49. Internationale PhysikOlympiade
Lissabon, Portugal 2018

Wettbewerbsleitung
Dr. Stefan Petersen
Tel.: 0431 / 880 - 5120
email: petersen@ipho.info

Sekretariat
Lulu Hoffmeister
Tel.: 0431 / 880 - 5387
email: sekretariat@ipho.info

Anschrift: IPN an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62, 24098 Kiel

Fax: 0431 / 880 - 3148
Webseite: www.ipho.info

Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 49. IPhO 2018

Hinweise zur Bearbeitung für Schülerinnen und Schüler

- Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler, die die 1. Runde erfolgreich abgeschlossen oder sich über einen anderen Wettbewerb für die 2. Runde qualifiziert haben und **nach dem 30. Juni 1998 geboren** sind.
- Die drei Aufgaben sind **ohne fremde Hilfe und in Einzelarbeit** zu lösen. Gemeinschaftslösungen sind nicht zulässig. **Beachte hierzu auch die erste Seite des beigefügten Adressbogens und schicke diesen ausgefüllt und unterschrieben mit!**
- Bitte bearbeite jede Aufgabe auf gesonderten Blättern und schreibe auf jedes Blatt deinen Namen und Schülercode.
- Die Lösungen können handschriftlich abgegeben werden. Die Darstellung sollte logisch vollständig und nicht unnötig breit sein. Wenn du Formeln oder Zwischenergebnisse, die nicht im Physiklehrbuch der Schule stehen, aus anderen Quellen entnimmst, gib diese bitte an.
- **Das Lösen der Probleme mit dem Computer ist, wenn nicht anders angegeben, nicht zulässig**. Du darfst einen Computer unterstützend (zum Beispiel zum Tippen der Bearbeitung oder zum Zeichnen) verwenden. Die Lösung muss aber ohne Computer nachvollziehbar sein.
- Der **Abgabetermin ist der 09.11.2017** (Poststempel). Bis zu diesem Datum musst du deine **Bearbeitung unkorrigiert an deinen Landesbeauftragten schicken**. Die Mitteilung, ob du in die nächste Runde kommst, erhältst du kurz vor Weihnachten. Eingeladen werden die etwa 50 Bestplatzierten. **Die 3. Runde findet vom 27.01. - 02.02.2018 am DLR Göttingen statt**.
- Die eingereichten Arbeiten werden nicht zurückgeschickt. Es wird deshalb empfohlen, für eigene Zwecke eine Kopie anzufertigen. Eine Musterlösung erhältst du mit der Benachrichtigung über dein Abschneiden in der 2. Runde.
- In der Regel haben selbst die Bestplatzierten nicht alle Aufgaben richtig gelöst. **Verliere also nicht den Mut** und schicke deine Bearbeitung auch dann ein, wenn du nicht alle Aufgabenteile bearbeiten konntest. Wir wünschen viel Erfolg!
- Bitte schaue auch auf www.ipho.info für aktuelle Hinweise bzw. Korrekturen zu den Aufgaben.

Naturkonstanten und gebräuchliche Größen

Konstante	gebräuchliche Formelzeichen	Wert
Absoluter Nullpunkt	T_0	$0\,\mathrm{K} = -273{,}15\,°\mathrm{C}$
Atomare Masseneinheit	u	$1{,}660\,539 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6{,}022\,136\,7 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1{,}380\,658 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8{,}854\,187\,817 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m^{-1}}$
Elementarladung	e	$1{,}602\,177\,33 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s}$
Fallbeschleunigung auf der Erde	g	$9{,}806\,65\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Gravitationskonstante	γ, G	$6{,}672\,59 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c_0	$2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$1{,}256\,637\,061\,4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$
Normdruck, Atmosphärendruck	p_n	$101\,325\,\mathrm{N\,m^{-2}}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6{,}626\,075\,5 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9{,}109\,389\,7 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1{,}674\,928\,6 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	$1{,}672\,623\,1 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$1{,}097\,373\,153\,4 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	α, σ	$5{,}670\,32 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Universelle Gaskonstante	R	$8{,}314\,510\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$
Elektronenvolt	eV	$1\,\mathrm{eV} = 1{,}602\,177\,33 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

Aufgabe 1 Mechanische Spielereien (10+10 Pkt.)

Zeit für physikalische Spielereien! In einer offensichtlich speziell für physikbegeisterte Menschen eingerichteten Mitmachausstellung gibt es allerlei zu entdecken. Schau dir zwei mechanische Exponate genauer an und überzeuge dich selbst.

1.1 Wasserspiel

An einer der ersten Stationen kannst du Wasser am oberen Ende in eine Rinne der Länge $L = 100\,\text{cm}$ gießen, das an dem unteren Ende aus der Rinne herausläuft. Die Rinne ist, wie nebenstehend abgebildet, an dem unteren Ende in einer Höhe $h = 200\,\text{cm}$ über dem Erdboden fixiert. Das obere Ende der Rinne kannst du aber in der Höhe variieren. Die Höhe des oberen Endes beeinflusst offensichtlich, wie weit ein Wasserstrahl kommt, bevor er auf den Boden trifft.

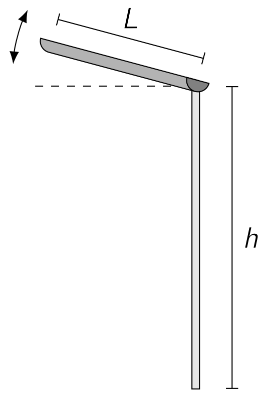

Abbildung 1: *Aufbau des Wasserspiels.*

1.a) Bestimme näherungsweise die maximale horizontale Weite, gemessen vom unteren Ende der Rinne, die du mit dem Wasserstrahl erreichen kannst und welchen Winkel die Rinne dazu mit der Horizontalen einschließen muss. *(10 Pkt.)*

Du kannst dabei annehmen, dass sich das Wasser reibungsfrei bewegt und dass es mit einer vernachlässigbaren Geschwindigkeit in die Rinne gegossen wird.

1.2 Luftkissenbahn und Reibung an einer Wand

Ein weiteres Highlight der Ausstellung ist die Luftkissenbahn, auf der sich ein kleiner, flacher Quader der Masse m, wie in der nebenstehenden Abbildung skizziert, reibungsfrei bewegt. Die Luftkissenbahn wird auf zwei Seiten durch feste Wände mit einem Abstand b voneinander begrenzt.

Betrachte den Fall, bei dem du den Quader von der linken Wand mit einer Geschwindigkeit v_0 in einem Winkel von $\alpha = 45°$ zur Wand startest.

Bei jedem Stoß mit einer Wand nimmt die Geschwindigkeit des Quaders entlang der Wände ab, obwohl die dabei auftretenden Verformungen als elastisch angenommen werden können. Nach dem fünften Stoß besitzt der Quader so gut wie keine Geschwindigkeit mehr entlang der Wände und bewegt sich nur noch senkrecht zwischen den Wänden hin und her.

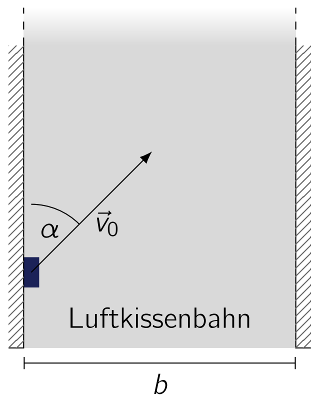

Abbildung 2: *Aufsicht auf die Luftkissenbahn beim Start des Quaders.*

1.b) Bestimme den Gleitreibungskoeffizienten zwischen Wand und Quader und gib einen Ausdruck für die von dem Quader entlang der Wände (in der Skizze nach oben) insgesamt zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von den gegebenen Größen an. *(10 Pkt.)*

Nimm zur Lösung an, dass sich der Quader während der Bewegung nicht dreht.

Aufgabe 2 Quanteneffekte von Elektronen in Magnetfeldern (23+17 Pkt.)

Das Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelte Bohrsche Atommodell erlaubte erstmalig eine theoretische Erklärung der Größe von Atomen sowie von Spektrallinien im Wasserstoffatom. Auch wenn das Modell auf Postulaten basiert, die im Widerspruch zum Beispiel zur klassischen Mechanik und zur Elektrodynamik stehen, und genauere Experimente Unzulänglichkeiten des Modells aufdeckten, war es außerordentlich erfolgreich. Auch heute noch finden sich in vielen Darstellungen von Atomen die für das Bohrsche Atommodell typischen Bahnen der Elektronen um den Atomkern.

Die Grundannahme des Bohrschen Atommodells ist, dass sich die Elektronen eines Atoms ohne Energieverlust in Kreisbahnen um den Atomkern bewegen. Dabei sind nur solche Kreisbahnen erlaubt, für die der Bahndrehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches des reduzierten Planckschen Wirkungsquantums $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ mit $h \approx 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ ist. Diese Bedingung lässt sich über den Impuls p des Elektrons entlang der Kreisbahn und deren Radius r ausdrücken durch

$$p = \frac{\hbar\, n}{r}\,,$$

mit einer beliebigen ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$, die das Quantenniveau kennzeichnet[1].

Wenn sich ein Atom in einem externen Magnetfeld befindet, muss diese Quantisierungsbedingung modifiziert werden. Für ein Elektron der Ladung $-e$, das sich auf einer Kreisbahn bewegt, die senkrecht zur Richtung eines homogenen und konstanten Magnetfeldes orientiert ist, deren magnetische Flussdichte den Betrag B besitzt, lautet die Quantisierungsbedingung[2]

$$\frac{r\,p}{\hbar} - \frac{e\,r^2\,B}{2\,\hbar} = n\,.$$

Mit Hilfe dieser Quantisierungsbedingung lassen sich eine Reihe spannender Quantenphänomene erklären. Genau das sollst du im Folgenden nachvollziehen.

Nimm dazu in dieser Aufgabe an, dass sich die Elektronen als nichtrelativistische Teilchen betrachten lassen und vernachlässige das magnetische Moment des Elektrons aufgrund seines Spins[3]. Nach dem Pauliprinzip kann sich dann in jedem Quantenzustand nur ein Elektron befinden.

2.1 Unerwartete Ströme

Klassisch fließt durch ein an eine Spannungsquelle angeschlossenes Stück Metall ein Strom, der proportional zur Spannung über dem Material ist. In einem sehr kleinen und dünnen Metallring kann bei tiefen Temperaturen aber auch ganz ohne eine externe Spannungsquelle ein Strom fließen.

Betrachte zur Erklärung dieses Stromes einen Ring mit Radius r, in dem sich eine große Anzahl N Leitungselektronen der Masse m befindet. Nimm an, dass sich die Elektronen nur entlang des Ringes bewegen können und damit auf eine eindimensionale Bewegung eingeschränkt sind.

2.a) Berechne die gemäß der Bohrschen Quantisierung möglichen Energieniveaus E_n mit $n \in \mathbb{Z}$ der Elektronen unter dem Einfluß eines senkrecht zur Bewegung orientierten magnetischen Feldes der Flussdichte B. Zeige, dass für $B \neq 0$ die Energieniveaus E_n und E_{-n} verschieden sind. *(4 Pkt.)*

[1] In vielen Darstellungen des Bohrschen Atommodells werden nur positive Werte für n betrachtet. Die negativen Werte tragen den beiden möglichen Umlaufsinnen des Elektrons Rechnung und die Hinzunahme des Wertes $n = 0$ erlaubt auch den quantenmechanisch möglichen Zustand mit verschwindendem Bahndrehimpuls.

[2] vgl. z. B. Canuto & Kelly (1972). Hydrogen atom in intense magnetic field. *Astrophysics and Space Science, 17*(2), 277-291.

[3] Für Elektronen in starken Magnetfeldern ist das eine passende Annahme, da sich ihr Spin in dem Magnetfeld ausrichtet.

Wenn die Stärke des Magnetfeldes erhöht wird, ändern sich auch die möglichen Energieniveaus der Elektronen. Für bestimmte Werte ΔB der Änderung der magnetischen Flussdichte wird das Spektrum der Energieniveaus aber auf sich selbst abgebildet.

2.b) Bestimme den kleinsten von Null verschiedenen Wert für ΔB, bei dem das Spektrum der Energieniveaus unverändert bleibt. *(3 Pkt.)*

2.c) Gib einen Ausdruck für die Stromstärke I_n in dem Ring an, die von einem Elektron in dem n-ten Quantenniveau hervorgerufen wird. *(2 Pkt.)*

Elektronen sind Fermionen. Nach dem Pauliprinzip kann daher jeder Quantenzustand durch maximal ein Elektron besetzt sein. Bei sehr niedrigen Temperaturen besetzen die Elektronen in dem Ring die Zustände mit den niedrigsten möglichen Energien.

2.d) Leite einen Ausdruck für die bei sehr tiefen Temperaturen und gegebener Elektronenanzahl N insgesamt durch den Ring fließende Stromstärke $I(B)$ als Funktion der magnetischen Flussdichte ab und skizziere qualitativ den Verlauf von $I(B)$. Die magnetische Flussdichte soll dabei in einem Bereich von einigen ΔB um $B = 0$ variieren. *(8 Pkt.)*

2.e) Berechne die maximale Stromstärke I_{max}, die durch diesen Effekt in einem Aluminiumring mit einem Radius von $r = 300\,\mathrm{nm}$ und einer Elektronendichte entlang des Ringes von $\lambda = 2{,}0 \cdot 10^9\,\mathrm{m}^{-1}$ hervorgerufen wird. Die Größe λ gibt dabei die Anzahl der Elektronen pro Ringlänge an. Vergleiche den Wert für die maximale Stromstärke mit der Abschätzung $I_{\mathrm{max}} = \frac{e\,v_{\mathrm{F}}}{2\,\pi\,r}$. Hierbei ist v_{F} die so genannte Fermigeschwindigkeit eines Elektrons, die sich ergibt, wenn man die kinetische Energie des Elektrons mit der Fermienergie $E_{\mathrm{F}} = 11{,}64\,\mathrm{eV}$ von Aluminium gleichsetzt. *(3 Pkt.)*

Bei höheren Temperaturen besetzen die Elektronen nicht nur die tiefsten Energieniveaus, sondern auch Zustände höherer Energien. Der untersuchte Effekt verschwindet dann.

2.f) Schätze für den Ring aus dem letzten Aufgabenteil grob ab, ab welcher Temperatur der Effekt nicht mehr auftritt. *(3 Pkt.)*

2.2 Der Quanten-Hall-Effekt

Mit Hilfe der Bohrschen Quantisierung lässt sich auch der Quanten-Hall-Effekt an einem Modellsystem erklären.

Betrachte dazu ein System von Elektronen bei tiefen Temperaturen, die sich ausschließlich in einer Ebene bewegen können. Die Elektronen befinden sich in einem starken Magnetfeld der konstanten Flussdichte B, das senkrecht zu der Ebene orientiert ist. Wenn eine Spannung U entlang einer Richtung in der Ebene angelegt wird, führt dies zu einem Stromfluss der Stromstärke $I_{\mathrm{H}} \sim U$ in der Ebene, aber senkrecht zu der Spannung. Anders als beim klassischen Hall-Effekt ist der Hall-Strom I_{H} beim Quanten-Hall-Effekt keine lineare Funktion der Magnetfeldstärke, sondern kann nur die Werte $I_{\mathrm{H}} = \frac{k}{R_{\mathrm{K}}} U$ mit $k \in \mathbb{N}$ annehmen. Die Größe R_{K} wird Klitzing-Konstante genannt.

2.g) Die Klitzing-Konstante R_{K} ist eine aus fundamentalen Naturkonstanten zusammengesetzte Größe. Bestimme einen Ausdruck für R_{K}, in dem nur die Planck-Konstante h, die Elementarladung e und die Lichtgeschwindigkeit c vorkommen. Mögliche numerische Faktoren können dabei zu 1 gesetzt werden. *(3 Pkt.)*

Die nächsten Aufgabenteile sollen den Mechanismus, der zu dem Quanten-Hall-Effekt führt, mit Hilfe der Bohrschen Quantisierungsbedingung veranschaulichen.

2.h) Unter dem Einfluss des Magnetfeldes bewegen sich die Elektronen in der Ebene auf Kreisbahnen, den so genannten Zyklotronorbits. Verwende die Bohrsche Quantisierungsbedingung und bestimme die Radien r_n der quantisierten Zyklotronorbits sowie deren Energieniveaus E_n. *(3 Pkt.)*

Betrachte nun ein zusätzliches, schwaches elektrisches Feld der konstanten Feldstärke E, das in der Ebene angelegt wird.

2.i) Zeige ohne Berücksichtigung von Quanteneffekten, dass die Zyklotronorbits der Elektronen unter dem Einfluss des elektrischen und magnetischen Feldes eine Driftbewegung senkrecht zum elektrischen und magnetischen Feld mit einer Driftgeschwindigkeit des Betrages $v_\mathrm{D} = \frac{E}{B}$ ausführen. *(5 Pkt.)*

Im Folgenden soll die in Abbildung 3 gezeigte Situation untersucht werden. Die Elektronen bewegen sich in einem Kreisring mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2 mit $R_2 - R_1 \ll R_1$. Zwischen innerem und äußerem Radius ist eine Spannung U angelegt. Nimm an, dass die Spannung zu einem radialen elektrischen Feld mit konstanter Feldstärke E in dem Kreisring führt. Senkrecht zu dem Kreisring verläuft ein magnetisches Feld der konstanten Flussdichte B. Die Elektronen bewegen sich aufgrund des Magnetfeldes auf quantisierten Zyklotronorbits, deren Radius als sehr viel kleiner als der Abstand $R_2 - R_1$ angenommen werden kann.

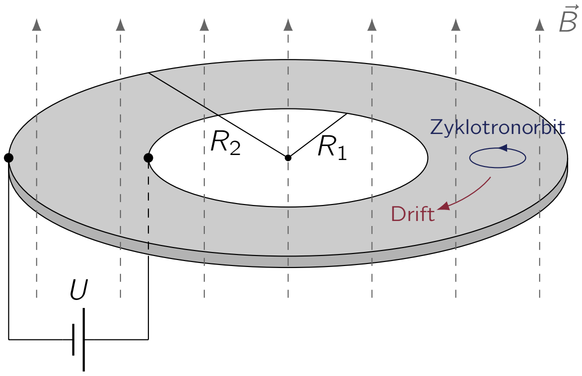

Abbildung 3: *Nicht maßstabsgerechte Skizze des betrachteten Kreisringes, in dem sich die Elektronen bewegen.*

Die Zyklotronorbits können nun selbst als Teilchen der Ladung $-e$ (Elektronenladung) und Masse m (Elektronenmasse) aufgefasst werden. Aufgrund des Drifts in den Feldern bewegen sie sich entlang des Kreisringes auf so genannten Driftorbits. Auch diese Orbits lassen sich quantisieren.

2.j) Nutze die Bohrsche Quantisierungsbedingung und zeige, dass für sehr schwache elektrische Felder die zulässigen Radien R_ℓ mit $\ell \in \mathbb{N}$ der Driftorbits gegeben sind durch $R_\ell = \sqrt{\frac{h\,\ell}{\pi\, e\, B}}$. *(2 Pkt.)*

2.k) Nimm an, dass die Elektronen nur das niedrigste, von Null verschiedene Energieniveau der Zyklotronorbits besetzen und dass alle in dem Kreisring möglichen Driftorbits gefüllt sind. Auf jedem Driftorbit befindet sich dann genau ein Elektron. Bestimme die Stromstärke I_H des entlang des Kreisringes fließenden Stromes als Funktion der Spannung U. Vernachlässige dabei die Bewegung der Elektronen in Richtung des elektrischen Feldes. Bestimme daraus die Klitzing-Konstante R_K und vergleiche dein Ergebnis mit dem ersten Aufgabenteil. *(4 Pkt.)*

Aufgabe 3 Experimentelle Aufgabe - Nichts als Luft (20+20 Pkt.)

Für ein ideales Gas[4] stellt die auch als allgemeine Gasgleichung bezeichnete Zustandsgleichung

$$pV = nRT$$

einen Zusammenhang zwischen dem Druck p, dem Volumen V, der Stoffmenge n und der Temperatur T des Gases her. Die Größe $R \approx 8{,}31\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$ bezeichnet dabei die universelle Gaskonstante. Luft kann in guter Näherung als ideales Gas betrachtet werden. In dieser Aufgabe sollst du zwei Experimente mit Luft durchführen und so den thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten von Luft sowie den Luftdruck bestimmen.

Die Experimente sind als Hausexperimente gedacht. Du solltest daher nicht auf die komplette Ausstattung der Schulsammlung zurückgreifen, sondern dir selbst einen geeigneten Versuchsaufbau überlegen. Neben Luft kannst du dafür die folgenden Materialien für die Experimente verwenden: Thermometer, verschiedene Gefäße, Schläuche, Stopfenmaterial zum Verschließen der Schläuche, Lineal, Zollstock bzw. Gliedermaßstab, Klebeband, warmes und kaltes Wasser sowie andere, haushaltstypische Gegenstände. Verwende bitte nur die angegebenen Materialien. Andernfalls kann es zu einem Punktabzug kommen.

Allgemeine Hinweise zur experimentellen Aufgabe

- Führe alle Versuche so durch, dass die Ergebnisse so genau wie möglich sind. Beachte, dass die Ergebnisse in der Regel genauer werden, wenn du deine Ergebnisse aus Messreihen anstatt von Einzelmessungen bestimmst.
- Beschreibe und dokumentiere dein Vorgehen so ausführlich, dass jeder Schritt gut nachvollziehbar ist. Skizziere insbesondere deine Versuchsaufbauten.
- Schätze außerdem die Fehler aller Ergebnisse sinnvoll ab.

3.1 Volumenausdehnung

Wird ein Gas erwärmt, so dehnt es sich aus. Für Änderungen ΔT der Temperatur, die klein gegen die Ausgangstemperatur T sind, ist die Änderung ΔV des Gasvolumens bei konstantem Druck ungefähr proportional zu ΔT und zum Gasvolumen V bei der Temperatur T. Es gilt also:

$$\Delta V \approx \gamma V \, \Delta T\,.$$

Die Größe γ ist der thermische Volumenausdehnungskoeffizient, den du für diese Aufgabe im Bereich von $\pm 20\,°\mathrm{C}$ um die Zimmertemperatur als konstant annehmen kannst.

3.a) Bestimme experimentell den thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten von Luft bei Zimmertemperatur. Leite einen Ausdruck für den theoretisch bei einem idealen Gas zu erwartenden Wert ab und vergleiche ihn mit deinem Ergebnis. *(20 Pkt.)*

3.2 Luftdruck

3.b) Bestimme experimentell den Luftdruck und vergleiche deinen Wert mit dem aktuellen Luftdruck am Versuchsort. Letzteren kannst du entweder im Internet recherchieren oder mit Hilfe eines weiteren Luftdruckmessers bestimmen. *(20 Pkt.)*

Du kannst für die Schwerebeschleunigung auf der Erde den Wert $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ und für die Dichte von Wasser $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ verwenden.

[4] Ein ideales Gas bezeichnet eine idealisierte Modellvorstellung eines Gases, bei der die Gasteilchen als punktförmig angenommen werden und sich, abgesehen von Stößen, frei bewegen können. Viele Gase verhalten sich in guter Näherung wie ideale Gase.