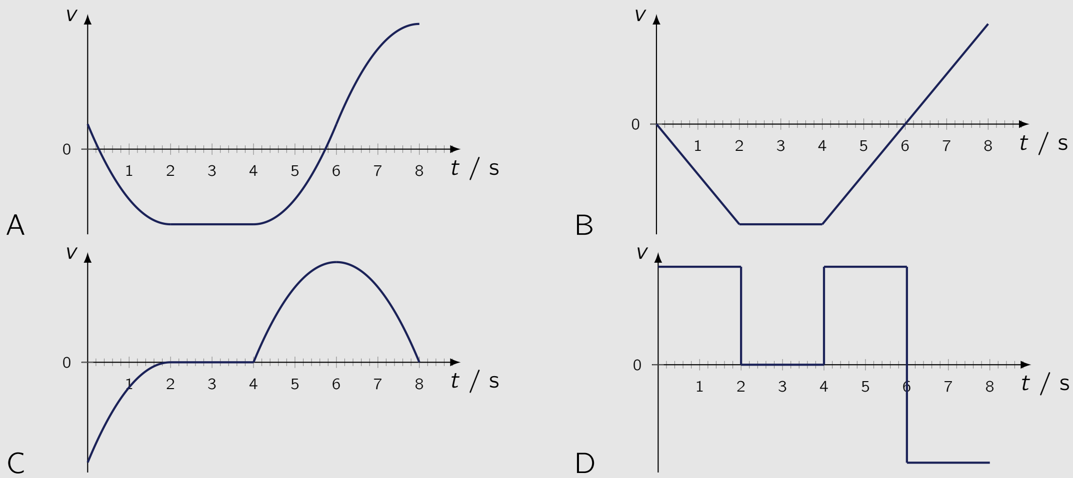
Bewertung - Korken im Eimer (MC-Aufgabe)		**Punkte**
1	Erkennen, dass sich alle Komponenten im freien Fall befinden	1.0
	Erkennen der Schwerelosigkeit	1.0
	Schlussfolgern auf die relative Bewegung des Korkens	1.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Aufgabe 2 Bewegung! (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Der nebenstehende Graph zeigt die Beschleunigung a eines Körpers bei einer eindimensionalen Bewegung als Funktion der Zeit t.

Welche der nachfolgenden Graphen stellt die Geschwindigkeit v des Körpers als Funktion der Zeit korrekt dar?





Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Anfänglich besitzt der Körper eine negative Beschleunigung. Die Geschwindigkeit muss also im ersten Abschnitt zwischen 0 und 2 Sekunden abnehmen. Dies geschieht nur in den ersten beiden Graphen.

Die Beschleunigung ist die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit. Der Graph B zeigt im ersten Abschnitt eine linear abnehmende Geschwindigkeit, die einer konstanten negativen Beschleunigung entsprechen würde. Dies passt nicht zu dem gegebenen Verlauf der Beschleunigung. Der Graph B kommt also nicht in Frage.

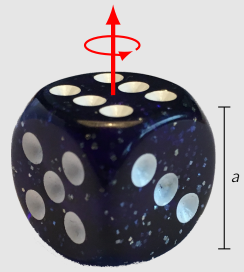
Damit verbleibt der erste Graph, deren Geschwindigkeitsverlauf tatsächlich zu dem gegebenen Verlauf der Beschleunigung passt. Im Zeitraum zwischen 0 und 2 Sekunden ist die Beschleunigung negativ und steigt linear auf Null an. Im Zeitraum zwischen 2 und 4 Sekunden ist die Geschwindigkeit konstant, und damit die Beschleunigung gleich Null. Die verbleibenden beiden Abschnitte besitzen erneut Beschleunigungen, die sich linear mit der Zeit ändern. Erst ansteigend und dann abfallend bis die Geschwindigkeit bei 8 Sekunden wieder einen konstanten Wert annimmt und die Beschleunigung damit Null wird.

Korrekte Antwort: *A*

Bewertung - Bewegung! (MC-Aufgabe)		**Punkte**
2	Zuordnen Beschleunigung gleich Null zu konstanter Geschwindigkeit	1.0
	Zuordnen positiver/negativer Beschleunigung zu steigender/sinkender Geschwindigkeit	1.0
	Erkennen, dass Beschleunigung im ersten/letzten Abschnitt nicht konstant sein kann	1.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Aufgabe 3 Rotierender Würfel (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Bezeichne mit I das Trägheitsmoment des nebenstehend abgebildeten Würfels bei Drehung um die eingezeichnete Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten.



Wie groß ist das entsprechende Trägheitsmoment eines Würfels aus dem gleichen Material aber mit doppelt so großer Kantenlänge a?

A $2\,I$ B $4\,I$ C $16\,I$ D $32\,I$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Das Trägheitsmoment eines Körpers bei Drehung um eine Schwerpunktachse ist proportional zur Masse m des Körpers und zum Quadrat einer charakteristischen Länge senkrecht zur Rotationsachse. Die Masse des Körpers wiederum ist proportional zur dritten Potenz einer charakteristischen Länge des Körpers, für die hier die Kantenlänge a verwendet werden kann. Es gilt also:

$$I \sim m \cdot a^2 \sim a^5 \tag{3.1}$$

Bei einer Verdopplung der Kantenlänge a wird das Trägheitsmoment damit um einen Faktor $2^5 = 32$ größer. Damit ist die letzte Antwort korrekt.

Korrekte Antwort: *D*

Bewertung - Rotierender Würfel (MC-Aufgabe)		**Punkte**
3	Erkennen der Proportionalität des Trägheitsmomentes zur Masse	0.5
	Erkennen der Skalierung der Masse mit a^3	1.0
	Erkennen der Proportionalität des Trägheitsmomentes zum Abstandsquadrat	0.5
	Ableiten der Skalierung des Trägheitsmomentes	1.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Aufgabe 4 Leistung von Gravitationswellen (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Die allgemeine Relativitätstheorie sagt die Existenz von Gravitationswellen, also Wellen in der Struktur der Raumzeit voraus. Diese Wellen werden von beschleunigten Massen erzeugt und breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Für zwei Körper mit gleicher Masse m, die sich in einem Abstand r umkreisen, lässt sich die durch Gravitationswellen abgestrahlte Leistung P mit Hilfe der Gravitationskonstante G und der Vakuumlichtgeschwindigkeit c ausdrücken.

Welcher der folgenden Ausdrücke könnte einen passenden Ausdruck für die Leistung P darstellen?

A $\quad P = \frac{32}{5}\frac{G^5\,m^5}{c^5\,r^4}$ B $\quad P = \frac{32}{5}\frac{G^5\,m^5}{c^4\,r^5}$

C $\quad P = \frac{32}{5}\frac{G^5\,m^4}{c^5\,r^5}$ D $\quad P = \frac{32}{5}\frac{G^4\,m^5}{c^5\,r^5}$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Für eine korrekte Formel müssen beide Seiten der Gleichung die gleiche physikalische Dimension und damit auch die gleichen SI-Einheiten besitzen.

Die Leistung P wird in Watt, also in der Einheit $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$ angegeben. Dies wird typischerweise durch $[P] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$ ausgedrückt. Die auf der rechten Seite der Gleichung vorkommenden physikalischen Größen besitzen die folgenden SI-Einheiten:

$$[G] = \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}\,, \quad [m] = \mathrm{kg}\,, \quad [c] = \mathrm{m\,s^{-1}}\,, \quad [r] = \mathrm{m}\,. \tag{4.1}$$

Ein als korrekt in Frage kommender Ausdruck für P lässt sich nun mit Hilfe eines Dimensionsvergleiches bestimmen. Bezeichne mit α, β, γ und δ die Exponenten, mit der die Größen G, m, c und r auf der rechten Seite vorkommen. Dann gilt

$$\left[G^\alpha\,m^\beta\,c^\gamma\,r^\delta\right] = \mathrm{kg}^{-\alpha+\beta}\,\mathrm{m}^{3\alpha+\gamma+\delta}\,\mathrm{s}^{-2\alpha-\gamma} \overset{!}{=} \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}} = [P]\,. \tag{4.2}$$

Durch Vergleichen des Exponenten für die Masseneinheit in Gleichung (4.2) ergibt sich, dass β um eins größer sein muss als α. Dies ist nur in der Gleichung D der Fall.

Die dort auftretenden Werte $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\gamma = -5$ und $\delta = -5$ für die Exponenten führen auch zu den korrekten Exponenten für die Einheiten der Länge und der Zeit, denn mit diesen Werte ergeben sich

$$3\alpha + \gamma + \delta = 12 - 5 - 5 = 2 \qquad \text{sowie} \qquad -2\alpha - \gamma = -8 + 5 = -3\,. \tag{4.3}$$

Damit kann nur die letzte Formel die Leistung P richtig beschreiben.[a]

Korrekte Antwort: *D*

[a] *Hinweis:* Der Ausdruck kann auch auf zwei ungleiche Massen m_1 und m_2 erweitert werden und lautet dann $P = \frac{32}{5}\frac{G^4\,(m_1\,m_2)^2\,(m_1+m_2)}{c^5\,r^5}$. Im System Sonne-Erde beträgt die durch Gravitationswellen abgestrahlte Leistung damit knapp 200 W.

Bewertung - Leistung von Gravitationswellen (MC-Aufgabe)		Punkte
4	Anwenden eines Dimensionsvergleiches	1.0
	Angeben der physikalischen Dimensionen der auftretenden Größen	1.0
	Bestimmen der korrekten Exponenten in der Leistungsformel	1.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Aufgabe 5 Linsensammlung (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Aus den Tiefen der Physiksammlung hat dein Physiklehrer eine Kiste mit drei dünnen Linsen zu Tage befördert, die mit I, II und III beschriftet sind. Die Linsen I und II sind bikonvex, wohingegen Linse III auf beiden Seiten konkav geformt ist. Zur Bestimmung der Brennweiten der Linsen hast du deiner Lehrkraft beim Durchführen einiger Abbildungsversuche geholfen.

Dazu habt ihr einen Gegenstand in einer Entfernung von 50,0 cm zu einer der Linsen oder zu einer Kombination von zwei dicht hintereinander stehenden Linsen positioniert und den Abstand zwischen der Linse bzw. dem Linsensystem und dem entstehenden reellen Bild des Gegenstandes gemessen. Die nebenstehende Tabelle gibt die in den einzelnen Versuchen gemessenen Bildweiten an. Dummerweise hat dein Lehrer ab dem zweiten Versuch vergessen aufzuschreiben, welche der Linse(n) jeweils verwendet wurde(n), aber vielleicht kannst du trotzdem die folgende Frage beantworten:

Versuch	Linse(n)	Bildweite
①	I	21,4 cm
②		50,2 cm
③		11,6 cm
④		30,9 cm
⑤		175,0 cm

Welche der Linse(n) wurde(n) in den einzelnen Versuchen verwendet?

A	②: I & III	③: I & II	④: II	⑤: II & III
B	②: I & III	③: II	④: II & III	⑤: I & II
C	②: II	③: I & II	④: I & III	⑤: II & III
D	②: II & III	③: II	④: I & II	⑤: I & III

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Da keine zwei Bildweiten in den Versuchen gleich sind, muss in jedem Versuch ein anderer Aufbau vorliegen. Damit müssen alle möglichen Linsenkombinationen aus zwei Linsen sowie die Linse II als Einzellinse für einen der Versuche verwendet werden.

Versuch ③: In diesem Versuch ergibt sich die kleinste Bildweite und damit die stärkste Brechkraft. Um diese höhere Brechkraft zu realisieren, müssen die beiden konvexen Linsen I und II hintereinander zu einem Linsensystem kombiniert sein.

Damit verbleiben von den Antwortoptionen nur noch die Möglichkeiten A und C. Außerdem muss im Versuch ⑤ dann die Kombination der Linsen II & III verwendet worden sein. Es bleibt noch zu klären, ob in Versuch ② alleine die Linse II oder eine Kombination der Linsen I & III verwendet wurde. Dazu können die Brennweiten der Linsen I und II mit Hilfe der Ergebnisse aus den Versuchen ① und ③ verwendet werden.

Versuch ①: Die Brennweite der in diesem Versuch verwendeten Linse I lässt sich mit Hilfe der Gegenstandsweite $g = 50{,}0\,\mathrm{cm}$ und der Bildweite $b_\mathrm{I} = 21{,}4\,\mathrm{cm}$ über die Abbildungsgleichung dünner Linsen bestimmen. Es gilt

$$\frac{1}{f_\mathrm{I}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b_\mathrm{I}} \qquad \text{bzw.} \qquad f_\mathrm{I} = \frac{g\,b_\mathrm{I}}{g + b_\mathrm{I}} \approx \frac{50{,}0\,\mathrm{cm} \cdot 21{,}4\,\mathrm{cm}}{50{,}0\,\mathrm{cm} + 21{,}4\,\mathrm{cm}} \approx 15{,}0\,\mathrm{cm}\,. \tag{5.1}$$

Versuch ③: Die Gesamtbrennweite $f_{\mathrm{I\&II}}$ des Systems aus den Linsen I und II ergibt sich auch hier aus der bestimmten Bildweite $f_{\mathrm{I\&II}}$ und zwar zu

$$f_{\mathrm{I\&II}} = \frac{g\,b_{\mathrm{I\&II}}}{g + b_{\mathrm{I\&II}}} \approx \frac{50{,}0\,\mathrm{cm} \cdot 11{,}6\,\mathrm{cm}}{50{,}0\,\mathrm{cm} + 11{,}6\,\mathrm{cm}} \approx 9{,}4\,\mathrm{cm}\,. \tag{5.2}$$

Bei der Kombination zweier nah beieinander stehender dünner Linsen ergibt sich die Gesamtbrennweite des Systems aus einer inversen Addition der einzelnen Brennweiten, also

$$\frac{1}{f_{\mathrm{I\&II}}} = \frac{1}{f_\mathrm{I}} + \frac{1}{f_\mathrm{II}}\,, \tag{5.3}$$

womit sich die Brennweite f_II ergibt zu

$$f_\mathrm{II} = \frac{f_\mathrm{I}\,f_{\mathrm{I\&II}}}{f_\mathrm{I} - f_{\mathrm{I\&II}}} \approx \frac{15{,}0\,\mathrm{cm} \cdot 9{,}4\,\mathrm{cm}}{15{,}0\,\mathrm{cm} - 9{,}4\,\mathrm{cm}} \approx 25{,}2\,\mathrm{cm}\,. \tag{5.4}$$

Schließlich lässt sich durch Umstellen der Abbildungsgleichung die Bildweite b_II bestimmen, die sich bei Abbildung alleine mit der Linse II ergibt. Diese ist

$$b_\mathrm{II} = \frac{g\,f_\mathrm{II}}{g - f_\mathrm{II}} \approx \frac{50{,}0\,\mathrm{cm} \cdot 25{,}2\,\mathrm{cm}}{50{,}0\,\mathrm{cm} - 25{,}2\,\mathrm{cm}} \approx 50{,}8\,\mathrm{cm}\,. \tag{5.5}$$

Das Ergebnis passt, wenn man kleine Messunsicherheiten annimmt, zu dem Ergebnis in Versuch ②, nicht aber zu dem in Versuch ④. Damit ist die richtige Antwort die Option C.

Korrekte Antwort: *C*

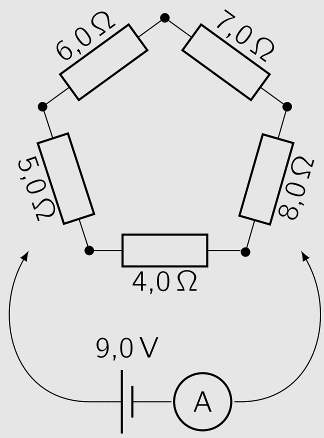
Bewertung - Linsensammlung (MC-Aufgabe)		**Punkte**
5	Erkennen, dass die kleinste Bildweite zur Kombination I & II gehört	0.5
	Bestimmen der Brennweite f_I	0.5
	Bestimmen der Brennweite f_II	1.0
	Bestimmen der Bildweite b_II und zuordnen der Versuche	1.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Aufgabe 6 Fünfeck aus Widerständen (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Eine Batterie mit einer Spannung von 9,0 V ist mit einem idealen Amperemeter in Reihe geschaltet ist. Die Reihenschaltung kann an zwei beliebige Ecken des abgebildeten Widerstandfünfecks angeschlossen werden.

Wie groß ist die betragsmäßig kleinste Stromstärke, die dabei durch das Amperemeter fließt?

A 0,30 A B 0,60 A C 1,2 A D 2,3 A



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Wenn die Batterie mit dem Amperemeter an zwei verschiedene Ecken des Widerstandsfünfecks angeschlossen wird, fließt der Strom durch eine Parallelschaltung mit zwei Zweigen, in denen jeweils bis zu vier Widerstände in Reihe geschaltet sind. Die Zusammensetzung der beiden Parallelzweige ist davon abhängig, an welchen Ecken die Batterie angeschlossen wird. Die Stromstärke I, die durch das Amperemeter fließt, ergibt sich aus der Batteriespannung $U = 9{,}0\,\mathrm{V}$ und dem Ersatzwiderstand R_{Ersatz} der Parallelschaltung zu $\frac{U}{R_{\text{Ersatz}}}$.

Bei einer Parallelschaltung zweier Widerstände mit Widerstandswerten R_1 und R_2 beträgt der Wert des Ersatzwiderstandes $R_{\text{Ersatz}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ und ist damit immer kleiner als der kleinste Widerstandswert eines der Parallelzweige. Für einen möglichst geringen Strom muss daher die Batterie so angeschlossen werden, dass der Widerstandswert in dem Parallelzweig mit dem kleineren Widerstandswert möglichst groß wird. Die Summe der fünf Widerstände ist konstant. Daher ist diese Bedingung genau dann erfüllt, wenn beide Parallelzweige den gleichen Widerstandswert besitzen. Dies wird erreicht, wenn die Batterie mit dem Amperemeter an der Ecke zwischen dem 6,0 Ω und 7,0 Ω sowie zwischen dem 4,0 Ω und 8,0 Ω Widerstand angeschlossen wird.

In diesem Fall besitzen beide Parallelzweige einen Widerstandswert von 15,0 Ω und der Ersatzwiderstand beträgt $R_{\text{Ersatz}} = 7{,}5\,\Omega$. Damit ist die Stromstärke:

$$\boxed{I = \frac{U}{R_{\text{Ersatz}}} \approx 1{,}2\,\mathrm{A}}\,. \tag{6.1}$$

Korrekte Antwort: *C*

Bewertung - Fünfeck aus Widerständen (MC-Aufgabe)		Punkte
6	Erkennen der Parallelschaltung und Bedingung für minimale Stromstärke	1.0
	Verwenden, dass Widerstandsumme konstant ist und finden der Anschlusspunkte	1.0
	Berechnen des Ersatzwiderstandes und angeben einer Formel für die Stromstärke	1.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Aufgabe 7 Felder (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Ein sehr leichtes, geladenes Teilchen wird durch eine Spannung U beschleunigt. Anschließend fliegt es in einen Bereich, der von einem konstanten Magnetfeld senkrecht zur Bewegungsrichtung des Teilchens durchsetzt ist. Das Teilchen beschreibt in diesem Bereich einen Kreisbogen mit einem Kreisradius von $r = 1{,}50\,\mathrm{cm}$.

Nun wird ein elektrisches Feld der konstanten Feldstärke $E = 4{,}40 \cdot 10^4\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ eingeschaltet, das senkrecht sowohl zum magnetischen Feld als auch zur momentanen Bewegungsrichtung des Teilchens orientiert ist. Das Teilchen bewegt sich daraufhin geradeaus weiter.

Wie groß ist die Spannung U mit der das Teilchen anfänglich beschleunigt wurde?

A 110 V B 220 V C 330 V D 440 V

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Bezeichne mit m, q und v die Masse, die Ladung und den Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens nach Durchlaufen der Beschleunigungsspannung. Die von dem Teilchen durch die Beschleunigungsspannung erhaltene Energie entspricht der kinetischen Energie des Teilchens. Im nichtrelativistischen Fall ist daher

$$q\,U = \frac{1}{2}\,m\,v^2\,. \tag{7.1}$$

Wenn nur das magnetische Feld auf das Teilchen wirkt, beschreibt es eine Kreisbahn, deren Radius sich durch Gleichsetzen der Zentripetalkraft mit der Lorentzkraft ermitteln lässt. Es ergibt sich:

$$\frac{m\,v^2}{r} = q\,v\,B \qquad \text{bzw.} \qquad m\,v^2 = r\,q\,v\,B\,. \tag{7.2}$$

Dabei bezeichnet B die magnetische Flussdichte des Magnetfeldes.

Damit das Teilchen nach dem Anschalten des elektrischen Feldes geradeaus weiterfliegt, muss die Kraft aufgrund des elektrischen Feldes gerade die Lorentzkraft ausgleichen, es muss also gelten:

$$q\,E = q\,v\,B \qquad \text{bzw.} \qquad E = v\,B\,. \tag{7.3}$$

Einsetzen der Ergebniss aus (7.2) und (7.3) in (7.1) ergibt schließlich für die Beschleunigungsspannung

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\,\frac{m\,v^2}{q} = \frac{1}{2}\,r\,v\,B = \frac{1}{2}\,r\,E \approx 330\,\mathrm{V}}\,. \tag{7.4}$$

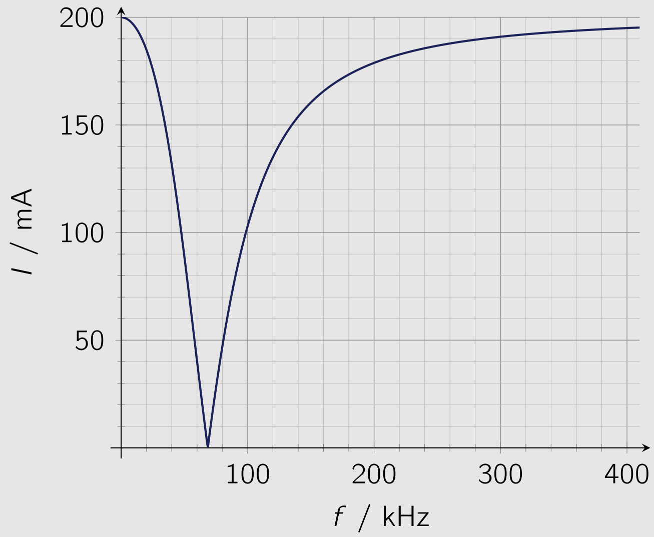
Korrekte Antwort: *C*

Bewertung - Felder (MC-Aufgabe)		Punkte
7	Angeben einer Kraftbedingung für Kreisbahn	1.0
	Gleichsetzen von Lorentzraft und Kraft durch elektrisches Feld	1.0
	Formulieren des Energiesatz und bestimmen der Beschleunigungsspannung	1.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

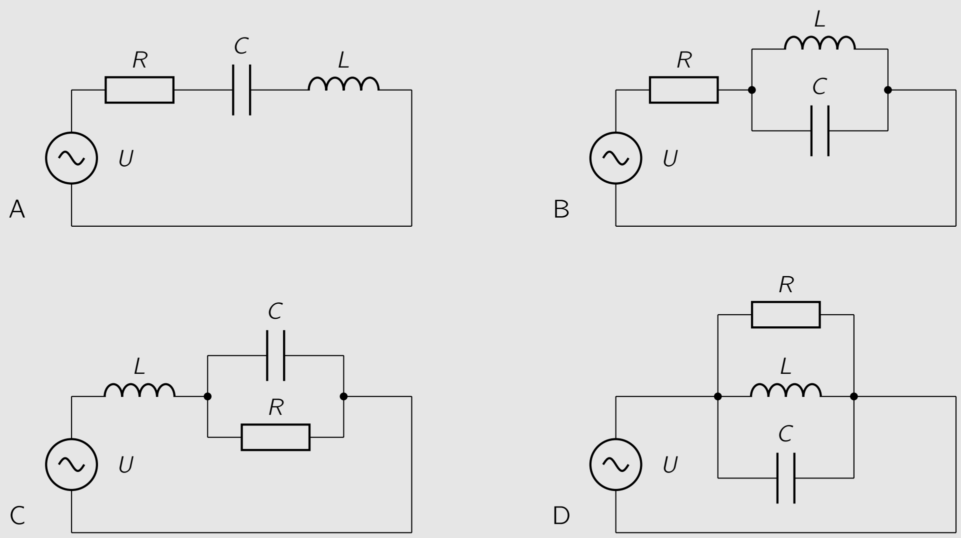
Aufgabe 8 Wechselstromschaltkreis (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Ein Widerstand mit Widerstandswert R, ein Kondensator der Kapazität C und eine Spule der Induktivität L werden an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen. Die Amplitude der Wechselspannung beträgt U und die Bauteile können als ideal angenommen werden.

Der folgende Graph zeigt die Amplitude I der Stromstärke in dem Stromkreis als Funktion der Frequenz f der sinusförmigen Wechselspannung.



Welche der folgenden Schaltskizzen stellt die verwendete Schaltung korrekt dar?



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Dem Graphen entnimmt man für sehr kleine Frequenzen der Wechselspannung eine endliche, von Null verschiedene Amplitude der Stromstärke. Der Scheinwiderstand Z der Schaltung, der oft auch als Impedanz bezeichnet wird, muss wegen des Zusammenhanges $I = \frac{U}{Z}$ bei sehr kleinen Frequenzen daher ebenfalls einen von Null verschiedenen und endlichen Wert besitzen. Damit scheiden bereits die Schaltungen A und D aus. Bei der Schaltung A führt der in Reihe geschaltete Kondensator bei niedrigen Frequenzen zu einem beliebig hohen Scheinwiderstand. Bei Schaltung D ist die Parallelschaltung aufgrund der Spule für niedrige Frequenzen quasi kurzgeschlossen, so dass der Strom beliebig groß werden würde.

Für hohe Frequenzen nähert sich die Stromstärke dem Wert an, die auch für sehr kleine Frequenzen beobachtet wird. Dieses würde in Schaltung C nicht passieren, da dort für hohe Frequenzen der Widerstand durch den Kondensator kurzgeschlossen würde und der Scheinwiderstand aufgrund der

Induktivität dann näherungsweise linear mit der Frequenz ansteigen würde. In Schaltung B wird entsprechend die Induktivität durch den Kondensator kurzgeschlossen, so dass für hohe Frequenzen ein konstanter Wert für den Scheinwiderstand zu erwarten ist. Dies passt zu dem beobachteten asymptotischen Verhalten der Stromstärke.

Von den Schaltungen kommt damit nur die Schaltung B in Frage.

Alternativ lässt sich auch argumentieren, dass gemäß dem Graphen im Resonanzfall kein Strom fließt und die Impedanz folglich unendlich groß ist. Das passiert nur bei der Parallelschaltung von Spule und Kondensator (idealer Parallelschwingkreis). Damit muss Schaltung B korrekt sein.

Korrekte Antwort: *B*

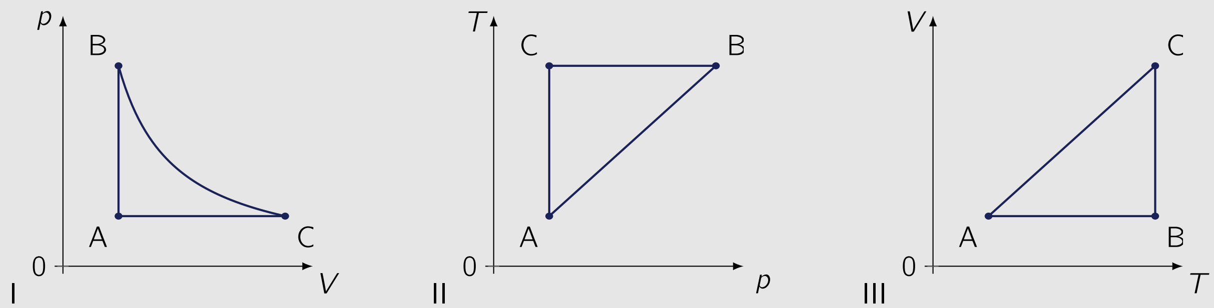
Bewertung - Wechselstromschaltkreis (MC-Aufgabe)		**Punkte**
8	Beschreiben des charakteristischen Verlaufs im Graphen (Asymptotik, Nullstelle)	1.0
	Diskutieren dieses Verhaltens in den Schaltungen und Auffinden der korrekten Schaltung	2.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Aufgabe 9 Kreisprozess (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Ein ideales Gas durchläuft einen Kreisprozess. Ausgehend von dem Zustand A wird es zunächst bei konstantem Volumen bis zu einem Zustand B erwärmt, anschließend expandiert es ohne Temperaturänderung bis zu einem Zustand C und wird schließlich isobar wieder zum Ausgangszustand A komprimiert.

Bezeichne mit p, V und T den Druck, das Volumen und die Temperatur des Gases.

Welche der nachfolgenden Graphen stellen den Kreisprozess korrekt dar?



A Nur die Graphen I und II.

B Nur die Graphen I und III.

C Nur die Graphen II und III.

D Alle drei Graphen.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Zustandsänderungen eines idealen Gases lassen sich mit der Zustandgleichung

$$pV \sim T \tag{9.1}$$

beschreiben. Betrachte die einzelnen Abschnitte des Kreisprozesses.

Abschnitt A-B: In diesem Abschnitt ist das Volumen V konstant und damit $T \sim p$. Diese Abhängigkeiten finden sich in allen drei Graphen.

Abschnitt B-C: In diesem Abschnitt ist die Temperatur T konstant und damit $p \sim \frac{1}{V}$. Diese Abhängigkeiten finden sich ebenfalls in allen drei Graphen.

Abschnitt C-A: Bei einer isobaren Zustandsänderung ist der Druck p konstant und damit $V \sim T$. Auch diese Abhängigkeiten sind in allen drei Graphen zu finden.

Damit stellen alle drei Graphen den Kreisprozess richtig dar.

Korrekte Antwort: *D*

Bewertung - Kreisprozess (MC-Aufgabe)		**Punkte**
9	Verwenden der Zustandsgleichung (9.1)	1.5
	Diskussion des daraus folgenden Verhaltens für die drei Abschnitte	1.5
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Aufgabe 10 Eis schmelzen (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

An einem kalten Wintertag stehen drei identische, nicht isolierte Holzkisten vor dem Haus, die jeweils mit der gleichen Menge Eis der Temperatur 0,0 °C befüllt werden. Um das Eis zu schmelzen, wird in jede der Boxen ein elektrisches Heizelement platziert. Die Heizelemente sind identisch, werden aber mit unterschiedlichen Spannungen betrieben.

In der ersten Kiste wird das Heizelement mit einer Spannung von 80 V betrieben. Das gesamte Eis in der Kiste schmilzt dann in 20,0 Minuten. An das Heizelement der zweiten Kiste wird eine Spannung von 120 V angelegt, woraufhin das Eis in nur 4,0 Minuten vollständig schmilzt. In der dritten Kiste wird für das Heizelement eine Spannung von 40 V verwendet.

Die Heizelemente sind so konstruiert, dass sie die gesamte Eismasse in der jeweiligen Kiste gleichzeitig heizen. Nimm an, dass das Schmelzwasser nicht durch das Heizelement erwärmt wird.

Welche der folgenden Aussagen ist dann für das Schmelzen des Eises in der dritten Kiste zutreffend?

A Zum Schmelzen des gesamten Eises in der dritten Kiste werden etwa 80 Minuten benötigt.

B Zum Schmelzen des gesamten Eises in der dritten Kiste werden etwa 100 Minuten benötigt.

C Zum Schmelzen des gesamten Eises in der dritten Kiste werden etwa 130 Minuten benötigt.

D Mit der verwendeten Spannung ist es nicht möglich, das gesamte Eis zu schmelzen.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Dem Eis wird durch das Heizelement eine Wärmeleistung P_{zu} zugeführt. Gleichzeitig gibt die Kiste aber eine Wärmeleistung P_{ab} an die kalte Umgebung ab. Die elektrische Leistung der Heizung ist bei einem konstanten elektrischen Widerstand der Heizung proportional zum Quadrat der Spannung U, die an das Heizelement angelegt wird. Die an die Umgebung abgegebene Leistung ist proportional zur konstanten Temperaturdifferenz ΔT der Eistemperatur zur Umgebungstemperatur.

Um das Eis in einer Zeit t vollständig zu schmelzen, muss die dem Eis insgesamt zugeführte Wärme gleich der Schmelzwärme $Q = m\,h$ sein. Dabei bezeichnet m die Masse des Eises und h dessen spezifische Schmelzwärme oder Schmelzenthalpie. Es muss also gelten:

$$(P_{zu} - P_{ab})\,t = Q \qquad \text{bzw.} \qquad (c_1\,U^2 - c_2\,\Delta T)\,t = m\,h \tag{10.1}$$

mit Proportionalitätskonstanten c_1 und c_2. Mit den Abkürzungen $\alpha = \frac{c_1}{m\,h}$ und $\beta = \frac{c_2\,\Delta T}{m\,h}$ lässt sich dieser Ausdruck umschreiben zu

$$\alpha\,U^2 - \beta = \frac{1}{t}\,. \tag{10.2}$$

Für zwei Werte von U sind die dazugehörigen Schmelzzeiten t bekannt. Daraus lassen sich die beiden Konstanten α und β bestimmen zu

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}}{U_2^2 - U_1^2} = \frac{\frac{1}{4{,}0\,\mathrm{min}} - \frac{1}{20\,\mathrm{min}}}{(120\,\mathrm{V})^2 - (80\,\mathrm{V})^2} \approx 2{,}5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{min}^{-1}\,\mathrm{V}^{-2}, \\ \beta &= \frac{\frac{U_1^2}{t_2} - \frac{U_2^2}{t_1}}{U_2^2 - U_1^2} \approx 0{,}11\,\mathrm{min}^{-1}\,. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Mit den ermittelten Werten lässt sich die Zeit t_3 bestimmen, die für das Schmelzen des Eises in der dritten Kiste notwendig ist:

$$\boxed{t_3 = \frac{1}{\alpha\, U_3^2 - \beta} \approx \frac{1}{2{,}5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{min}^{-1}\,\mathrm{V}^{-2} \cdot (40\,\mathrm{V})^2 - 0{,}11\,\mathrm{min}^{-1}} \approx -14\,\mathrm{min}}\,. \tag{10.4}$$

Das Ergebnis für die Zeit ist negativ, so dass es bei der gegebenen Heizspannung aufgrund der Wärmeabgabe an die Umgebung überhaupt nicht möglich ist, das Eis vollständig zu schmelzen.

Hinweis: Für die Lösung wäre es ausreichend gewesen zu erkennen, dass β größer ist als $\alpha\, U_3^2$.

Korrekte Antwort: *D*

Bewertung - Eis schmelzen (MC-Aufgabe)		**Punkte**
10	Aufstellen einer Leistungsbilanz (10.1)	1.0
	Verwenden der gegebenen Werte zur Parameterbestimmung	1.0
	Bestimmen der Schmelzzeit und/oder erkennen, dass Schmelzen unmöglich ist	1.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Langaufgaben

Bearbeite die folgenden drei Aufgaben ebenfalls in den dafür vorgesehenen Boxen. Anders als bei den Multiple-Choice Aufgaben sind keine Lösungsmöglichkeiten gegeben. Beschreibe deinen Lösungsweg so, dass er gut nachvollziehbar aber nicht unnötig lang ist. Wenn Du also zum Beispiel den Energieerhaltungssatz verwendest, schreibe dies kurz hin.

Aufgabe 11 Kondensatorentladung (20 Pkt.)

Ein geladener Kondensator wird über einen unbekannten Widerstand entladen. In der linken der unten stehenden Tabellen ist der Entladestrom I des Kondensators in Abhängigkeit von der Zeit t aufgeführt.

In einem zweiten Versuch wird der erneut geladene Kondensator über den unbekannten Widerstand in Reihe mit einem Vorwiderstand von 5,1 MΩ entladen. Die entsprechenden Werte für den Entladestrom sind in der rechten Tabelle aufgeführt.

Entladung ohne Vorwiderstand

t / s	I / µA
0	0,96
10	0,81
20	0,69
30	0,59
40	0,50
60	0,36
80	0,26
100	0,19
120	0,13

Entladung mit Vorwiderstand

t / s	I / µA
0	0,63
10	0,56
20	0,51
30	0,46
40	0,42
60	0,34
80	0,27
100	0,22
120	0,18

Bestimme aus den Messwerten sowohl die Kapazität des Kondensators als auch den Widerstandswert des unbekannten Widerstandes. Erstelle dazu einen geeigneten Graphen.

Hinweis: Es ist nicht bekannt, auf welche Spannungen der Kondensator in den beiden Versuchen aufgeladen wurde. Insbesondere können die Spannungen in beiden Versuchen unterschiedlich sein.

Lösung

Graph

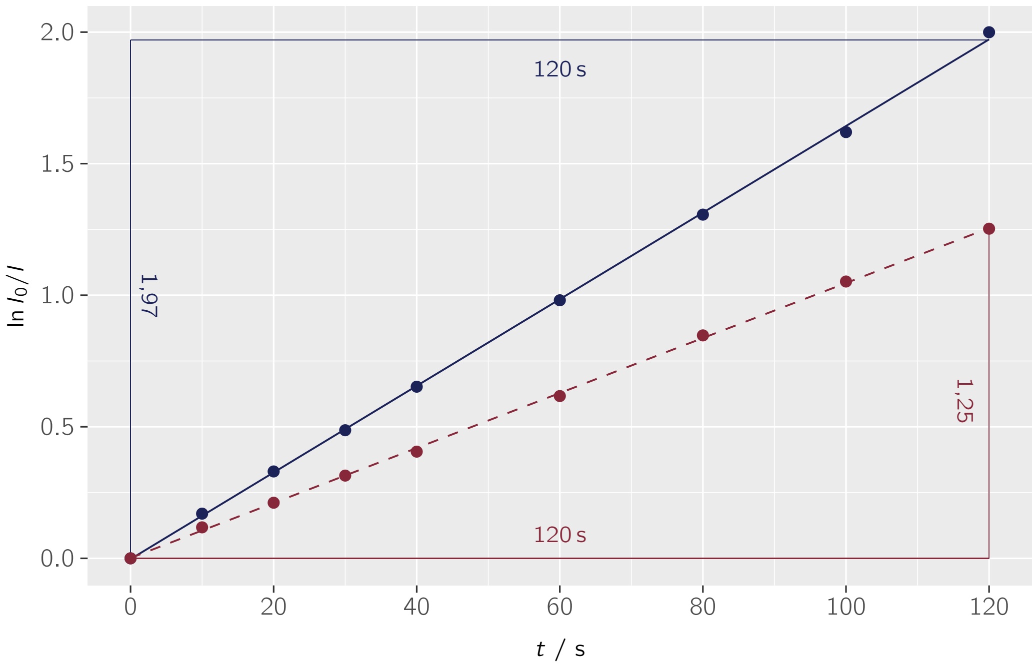


Abbildung 1: *Graph der Logarithmen von I_0/I als Funktion der Zeit t (blau: ohne Vorwiderstand, rot, gestrichelt: mit Vorwiderstand) mit dazugehörigen Ausgleichsgeraden und eingezeichneten Steigungsdreiecken.*

Rechnungen und Erläuterungen

Beim Auf- und Entladen eines Kondensators der Kapazität C über einen Widerstand mit Widerstandswert R gilt für die Stromstärke I des Entladestroms als Funktion der Zeit t

$$I(t) = I_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}} \,. \tag{11.1}$$

Dabei bezeichnet I_0 die Stromstärke zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\tau = R\,C$ bezeichnet die Zeitkonstante des Kondensator-Widerstand-Systems.

Durch Logarithmieren ergibt sich aus Gleichung (11.1)

$$\ln\left(\frac{I_0}{I(t)}\right) = \frac{1}{\tau}\, t \,. \tag{11.2}$$

Der Logarithmus $\ln(I_0/I(t))$ ist also eine lineare Funktion der Zeit, deren Steigung durch $1/\tau$ gegeben ist. Die Zeitkonstante der Entladung lässt sich damit aus der Steigung b der Ausgleichsgerade in einem Graphen der Stromstärke I über der Zeit t bestimmen gemäß $\tau = \frac{1}{b}$.

Bezeichne die Zeitkonstanten der Entladungen ohne bzw. mit dem Vorwiderstand von $R_\mathrm{V} = 5{,}1\,\mathrm{M\Omega}$ mit τ_1 bzw. τ_2. Dann gelten für die Kapazität C des Kondensators und den vorgeschalteten unbekannten Widerstand R

$$\tau_1 = R \cdot C \qquad \text{und} \qquad \tau_2 = (R + R_\mathrm{V}) \cdot C \,. \tag{11.3}$$

Damit ergeben sich die gesuchte Kapazität C und der gesuchte Widerstand R zu

$$\boxed{C = \frac{\tau_2 - \tau_1}{R_V}} \quad \text{und} \quad \boxed{R = R_V \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}}. \tag{11.4}$$

Die folgende Tabelle gibt die um die Logarithmen von I_0/I ergänzten Messwerte wieder

Entladung ohne Vorwiderstand

t / s	I / µA	$\ln(I_0/I)$
0	0,96	0,00
10	0,81	0,17
20	0,69	0,33
30	0,59	0,49
40	0,50	0,65
60	0,36	0,98
80	0,26	1,31
100	0,19	1,62
120	0,13	2,00

Entladung mit Vorwiderstand

t / s	I / µA	$\ln(I_0/I)$
0	0,63	0,00
10	0,56	0,12
20	0,51	0,21
30	0,46	0,31
40	0,42	0,41
60	0,34	0,62
80	0,27	0,85
100	0,22	1,05
120	0,18	1,25

Graphisch aufgetragen ergibt sich das in dem obigen Graphen dargestellte Bild: Aus den Steigungen im Graphen ergeben sich die Zeitkonstanten τ_1 und τ_2 zu

$$\tau_1 = \frac{120\,\text{s}}{1{,}97} \approx 61\,\text{s} \quad \text{und} \quad \tau_2 = \frac{120\,\text{s}}{1{,}25} \approx 96\,\text{s}\,. \tag{11.5}$$

Ergebnis für die Kapazität und den Widerstandswert:

Daraus lassen sich mit (11.4) die gesuchten Größen bestimmen zu

$$\boxed{C = 6{,}9\,\mu\text{F}} \quad \text{und} \quad \boxed{R = 8{,}9\,\text{M}\Omega}. \tag{11.6}$$

Bewertung - Kondensatorentladung		**Punkte**
11	Angeben des Entladestromes (11.1)	1.0
	Logarithmieren der Stromstärke (11.2)	1.0
	Qualitatives beschreiben der Bestimmung der Zeitkonstanten	2.0
	Ausdrücken der Zeitkonstanten durch Widerstände und Kapazität (11.3)	2.0
	Umformen zu Ausdrücken für C und R (11.4)	2.0
	Berechnen von Logarithmen für die Stromstärken	2.0
	Eintragen der Messwerte in einen Graphen	2.0
	Einzeichnen sinnvoller Ausgleichsgeraden	2.0
	Berechnen der (inversen) Zeitkonstanten	2.0
	Bestimmen der Kapazität mit $6{,}3\,\mu\text{F} \leq C \leq 7{,}3\,\mu\text{F}$ (noch 1 Pkt. für Werte bis $5{,}8\,\mu\text{F}$ und $7{,}8\,\mu\text{F}$)	2.0
	Bestimmen des Widerstandswertes mit $8{,}5\,\text{M}\Omega \leq R \leq 10{,}1\,\text{M}\Omega$ (noch 1 Pkt. für Werte bis $7{,}7\,\text{M}\Omega$ und $10{,}9\,\text{M}\Omega$)	2.0
		20.0

Aufgabe 12 Wettlauf zwischen Photon und Proton (10 Pkt.)

(Idee: Richard Reindl, Thomas Hellerl)

Bei einer Supernova in Barnards Galaxie, einer Nachbargalaxie unserer Milchstraße, gehen ein Photon und ein Proton gleichzeitig auf die Reise zur Erde. Dort wird das Proton 72 Stunden später registriert als das Photon. Die Gesamtenergie des Protons beträgt $9{,}38\,\text{TeV} = 9{,}38 \cdot 10^{12}\,\text{eV}$.

12.a) Zeige, dass die Gesamtenergie des Protons etwa das 10.000-fache seiner Ruheenergie beträgt. *(3,0 Pkt.)*

12.b) Berechne, in welcher Entfernung von der Erde die Supernova stattfand. Gib dein Ergebnis in Lichtjahren an. *(5,0 Pkt.)*

12.c) Bestimme, wie lange die Reise des Protons in seinem Bezugssystem gedauert hat. *(2,0 Pkt.)*

Lösung

12.a)

Rechnungen und Erläuterungen

Bezeichne mit $E_0 = m_\text{p} c^2$ die Ruheenergie des Protons. Dann gilt für das Verhältnis γ der Energie E des Protons zu dessen Ruheenergie:

$$\boxed{\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{9{,}38\,\text{TeV}}{m_\text{p} c^2} = \frac{9{,}38 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot (3{,}00 \cdot 10^{8}\,\text{m}\,\text{s}^{-1})^2} = 9{,}99 \cdot 10^{3} \approx 10^{4}}\,. \quad (12.1)$$

Die Gesamtenergie $E = \gamma\, m_\text{p} c^2$ des Protons beträgt also etwa das 10.000-fache von dessen Ruheenergie.

12.b)

Rechnungen und Erläuterungen

Die Geschwindigkeit v, mit der sich das Proton aus Sicht eines Beobachters auf der Erde bewegt, lässt sich aus dem γ-Faktor in (12.1) bestimmen. Es gilt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{und damit} \qquad v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx c\,(1 - 5{,}01 \cdot 10^{-9})\,. \quad (12.2)$$

Das Proton bewegt sich also beinahe mit Lichtgeschwindigkeit.

Bezeichne mit x den Abstand der Supernova zur Erde und mit $t = x/c$ die Zeit, die das Licht für das Zurücklegen dieser Strecke benötigt. Das Proton benötigt für die Strecke die Zeit $t + \Delta t$ mit $\Delta t = 72\,\text{h}$. Die Strecke x lässt sich damit ausdrücken durch

$$x = v\,(t + \Delta t) = v\,(\frac{x}{c} + \Delta t)\,. \quad (12.3)$$

Ergebnis für die Entfernung von der Erde in der die Supernova stattfand:

Umstellen von (12.3) ergibt für die gesuchte Entfernung

$$\boxed{x = \frac{v\,\Delta t}{1 - \frac{v}{c}} \approx c\,\frac{\Delta t}{1 - \frac{v}{c}} \approx 1{,}64 \cdot 10^{6}\,\text{Lj}}\,. \quad (12.4)$$

12.c)

Rechnungen und Erläuterungen

Die Zeit t', die während der Reise im Bezugsystem des Protons vergeht, beträgt aufgrund der Zeitdilatation

$$t' = \frac{t + \Delta t}{\gamma} \approx \frac{t}{\gamma}\,. \tag{12.5}$$

Ergebnis für die Dauer der Reise des Protons in seinem Bezugssystem:

Daraus folgt für die Reisedauer im Bezugsystem des Protons

$$\boxed{t' \approx \frac{t}{\gamma} \approx \frac{1{,}64 \cdot 10^6\,\mathrm{a}}{9{,}99 \cdot 10^3} = 164\,\mathrm{a}}\,. \tag{12.6}$$

Bewertung - Wettlauf zwischen Photon und Proton		Punkte
12.a)	Angeben einer Formel für das Energieverhältnis mit Hilfe der Ruheenergie	1.0
	Umrechnen der TeV in J (oder rechnen in TeV) und angeben des Ergebnisses	2.0
12.b)	Bestimmen der Protonengeschwindigkeit v (12.2)	1.0
	Ausdrücken der Gesamtstrecke x durch Zeiten und Geschwindigkeiten (12.3)	2.0
	Umstellen zur Gesamtstrecke und berechnen des Ergebnisses (12.4)	2.0
12.c)	Anwenden der Zeitdilatationsformel und angeben des Ergebnisses (12.5)	2.0
		10.0

Aufgabe 13 Wolkenbildung (20 Pkt.)

(Idee: Fabian Bühler)

Früh an einem Sommermorgen beträgt die Lufttemperatur am Boden $\vartheta_0 = 13\,°\mathrm{C}$. Mit der Höhe über dem Boden nimmt die Temperatur ab und zwar näherungsweise um 0,50 Kelvin pro 100 Höhenmeter. Nimm an, dass diese Temperaturschichtung der Umgebungsluft über den gesamten Tag konstant bleibt.

Durch die Sonneneinstrahlung werden im Laufe des Vormittages Luftpakete am Boden erwärmt und steigen nach oben. Beim Aufsteigen dehnen sich diese Pakete aus und kühlen durch die dabei verrichtete Arbeit ab. Die Abkühlungsrate der Luftpakete beträgt $\Gamma_d = 0{,}0098\,\mathrm{K\,m^{-1}}$. Die Luftpakete steigen nicht weiter auf, wenn ihre Temperatur gleich der Temperatur der umgebenden Luft ist.

13.a) Betrachte ein Luftpaket, das am Boden eine Temperatur von $\vartheta_1 = 18\,°\mathrm{C}$ besitzt. Zeichne in einem gemeinsamen Graphen sowohl die Temperatur der Umgebungsluft als auch die des aufsteigenden Luftpaketes in Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden ein. Trage dabei die Höhe auf der vertikalen Achse auf. Bestimme aus dem Graphen oder rechnerisch, bis in welche Höhe das Luftpaket aufsteigt. *(8,0 Pkt.)*

Wenn die Temperatur in den Luftpaketen den sogenannten Taupunkt erreicht, beginnt die in der Luft enthaltene Feuchtigkeit zu kondensieren und es bilden sich Wolken. Der Taupunkt ist dabei die Temperatur, auf die man Luft einer bestimmten Luftfeuchtigkeit bei konstantem Druck abkühlen muss, damit Kondensation einsetzt. Der Taupunkt ist druckabhängig und ändert sich daher ebenfalls mit der Höhe über dem Boden. Nimm an, dass der Taupunkt in den Luftpaketen an der Erdoberfläche bei $\vartheta_T = 7{,}0\,°\mathrm{C}$ liegt und mit der Höhe um $\Gamma_T = 0{,}0018\,\mathrm{K\,m^{-1}}$ abnimmt.

13.b) Im Verlauf des Vormittags zeigen sich die ersten Quellwolken. Bestimme die Temperatur der Luftpakete am Boden bei Auftreten der ersten Quellwolken. *(5,0 Pkt.)*

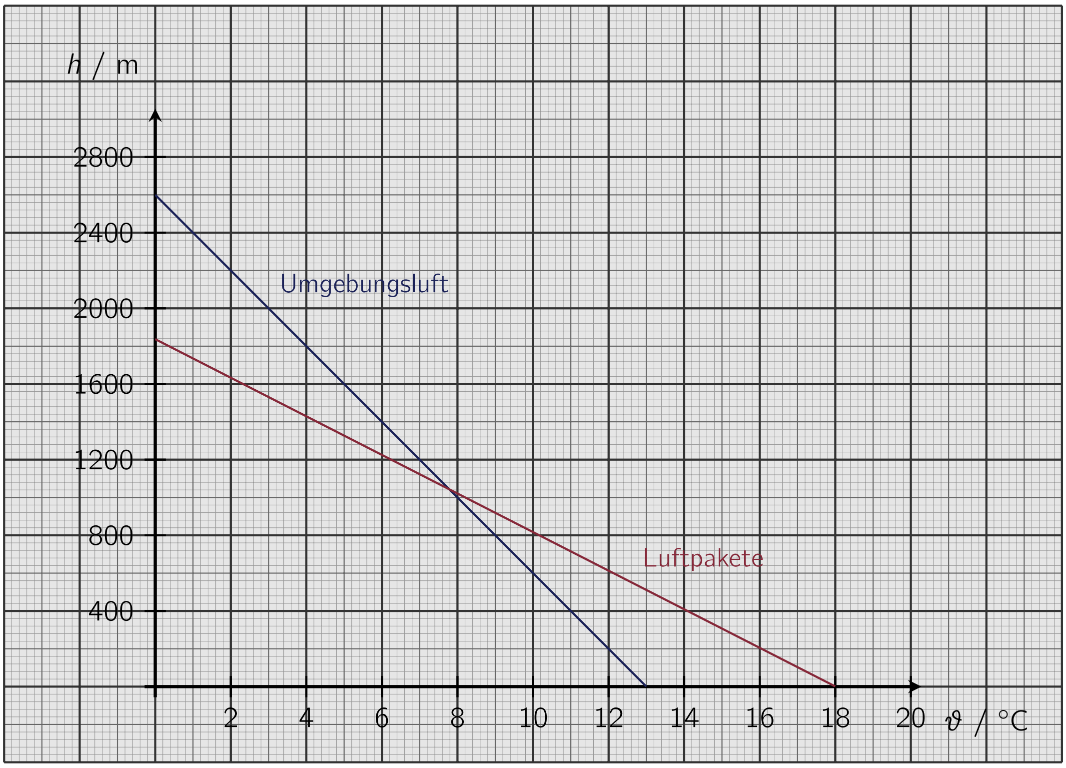
Durch die bei der Kondensation frei werdende Kondensationswärme verringert sich die Abkühlungsrate der aufsteigenden Luftpakete auf $\Gamma_m = 0{,}0060\,\mathrm{K\,m^{-1}}$. Am Nachmittag beträgt die Temperatur der Luftpakete an der Erdoberfläche $\vartheta_2 = 26\,°\mathrm{C}$ und der Taupunkt liegt immer noch bei $7{,}0\,°\mathrm{C}$. Am Himmel sind nun einige Quellwolken zu sehen.

13.c) Bestimme, in welcher Höhe sich die Unterseite der Wolken befindet und bis in welche Höhe die Oberseiten der Wolken reichen. *(7,0 Pkt.)*

Lösung

13.a)

Graph



Rechnungen und Erläuterungen

Die Temperatur $\vartheta_{\text{Umgebung}}$ der umgebenden Luft ändert sich mit der Höhe h über dem Erdboden gemäß

$$\vartheta_{\text{Umgebung}}(h) = \vartheta_0 - \Gamma_A \cdot h = 13\,°\text{C} - 0{,}0050\,\text{K}\,\text{m}^{-1} \cdot h\,. \tag{13.1}$$

Dabei bezeichnet $\Gamma_A = 0{,}0050\,\text{K}\,\text{m}^{-1}$ die Änderungsrate der Umgebungslufttemperatur mit der Höhe. Die Temperatur $\vartheta_{\text{Luftpaket}}$ des aufsteigenden Luftpaketes beträgt entsprechend

$$\vartheta_{\text{Luftpaket}}(h) = \vartheta_1 - \Gamma_d \cdot h = 18\,°\text{C} - 0{,}0098\,\text{K}\,\text{m}^{-1} \cdot h\,. \tag{13.2}$$

Damit lassen sich die beiden Temperaturkurven in Abhängigkeit von der Höhe h in einen Graphen einzeichnen (s. oben). Die maximale Aufstiegshöhe h_{max} des Luftpaketes ist erreicht, wenn die Temperaturen der Umgebungsluft und des Luftpaketes gleich sind:

$$\vartheta_1 - \Gamma_d \cdot h_{\text{max}} = \vartheta_0 - \Gamma_A \cdot h_{\text{max}}\,. \tag{13.3}$$

Ergebnis für die Höhe, bis in die das Luftpaket aufsteigt:

Auflösen von (13.3) nach h_{max} oder Ablesen des Schnittpunktes der beiden Temperaturgeraden aus dem Graphen ergibt:

$$\boxed{h_{\text{max}} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\Gamma_d - \Gamma_A} \approx 1{,}04 \cdot 10^3\,\text{m}}\,. \tag{13.4}$$

13.b)

Rechnungen und Erläuterungen

Damit Wolkenbildung einsetzt, muss ein aufsteigendes Luftpaket bis zum Taupunkt abkühlen. Der Taupunkt des Luftpakets in der Höhe h ist $\vartheta_T - \Gamma_T \cdot h$. Ein Luftpaket, das mit einer Anfangstemperatur ϑ vom Boden aufsteigt, hat in der Höhe h die Temperatur $\vartheta - \Gamma_d \cdot h$. Gleichsetzen und Auflösen nach h liefert die Höhe, ab der Wolkenbildung einsetzen kann:

$$\vartheta_T - \Gamma_T \cdot h = \vartheta - \Gamma_d \cdot h \qquad \text{und damit} \qquad h = \frac{\vartheta - \vartheta_T}{\Gamma_d - \Gamma_T}\,. \tag{13.5}$$

Damit das Paket diese Höhe erreicht, muss die maximale Aufstiegshöhe mindestens gleich dieser Höhe sein und es muss daher bei Auftreten der ersten Quellwolken mit (13.4) gelten

$$\frac{\vartheta - \vartheta_T}{\Gamma_d - \Gamma_T} = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\Gamma_d - \Gamma_A}\,. \tag{13.6}$$

Ergebnis für die Temperatur der Luftpakete am Boden bei Auftreten der ersten Quellwolken:

Auflösen von (13.6) nach ϑ liefert die gesuchte Temperatur:

$$\boxed{\vartheta = \frac{\vartheta_T(\Gamma_d - \Gamma_A) - \vartheta_0(\Gamma_d - \Gamma_T)}{\Gamma_T - \Gamma_A} = 22\,^\circ\mathrm{C}}\,. \tag{13.7}$$

13.c)

Rechnungen und Erläuterungen

Die Wolkenunterseite ergibt sich aus der zu (13.5) analogen Bedingung:

$$\boxed{h_u = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_T}{\Gamma_d - \Gamma_T} \approx 2{,}38 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}\,. \tag{13.8}$$

Die Temperatur eines Luftpakets an der Wolkenunterseite beträgt $\vartheta_u = \vartheta_2 - \Gamma_d \cdot h_u$. Ab dieser Höhe kühlt sich das Luftpaket nur noch mit der Rate Γ_m ab, d.h. in der Höhe $h > h_u$ hat es die Temperatur:

$$\vartheta = \vartheta_u - \Gamma_m \cdot (h - h_u)\,. \tag{13.9}$$

Die Wolkenoberseite befindet sich in der Höhe $h_{\max}$, in der die Temperatur des Luftpakets gleich der Umgebungstemperatur ist und damit gilt

$$\vartheta_u - \Gamma_m \cdot (h_{\max} - h_u) = \vartheta_0 - \Gamma_A \cdot h_{\max}\,. \tag{13.10}$$

Ergebnis für die Höhen der Unter- und der Oberseite der Wolken:

Die Höhe der Wolkenunterseite ist in (13.8) zu $h_u = 2{,}38 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$ bestimmt worden.

Auflösen von (13.10) nach $h_{\max}$ führt auf die gesuchte Höhe der Wolkenoberseite:

$$\boxed{h_{\max} = \frac{\vartheta_2 - \Gamma_d h_u - \vartheta_0 + \Gamma_m h_u}{\Gamma_m - \Gamma_A} \approx 3{,}98 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}\,. \tag{13.11}$$

Bewertung - Wolkenbildung		Punkte
13.a)	Angeben der Temperatur der umgebenden Luft als Funktion der Höhe (13.1)	1.0
	Angeben der Temperatur des Luftpaketes als Funktion der Höhe (13.2)	1.0
	Erstellen eines Graphen der Temperaturverläufe	3.0
	Verwenden eines Temperaturgleichgewichts	1.0
	Auflösen zu (13.4) und bestimmen der Höhe mit $h_{\text{max}} = (1040 \pm 50)\,\text{m}$	2.0
13.b)	Ableiten der Höhe für Wolkenbildung (13.5)	2.0
	Gleichsetzen mit der maximalen Aufstiegshöhe (13.6)	1.0
	Auflösen nach der Temperatur und Ergebnis (13.7)	2.0
13.c)	Bestimmen der Höhe der Wolkenunterseite (13.8)	2.0
	Angeben eines Ausdrucks für die Temperatur der Wolkenunterseite	1.0
	Angeben eines Ausdrucks für die Temperatur in der Wolke	1.0
	Verwenden eines Temperaturgleichgewichts	1.0
	Auflösen zu (13.11) und bestimmen der Höhe der Wolkenoberseite	2.0
		20.0

Hinweis: Die Lösungen zu den letzten beiden Aufgabenteilen lassen sich ebenfalls graphisch konstruieren. Auch dies sollte als korrekt bewertet werden.