

# **44. Internationale PhysikOlympiade**

## **Kopenhagen, Dänemark 2013**



### **Wettbewerbsleitung**

Dr. Stefan Petersen  
Tel.: 0431 / 880 - 5120  
email: [petersen@ipho.info](mailto:petersen@ipho.info)

### **Sekretariat**

Lulu Hoffmeister  
Tel.: 0431 / 880 - 5387  
email: [sekretariat@ipho.info](mailto:sekretariat@ipho.info)

Anschrift: IPN an der Universität Kiel  
Olshausenstraße 62  
24098 Kiel

Fax: 0431 / 880 - 3148

Webseite: [www.ipho.info](http://www.ipho.info)

**Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im  
Auswahlwettbewerb für die 44. IPhO 2013**

**Aufgabe 1 Black-Boxen**
**(17 Pkt.)**
*Lösung*

- a) Aus den gegebenen Informationen folgt, dass es sich bei den ersten beiden Schaltungen um  $LC$ -Schwingkreise handelt. Das Verhalten von Box **A** kann nur durch einen Parallelschwingkreis mit Widerstand in Serie repliziert werden (vgl. auch Abb. 2). Für dessen Impedanz als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  gilt:

$$Z_A = R + \frac{\frac{L}{C}}{i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = R + i \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}. \quad (1.1)$$

Würde der Widerstand in einem der Parallelzweige liegen, wäre das gesuchte Verhalten für sehr hohe bzw. sehr niedrige Kreisfrequenzen nicht darstellbar. Für diese Schaltung ist  $R_0 = R$  und die Kreisfrequenz  $\omega_0$  entspricht der Resonanzfrequenz  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$  des Schwingkreises. Da die Schaltung in Box **B** sowohl bei sehr kleinen als auch bei sehr großen Kreisfrequenzen sperrt, handelt es sich in diesem Fall um einen Serienschwingkreis mit einem in Reihe geschalteten Widerstand. Die Impedanz ist daher gegeben durch

$$Z_B = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (1.2)$$

Eine Vertauschung der Reihenfolge der Bauelemente führt zu keiner qualitativ anderen Schaltung und wird daher als äquivalent betrachtet.

Das Verhalten von Box **C** kann durch verschiedene Schaltungen erreicht werden. Zunächst kann festgehalten werden, dass keines der nichtohmschen Elemente (Kondensator und Spule) direkt zwischen den Anschlüssen in einer Serien- oder Parallelschaltung verbaut sein kann, da dies zu einem beliebig hohen oder verschwindend kleinen Widerstand bei niedrigen bzw. hohen Frequenzen führen würde. Analog kann auch keiner der ohmschen Widerstände in dieser Art verbaut sein, da ansonsten der Gesamtwiderstand der Schaltung entweder größer oder kleiner  $R = R_0$  wäre. Damit muss die Schaltung eine Kombination aus Parallel- und Serienschaltungen der einzelnen Elemente sein. In Frage kommen daher die beiden in Abbildung 1 skizzierten Schaltungstypen.

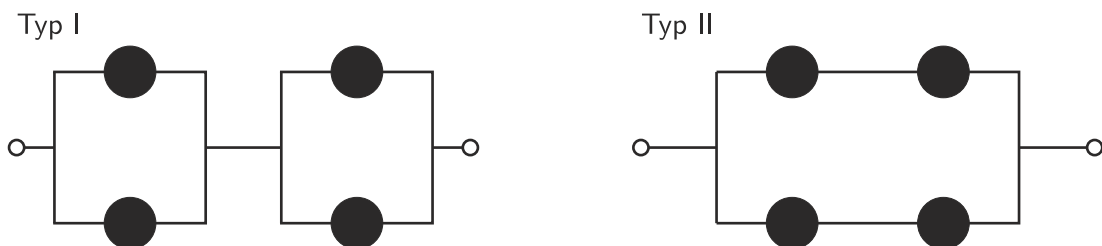


Abb. 1: Skizze der beiden möglichen Schaltungstypen in der Black-Box **C**. Die gefüllten Kreise stehen dabei für ein beliebiges Bauelement (Widerstand, Kondensator oder Spule).

Die möglichen Schaltungen lassen sich nach der Anzahl der nichtohmschen Elemente klassifizieren. Bei der ausschließlichen Verwendung von Widerständen sind beide Schaltungstypen möglich (vgl. Abb. 2). Mit diesen Schaltungen lassen sich aber die im nächsten Aufgabenteil gesuchten Kennwerte der Bauelemente nicht bestimmen, da die Resonanzfrequenz nur Informationen zu dem Produkt  $L \cdot C$  liefert und hier keine weiteren Informationen gewonnen werden können.

Eine Schaltung mit einem, drei oder vier nichtohmschen Elementen ist nicht möglich, da dann bei beiden Schaltungstypen die beobachtete Konstanz des Widerstandes bei hohen und/oder niedrigen Kreisfrequenzen nicht erzielt werden kann. Wenn es weitere mögliche Schaltungen gibt, müssen in diesen also zwei nichtohmsche Bauelemente enthalten sein. Dies können mit der gleichen Argumentation nicht zwei identische sein, so dass die in diesem Fall möglichen Schaltungen

zwei Widerstände, einen Kondensator und eine Spule enthalten müssen. Spule und Kondensator dürfen darüber hinaus nicht direkt in Serie oder parallel verbaut sein, da sie ansonsten ungedämpfte Schwingkreise bilden würden. Die verbleibenden beiden Schaltungsmöglichkeiten sind in der unteren Zeile der Abbildung 2 skizziert.

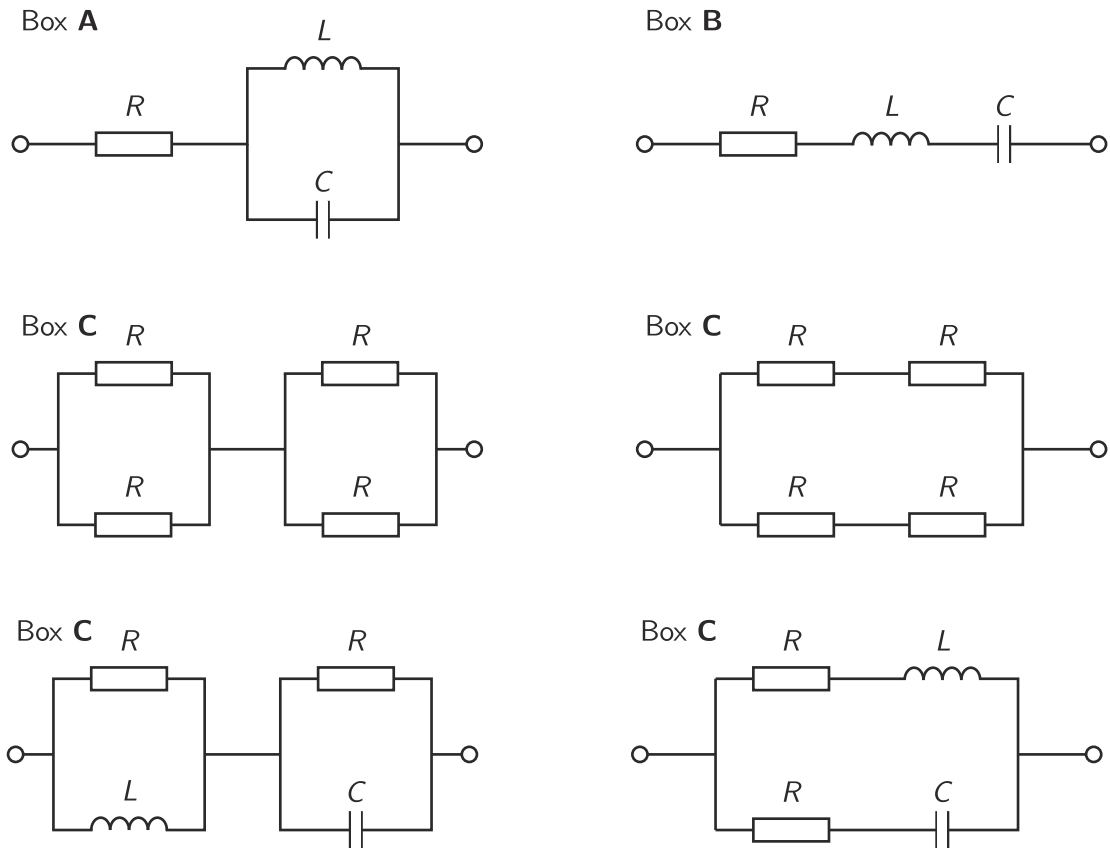


Abb. 2: Schaltskizzen für die drei Black-Boxen. Für die Box C sind die vier Schaltungsmöglichkeiten angegeben.

Die Impedanz der linken unteren Schaltung in Abbildung 2 ist gegeben durch

$$Z_{C_1} = \frac{iR\omega L}{R + i\omega L} - \frac{\frac{iR}{\omega C}}{R - i\frac{1}{\omega C}} = R \frac{2\frac{L}{C} + iR(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R^2 + \frac{L}{C} + iR(\omega L - \frac{1}{\omega C})}. \quad (1.3)$$

Man erkennt, dass die Kreisfrequenzabhängigkeit für  $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$  verschwindet und die Impedanz in diesem Fall gegeben ist durch  $Z_{C_1} \equiv R = R_0$ . Die Impedanz der rechten Schaltung hingegen ist

$$Z_{C_2} = \frac{(R + i\omega L)(R + \frac{1}{i\omega C})}{2R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{R \left\{ 2R^2 + 2\frac{L}{C} + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 \right\} + i(R^2 - \frac{L}{C})(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{4R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}. \quad (1.4)$$

Ebenfalls für  $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$  verschwindet die Kreisfrequenzabhängigkeit und es ergibt sich der verlangte Wert  $Z_{C_2} \equiv R = R_0$ . Damit lässt sich das beobachtete Verhalten auch mit diesen beiden Schaltungen darstellen.

- b) Bei Verwendung einer der unteren Schaltungen für die Box **C** gelten mit den Betrachtungen aus dem vorigen Aufgabenteil

$$R_0 = R, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{sowie} \quad R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.5)$$

Mit  $R_0 = 100 \Omega$  und  $\omega_0 = 40,0 \text{ kHz}$  ergeben sich daraus die gesuchten Größen zu

$$R = R_0 = 100 \Omega, \quad L = \frac{R_0}{\omega_0} = 2,50 \text{ mH} \quad \text{sowie} \quad C = \frac{1}{\omega_0 R_0} = 250 \text{ nF}. \quad (1.6)$$

- c) Bei dem Hintereinanderschalten der Boxen **A** und **B** ergibt sich mit (1.1) und (1.2) eine Impedanz  $Z_{A+B}$  von

$$Z_{A+B} = 2R + i \left( \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} + \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 2R - i \left( \frac{\omega^3 L^2 C - 3\omega L + \frac{1}{\omega C}}{1 - \omega^2 LC} \right). \quad (1.7)$$

Damit der Scheinwiderstand der Schaltung  $2R_0 = 2R$  entspricht, muss der Imaginärteil der Impedanz verschwinden. Es muss also gelten:

$$0 \stackrel{!}{=} \omega^4 - 3\omega^2 \frac{1}{LC} + \frac{1}{L^2 C^2}. \quad (1.8)$$

Damit ergeben sich die beiden möglichen Kreisfrequenzen, bei denen der Widerstand der Serienschaltung gerade  $2R$  ist, aus dieser biquadratischen Gleichung zu

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2LC}}, \quad (1.9)$$

und es ist  $\omega_1 \approx 1,618 \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 64,7 \text{ kHz}$  sowie  $\omega_2 \approx 0,618 \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 24,7 \text{ kHz}$ .

**Aufgabe 2 Rotierende Flüssigkeiten****(23 Pkt.)***Lösung*

- a) Da die Winkelgeschwindigkeit langsam erhöht wird, kann angenommen werden, dass die gesamte Flüssigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert. Die Form der Flüssigkeitsoberfläche stellt sich dann so ein, dass die Summe der auf ein kleines Volumenelement an der Oberfläche wirkenden Gravitationskraft  $\vec{F}_G$  und der dazu senkrechten, aus der Rotationsbewegung resultierenden Zentrifugalkraft  $\vec{F}_Z$  senkrecht zur Oberfläche ist<sup>1</sup>. Wäre dies nicht der Fall, würde sich das Element entlang der Oberfläche verschieben und diese würde ihre Form verändern.

Es muss also gelten:

$$\tan \alpha = \frac{|\vec{F}_Z|}{|\vec{F}_G|} = \frac{\omega^2 x}{g}, \quad (2.1)$$

wobei  $\alpha$  den Steigungswinkel  $dy/dx$  der Funktion  $y(x)$  bezeichnet und  $x$  den Abstand zur Rotationsachse angibt. Damit ergibt sich für die Höhe des Flüssigkeitsspiegels durch Lösen der Differentialgleichung

$$y(x) = y(0) + \frac{\omega^2}{2g} x^2. \quad (2.2)$$

Die noch unbekannte Integrationskonstante  $y(0)$  lässt sich für kleine Rotationsfrequenzen aus der Erhaltung des Gesamtflüssigkeitsvolumens bestimmen:

$$\pi R^2 y_i \stackrel{!}{=} \int_0^R dx 2\pi x y(x) = \pi R^2 y(0) + \frac{\pi \omega^2}{4g} R^4, \quad (2.3)$$

so dass  $y(0) = y_i - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$ . Damit lässt sich die Höhe des Flüssigkeitsspiegels angeben als

$$y(x) = y_i + \frac{\omega^2}{2g} \left( x^2 - \frac{R^2}{2} \right). \quad (2.4)$$

Die Oberfläche nimmt also die Form eines Rotationsparaboloids an. Der Ausdruck (2.4) gilt allerdings nur, solange die Oberfläche der Flüssigkeit den Gefäßboden noch nicht berührt. Dies passiert auf der Rotationsachse bei einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$ , für die gilt

$$\frac{\omega'^2 R^2}{4g} = y_i, \quad \text{bzw.} \quad \omega' = \frac{2}{R} \sqrt{g y_i}. \quad (2.5)$$

Bei dieser Winkelgeschwindigkeit ist die Maximalhöhe der Flüssigkeit im Glas gegeben durch

$$y(R) = y_i + \frac{\omega'^2 R^2}{4g} = 2y_i = 0,8H. \quad (2.6)$$

Der Flüssigkeitsspiegel erreicht also den Boden, bevor das Glas überläuft. Bei einer weiteren Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit bleibt ein kreisförmiger Teil der Bodenfläche frei von Flüssigkeit. Der Radius  $r$  der Kreisfläche wird nach (2.2) beschrieben durch die Bedingung

$$0 \stackrel{!}{=} y(0) + \frac{\omega^2}{2g} r^2, \quad \text{bzw.} \quad y(0) = -\frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad \text{mit} \quad \omega \geq \omega'. \quad (2.7)$$

<sup>1</sup>Alternativ kann man auch argumentieren, dass die von dem Flüssigkeitsvolumen senkrecht zur Flüssigkeit auf das Element ausgeübte Kraft die Gravitationskraft kompensieren und die Zentripetalkraft aufbringen muss.

Daher muss die aus der Erhaltung des Flüssigkeitsvolumens stammende Normierungsbedingung (2.3) in diesem Fall angepasst werden zu

$$\begin{aligned}
 \pi R^2 y_i &\stackrel{!}{=} \int_r^R dx \, 2\pi x y(x) \\
 &= \pi (R^2 - r^2) y(0) + \frac{\pi \omega^2}{4g} (R^4 - r^4) \\
 &= \frac{\pi \omega^2}{4g} (R^4 + r^4 - 2r^2 R^2) \\
 &= \frac{\pi \omega^2}{4g} (R^2 - r^2)^2.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Es ist also in diesem Fall  $R^2 - r^2 = \sqrt{4gR^2 y_i / \omega^2}$ , bzw.

$$r = \sqrt{R^2 - \sqrt{\frac{4gR^2 y_i}{\omega^2}}}. \tag{2.9}$$

Damit wird die Flüssigkeitsoberfläche für  $\omega \geq \omega'$  beschrieben durch die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq x < r \\ \frac{\omega^2}{2g} (x^2 - r^2) & : r \leq x \leq R \end{cases}. \tag{2.10}$$

Die maximale Füllhöhe wird nach wie vor am Rand bei  $x = R$  erreicht. Die Grenzbedingung für das Überlaufen ist somit

$$H \stackrel{!}{=} y(R) = \frac{\omega^2}{2g} (R^2 - r^2) = \frac{\omega^2}{2g} \sqrt{\frac{4gR^2 y_i}{\omega^2}} = \omega R \sqrt{\frac{y_i}{g}}. \tag{2.11}$$

Damit ergibt sich schließlich für die maximal mögliche Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{\max}$  bis zum Überlaufen<sup>2</sup>

$$\omega_{\max} = \frac{H}{R} \sqrt{\frac{g}{y_i}} \approx 18 \text{ s}^{-1}. \tag{2.12}$$

- b) Die Oberflächen der beiden Flüssigkeiten lassen sich über die Betrachtung des Druckes innerhalb der Flüssigkeiten bestimmen. In einer horizontalen Schnittebene durch eine rotierende Flüssigkeit muss der Druck  $p$  mit dem Abstand zur Drehachse zunehmen und zwar so, dass die durch den horizontalen Druckgradienten verursachte Kraft auf ein Volumenelement der Flüssigkeit gerade der Zentripetalkraft entspricht, die notwendig ist, um das Element auf einer Kreisbahn zu halten. Für ein kleines Volumenelement in einem Abstand  $x$  zur Drehachse, das eine Ausdehnung  $\Delta x$  entlang der Verbindungslinie zur Achse und eine Fläche  $\Delta A$  dazu senkrecht besitzt, muss demnach also für die Druckdifferenz  $\Delta p$  zwischen den beiden Oberflächen senkrecht zur Verbindungslinie zur Achse gelten:

$$\Delta p \Delta A = \rho \Delta A \Delta x \omega^2 x \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta p}{\Delta x} = \rho \omega^2 x, \tag{2.13}$$

wobei  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet. Der Druck wird durch die über dem Element vorhandene Flüssigkeitsschicht verursacht.

<sup>2</sup>Ohne Berücksichtigung der Tatsache, dass der Boden nicht mehr bedeckt ist, erhält man aus (2.4) einen Wert von  $\omega_{\max} = 2 \sqrt{g(H - y_i)} / R \approx 17 \text{ s}^{-1}$ .

Betrachtet man zunächst die obere Flüssigkeit mit Dichte  $\rho_2$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2$  und Flüssigkeitsoberflächenhöhe  $y_2(x)$ , so lässt sich Gleichung (2.13) im Grenzfall eines infinitesimalen Volumenelementes differentiell schreiben als

$$\frac{dp_2}{dx} = \rho_2 g \frac{dy_2(x)}{dx} = \rho_2 \omega_2^2 x. \quad (2.14)$$

Dies ist die gleiche Differentialgleichung wie in (2.1). Die Flüssigkeitsoberfläche der oberen Flüssigkeit wird also analog zu dem vorherigen Aufgabenteil beschrieben durch<sup>3</sup>

$$y_2(x) = y_{2i} + \frac{\omega_2^2}{2g} \left( x^2 - \frac{R^2}{2} \right). \quad (2.15)$$

Hierbei wurde zur Bestimmung der bei der Integration von (2.14) auftretenden Konstanten eine Normierungsbedingung wie in (2.3) verwendet.

Bei der Untersuchung der unteren Flüssigkeit muss beachtet werden, dass der Schweredruck einen Anteil hat, der von dem über einem Element befindlichen Volumen der oberen Flüssigkeit stammt. Daher ist in diesem Fall

$$\frac{dp_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \rho_1 g y_1(x) + \rho_2 g (y_2(x) - y_1(x)) \right) = \rho_1 \omega_1^2 x. \quad (2.16)$$

Daraus ergibt sich mit (2.15) die Differentialgleichung

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{\rho_1 \omega_1^2 - \rho_2 \omega_2^2}{g(\rho_1 - \rho_2)} x. \quad (2.17)$$

Damit folgt für die Höhe  $y_1$  des unteren Flüssigkeitsspiegels ganz analog

$$y_1(x) = y_{1i} + \frac{\rho_1 \omega_1^2 - \rho_2 \omega_2^2}{2g(\rho_1 - \rho_2)} \left( x^2 - \frac{R^2}{2} \right). \quad (2.18)$$

Die Gleichungen (2.15) und (2.18) sind, wie in der Aufgabenstellung angegeben, nur gültig, bis sich die Flüssigkeitsoberflächen berühren, eine der Flächen bis zum Boden reicht oder die obere Flüssigkeit den Rand des Gefäßes erreicht.

- c) Die zu betrachtenden Fälle können mit den gerade abgeleiteten Ausdrücken untersucht werden.
- i. Für  $\omega_1 = 0$  sind die Formen der Flüssigkeitsoberflächen gegeben durch

$$y_2(x) = y_{2i} + \frac{\omega_2^2}{2g} \left( x^2 - \frac{R^2}{2} \right), \quad \text{bzw.} \quad y_1(x) = y_{1i} - \frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \frac{\omega_2^2}{2g} \left( x^2 - \frac{R^2}{2} \right). \quad (2.19)$$

Die Oberfläche der unteren Flüssigkeit ist also so gekrümmt, dass sie ihre maximale Höhe auf der Rotationsachse annimmt. Die einzelnen in dem vorherigen Aufgabenteil genannten Einschränkungen würden nach (2.19) bei den folgenden Winkelgeschwindigkeiten  $\tilde{\omega}_2$  verletzt:

Gegenseitige Berührung	$\tilde{\omega}_2 = \sqrt{\frac{4g(\rho_1 - \rho_2)(y_{2i} - y_{1i})}{R^2 \rho_1}} \approx 5,4 \text{ s}^{-1},$	
Bodenkontakt	$\tilde{\omega}_2 = \sqrt{\frac{4g(\rho_1 - \rho_2)y_{1i}}{R^2 \rho_2}} \approx 7,0 \text{ s}^{-1},$	(2.20)
Überlaufen des Glases	$\tilde{\omega}_2 = \sqrt{\frac{4g}{R^2} (H - y_{2i})} \approx 12,0 \text{ s}^{-1}.$	

<sup>3</sup>Die Analogie ist nicht weiter überraschend, da es für die Oberflächenform der oberen Flüssigkeit irrelevant ist, welche Form die darunter liegende Flüssigkeitsoberfläche einnimmt.

Die Flüssigkeiten werden sich also als erstes berühren und damit ist  $\tilde{\omega}_2 \approx 5,4 \text{ s}^{-1}$ . Der linke Graph in Abbildung 3 zeigt eine Skizze der Oberflächen für diesen Fall.

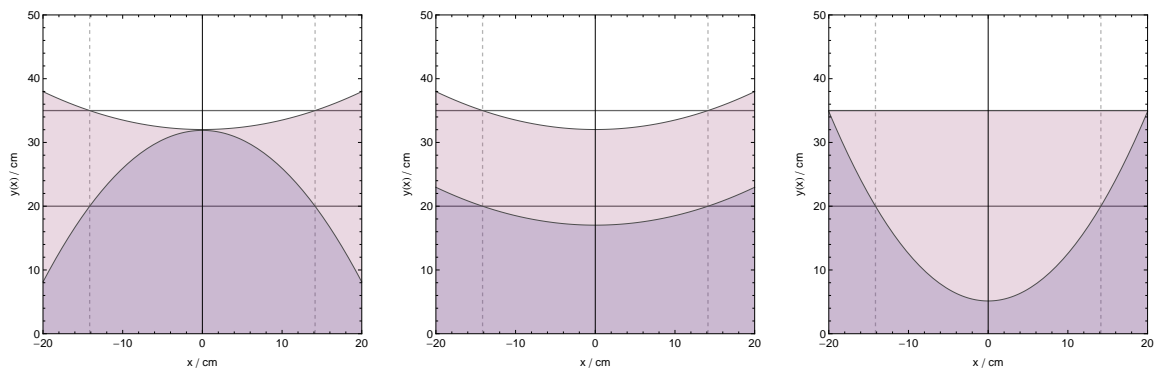


Abb. 3: Graphen mit den Formen der Flüssigkeitsoberflächen für  $\omega_2 = \tilde{\omega}_2$ ,  $\omega_1 = 0$  (links),  $\omega_2 = \tilde{\omega}_2 = \omega_1$  (Mitte) sowie  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_1 = \tilde{\omega}_2$  (rechts).

- ii. Wenn beide Flüssigkeiten mit der gleichen Geschwindigkeit  $\tilde{\omega}_2$  rotieren, werden die Oberflächen beschrieben durch

$$y_2(x) = y_{2i} + \frac{\tilde{\omega}_2^2}{2g} \left( x^2 - \frac{R^2}{2} \right), \quad \text{bzw.} \quad y_1(x) = y_{1i} + \frac{\tilde{\omega}_2^2}{2g} \left( x^2 - \frac{R^2}{2} \right). \quad (2.21)$$

Die beiden Oberflächen besitzen also für jedes  $x$  die gleiche Steigung und der Abstand der beiden Oberflächen ist konstant  $y_{2i} - y_{1i} = 15 \text{ cm}$ . Der Verlauf ist ebenfalls in Abbildung 3 skizziert.

- iii. Im letzten Fall sind

$$y_2(x) = y_{2i} \quad \text{und} \quad y_1(x) = y_{1i} + \frac{\rho_1 \omega_1^2}{2g(\rho_1 - \rho_2)} \left( x^2 - \frac{R^2}{2} \right), \quad (2.22)$$

wobei  $0 \leq \omega_1 \leq \tilde{\omega}_2$ . Die maximale Steighöhe erreicht die untere Flüssigkeit am Glasrand und bei möglichst großer Winkelgeschwindigkeit, hier also bei der Geschwindigkeit  $\omega_1 = \tilde{\omega}_2$ . In diesem Fall ist

$$y_1(R) = y_{1i} + \frac{\rho_1 \tilde{\omega}_2^2 R^2}{4g(\rho_1 - \rho_2)} = y_{2i} = 35 \text{ cm}, \quad (2.23)$$

wobei wir uns (2.20) zunutze gemacht haben. Auch dieser Fall ist in 3 dargestellt. Im Vergleich zur Form der Flüssigkeitsoberfläche aus Aufgabenteil a) ist in diesem Fall die Oberfläche stärker gekrümmt. Die Steigung ist aufgrund des Schweredruckes der darüberliegenden Flüssigkeit um einen Faktor  $\rho_1/(\rho_1 - \rho_2)$  größer.



**Aufgabe 3 Schrottturm**
**(25 Pkt.)**
*Lösung*

Für einen Fall in Luft ist die Fallgeschwindigkeit  $v$  durch die Newtonsche Reibung begrenzt, die zu einer abbremsenden Kraft gemäß

$$F_R = -\frac{1}{2} c_W A \rho_{\text{Luft}} v^2 \quad (3.1)$$

führt. Hierbei ist  $c_W$  der Widerstandsbeiwert des fallenden Körpers, der für eine Kugel bei nicht zu hohen Strömungsgeschwindigkeiten einen Wert von etwa 0,45 besitzt<sup>4</sup>. Mit  $A = \frac{\pi}{4} D^2$  wird die angeströmte Querschnittsfläche bezeichnet. Wenn die Reibungskraft gerade die Gewichtskraft der Kugel kompensiert, wird die Kugel nicht weiter beschleunigt und damit gilt für die Grenzhgeschwindigkeit  $v_f$

$$\frac{1}{2} c_W A \rho_{\text{Luft}} v_f^2 = \frac{\pi}{6} D^3 \rho_{\text{Pb}} g, \quad \text{bzw.} \quad v_f = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{D \rho_{\text{Pb}} g}{c_W \rho_{\text{Luft}}}} \approx 32 \text{ m s}^{-1}. \quad (3.2)$$

Mit diesem Wert lässt sich der in der Aufgabenstellung gegebene Graph auch auf tatsächliche Geschwindigkeiten skalieren. Alternativ kann man die Skalierung des Graphen und damit die Grenzhgeschwindigkeit auch durch die Annahme eines anfänglichen freien Falls und die Steigung des Graphen im Ursprung bestimmen.

- a) Die Nusselt-Zahl gibt das Verhältnis des aus konvektiven und Wärmeleitungsanteilen bestehenden Wärmestromes zu der mittleren Wärmeleitungsleistung an und ist somit geeignet, die Anteile der Konvektion mit denen der Wärmeleitung zu vergleichen. Mit der Grenzhgeschwindigkeit (3.2) und den gegebenen Daten ergeben sich folgende Werte für die Nusselt-Zahl:

$$\text{Nu} \approx 91 \text{ bei } v = v_f, \quad \text{Nu} \approx 23 \text{ bei } v = 10\% v_f, \quad \text{Nu} \approx 15 \text{ bei } v = 5\% v_f. \quad (3.3)$$

Damit ist der Anteil der Wärmeleitung zu dem Wärmestrom deutlich geringer als der Anteil der Konvektion.

Die Nusselt-Zahl erlaubt es darüber hinaus, den Koeffizienten  $\alpha$  in der gegebenen Formel für den Wärmestrom auszudrücken durch

$$\alpha = \frac{\lambda_{\text{Luft}} \text{Nu}}{D} = 0,37 \frac{\lambda_{\text{Luft}}}{D} \left( \frac{\rho_{\text{Luft}} v D}{\eta_{\text{Luft}}} \right)^{3/5}. \quad (3.4)$$

Damit lässt sich der Wärmestrom mit der durch Strahlung nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz von einem Kügelchen abgegebenen Leistung vergleichen:

$$\frac{P_{\text{K+W}}}{P_S} = \frac{\alpha A (T - T_0)}{\varepsilon \sigma A (T^4 - T_0^4)} = \frac{0,37 \frac{\lambda_{\text{Luft}}}{D} \left( \frac{\rho_{\text{Luft}} v D}{\eta_{\text{Luft}}} \right)^{3/5}}{\varepsilon \sigma (T^2 + T_0^2) (T + T_0)}. \quad (3.5)$$

Hierbei bezeichnen  $\varepsilon$  den Emissionsgrad der Bleikügelchen und  $\sigma$  die Stefan-Boltzmann-Konstante. Beachte, dass  $A = \pi D^2$  in diesem Fall die Gesamtoberfläche des Kügelchens bezeichnet. Zur Abschätzung des minimalen Wertes dieses Verhältnisses kann  $\varepsilon = 1$  sowie  $T = T_{\text{Pb}}$  angenommen werden, womit sich die folgenden Werte für das Verhältnis ergeben:

$$\frac{P_{\text{K+W}}}{P_S} \approx 26 \text{ bei } v = v_f, \quad \frac{P_{\text{K+W}}}{P_S} \approx 10 \text{ bei } v = 20\% v_f, \quad \frac{P_{\text{K+W}}}{P_S} \approx 6,6 \text{ bei } v = 10\% v_f. \quad (3.6)$$

Der Beitrag der Wärmestrahlung bei der Abkühlung der Bleikügelchen ist also ebenfalls deutlich geringer als der durch Konvektion bedingte. Daher beschränken wir uns im Folgenden nur noch auf eine Wärmeabgabe, wie sie durch die Formel für den Wärmestrom beschrieben wird.

<sup>4</sup>Der  $c_W$ -Wert ist näherungsweise konstant für turbulente Strömungen bis zu einer Reynoldszahl von etwa  $3 \cdot 10^5$ , was bei dem gegebenen Kugeldurchmesser einer Geschwindigkeit von etwa  $100 \text{ m s}^{-1}$  entspricht (s. z.B. Meschede, D. (2006). *Gerthsen Physik* (23. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer).

**b) Vorüberlegung zur Wärmeabgabe**

Betrachte zunächst den Fall eines Kugelchens bis es erstarrt ist. Da Blei ein relativ guter Wärmeleiter ist, wird angenommen, dass das gesamte Kugelchen die gleiche Temperatur besitzt. Die bis zur Erstarrung abzugebende Wärmeenergie  $\Delta Q_1$  berechnet sich mit Hilfe der spezifischen Schmelzwärme  $\kappa_{\text{Pb}}$  zu

$$\Delta Q_1 = \frac{\pi}{6} D^3 \rho_{\text{Pb}} \kappa_{\text{Pb}}. \quad (3.7)$$

Diese Wärmeenergie muss durch den Wärmestrom abgeführt werden, d.h. es muss

$$\frac{\pi}{6} D^3 \rho_{\text{Pb}} \kappa_{\text{Pb}} = \int_0^{t_1} dt \alpha \pi D^2 (T_{\text{Pb}} - T_0) \quad (3.8)$$

gelten.  $t_1$  bezeichnet dabei die Fallzeit bis zum Erstarren. Die Temperatur bleibt während dieses Abschnittes konstant. Durch Einsetzen von  $\alpha$  wie in (3.4) ergibt sich aus obiger Gleichung

$$\int_0^{t_1} dt v^{\frac{3}{5}} = \frac{\rho_{\text{Pb}} \kappa_{\text{Pb}} \eta_{\text{Luft}}^{\frac{3}{5}} D^{\frac{7}{5}}}{2,22 \cdot \lambda_{\text{Luft}} \rho_{\text{Luft}}^{\frac{3}{5}} (T_{\text{Pb}} - T_0)} \approx 7,7 \text{ m}^{\frac{3}{5}} \text{ s}^{\frac{2}{5}} =: C_1. \quad (3.9)$$

Zur Bestimmung der Fallzeit  $t_1$  und damit der Fallhöhe  $y_1$  bis zum Erstarren muss also das Integral auf der linken Seite ausgewertet werden.

Eine ähnliche Situation ergibt sich beim Betrachten des weiteren Falles von  $t_1$  bis zur Zeit  $t_2$  zu der das Kugelchen nach einer Gesamtfallstrecke  $y_2$  ins Wasser fällt. Der Wärmestrom führt hier zu einer Abnahme der Temperatur der Kugelchen, für die die Leistungsbilanz

$$\alpha \pi D^2 (T - T_0) = -\frac{\pi}{6} D^3 \rho_{\text{Pb}} c_{\text{Pb}} \frac{dT}{dt} \quad (3.10)$$

gilt. Daraus ergibt sich für das entsprechende Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} dt v^{\frac{3}{5}} = \frac{\rho_{\text{Pb}} c_{\text{Pb}} \eta_{\text{Luft}}^{\frac{3}{5}} D^{\frac{7}{5}}}{2,22 \cdot \lambda_{\text{Luft}} \rho_{\text{Luft}}^{\frac{3}{5}}} \int_{T_f}^{T_{\text{Pb}}} \frac{dT}{T - T_0} \\ = \frac{\rho_{\text{Pb}} c_{\text{Pb}} \eta_{\text{Luft}}^{\frac{3}{5}} D^{\frac{7}{5}}}{2,22 \cdot \lambda_{\text{Luft}} \rho_{\text{Luft}}^{\frac{3}{5}}} \ln \frac{T_{\text{Pb}} - T_0}{T_f - T_0} \\ \approx 18 \text{ m}^{\frac{3}{5}} \text{ s}^{\frac{2}{5}} =: C_2. \quad (3.11)$$

Hierbei wurde für die Endtemperatur beim Auftreffen auf das Wasser  $T_f = 100^\circ\text{C} \approx 373\text{K}$  verwendet.

**Bestimmung der Fallhöhen**

Die in Gleichungen (3.9) sowie (3.11) auftretenden Integrale und damit die für den Schrottturm mindestens notwendige Fallhöhe können auf unterschiedliche Arten näherungsweise bestimmt werden. So kann z.B. die Geschwindigkeit der Kugelchen anfänglich sehr gut durch die beim freien Fall genähert werden oder man kann eine mittlere Geschwindigkeit annehmen<sup>5</sup>. Genauer kann man die Integrale auswerten, wenn man aus dem gegebenen Graphen einen Graphen für

<sup>5</sup>Es ist anzumerken, dass das Ergebnis in diesem Aufgabenteil relativ robust gegenüber der verwendeten Näherung ist. Dies liegt zum Teil daran, dass sich Fehler aufgrund der Näherungen teilweise kompensieren. Nimmt man zum Beispiel an, die Kugelchen fallen frei, so unterschätzt man die Fallzeit, kommt aber unter Umständen dennoch auf ein gutes Ergebnis für die Fallstrecke, da die Fallgeschwindigkeit überschätzt wird. Selbst mit der sehr groben Näherung, dass sich das Kugelchen während des gesamten Falles mit der mittleren Geschwindigkeit  $v_f/2$  und einer mittleren Temperatur  $\frac{T_{\text{Pb}}+T_0}{2}$  bewegt, erhält man ein erstaunlich gutes Ergebnis.

$v^{\frac{3}{5}}$  konstruiert und daraus Graphen, die die benötigten integrierten Ausdrücke über der Zeit auftragen. Aus dem Graphen und mit (3.2) ergeben sich z.B. die in Tabelle 1 angegebenen Werte.

Tabelle 1: Aus dem Graphen abgelesene Werte für die Geschwindigkeit und konstruierte integrierte Werte.

$t / s$	$v / m s^{-1}$	$v^{\frac{3}{5}} / m^{\frac{3}{5}} s^{-\frac{3}{5}}$
0,0	0,0	0,0
0,5	4,9	2,6
1,0	9,5	3,9
2,0	17,5	5,6
3,0	23,2	6,6
4,0	26,9	7,2
5,0	29,1	7,6
6,0	30,4	7,8
7,0	31,1	7,9
8,0	31,5	7,9
9,0	31,7	8,0
10,0	31,8	8,0

$t / s$	$\int_0^t dt' v / m$	$\int_0^t dt' v^{\frac{3}{5}} / m^{\frac{3}{5}} s^{\frac{2}{5}}$
0,0	0,0	0,0
0,5	1,2	0,7
1,0	4,8	2,4
2,0	18,5	7,2
3,0	39,0	13,4
4,0	64,2	20,3
5,0	92,3	27,7
6,0	122	35,4
7,0	153	43,3
8,0	184	51,2
9,0	216	59,1
10,0	248	67,1

Die Werte in der rechten Tabelle wurden konstruiert, indem mit Hilfe der linken Tabelle Graphen für  $v$  und  $v^{\frac{3}{5}}$  als Funktion der Zeit angefertigt und diese graphisch integriert wurden. Abbildung 4 zeigt die resultierenden Graphen für die Geschwindigkeitsausdrücke und die integrierten Werte. Zum Vergleich ist jeweils der Verlauf für den freien Fall mit  $v = g t$  mit aufgetragen.

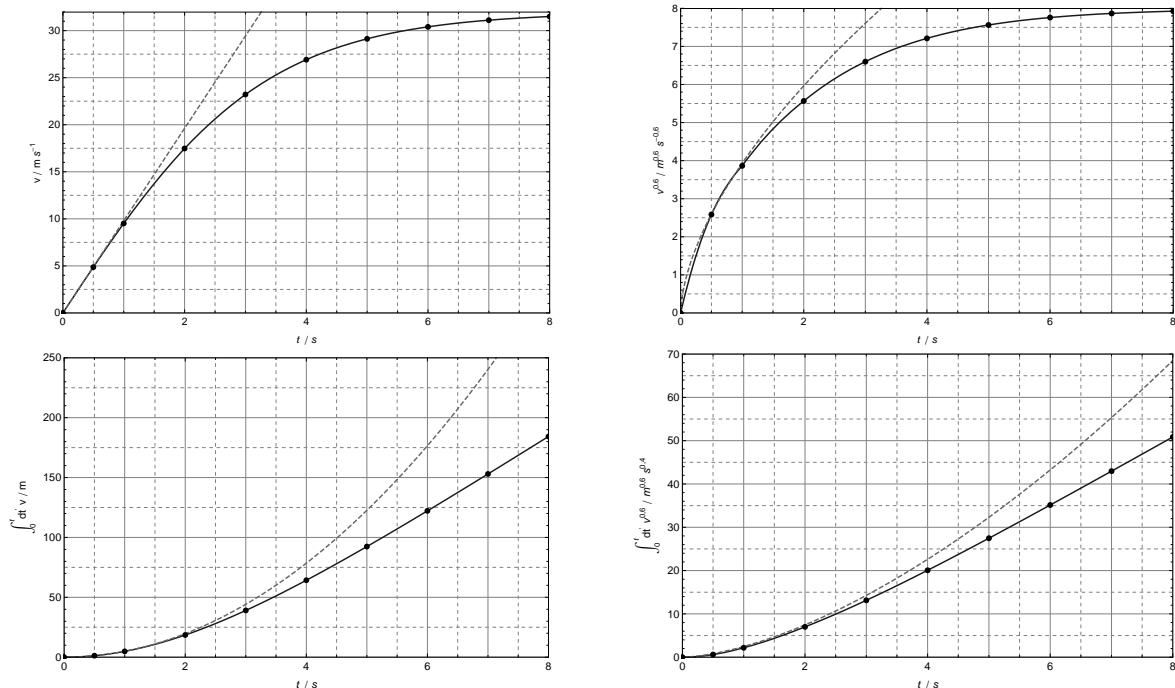


Abb. 4: Graphen für  $v$  und  $v^{\frac{3}{5}}$  (oben) sowie die integrierten Ausdrücke  $\int_0^t dt' v$  und  $\int_0^t dt' v^{\frac{3}{5}}$  (unten) als Funktion der Zeit. Gestrichelt ist der Verlauf für den freien Fall aufgetragen.

Aus dem unteren rechten Graphen in Abbildung 4 lassen sich die Fallzeiten  $t_1$  und  $t_2$  als die Zeiten ablesen, zu denen das Integral die Werte  $C_1$  bzw.  $C_1 + C_2$  aus Gleichung (3.9) bzw. (3.11) annimmt. Es ist:

$$t_1 \approx 2,1 \text{ s}, \quad t_2 \approx 4,8 \text{ s}. \quad (3.12)$$

Die dazugehörigen Fallstrecken lassen sich aus dem unteren linken Graphen, der als Integral der Geschwindigkeit die Fallstrecke als Funktion der Zeit angibt, ablesen zu

$$y_1 \approx 21 \text{ m}, \quad y_2 \approx 85 \text{ m}. \quad (3.13)$$

Nach einer Fallhöhe von etwa 21 m sind die Bleikügelchen also erstarrt und die minimale Gesamtfallhöhe des Turmes muss etwa 85 m betragen.

- c) Durch den aufwärts gerichteten Wind im Fallturm hat ein Kügelchen bereits zu Beginn des Falles eine Geschwindigkeit  $v_w$  bezüglich des Windes. In dem in der Aufgabenstellung gegebenen Graphen entspricht dies einer Verschiebung der vertikalen Achse um einen Offset  $\tilde{t}_0$ , der so gewählt wird, dass die Achse die Geschwindigkeitskurve bei  $v_w$  schneidet. Der so entstehende Graph gibt dann die Geschwindigkeit  $v$  des Kügelchens relativ zur Luft an. Die Geschwindigkeit gegenüber dem Boden ist um  $v_w$  geringer. Am unteren Ende der Fallstrecke, die eine Länge von  $y_2/2$  haben soll, muss gelten:

$$\left( \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_2} dt v \right) - v_w (\tilde{t}_2 - \tilde{t}_0) = \frac{y_2}{2} \approx 43 \text{ m}. \quad (3.14)$$

Hierbei ist  $v_w = v(\tilde{t}_0)$ . Leider sind aber sowohl  $\tilde{t}_0$  als auch  $\tilde{t}_2$  unbekannt, da sich die Fallzeit, die der Abkühlzeit der Bleikügelchen entspricht, durch den veränderten Luftstrom ebenfalls ändert. Die insgesamt abgeführte Wärme muss aber die gleiche sein, so dass in diesem Fall analog zum vorigen Aufgabenteil gelten muss:

$$\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_2} dt v^{\frac{3}{5}} = C_1 + C_2 \approx 26 \text{ m}^{\frac{3}{5}} \text{ s}^{\frac{2}{5}}. \quad (3.15)$$

Damit lässt sich die gesuchte Windgeschwindigkeit iterativ mit Hilfe der folgenden Schritte bestimmen:

- i. Wähle einen geratenen Wert für  $\tilde{t}_0$ .
- ii. Bestimme  $\tilde{t}_2$  aus dem unteren rechten Graphen in Abbildung 4 mit Hilfe von (3.15).
- iii. Bestimme  $v(\tilde{t}_0) = v_w$  aus dem oberen linken Graphen in Abbildung 4 oder dem in der Aufgabenstellung gegebenen Graphen als Schnittpunkt der um  $\tilde{t}_0$  verschobenen vertikalen Achse mit der Kurve.
- iv. Überprüfe mit Hilfe des linken unteren Graphen in 4, ob (3.14) mit den erhaltenen Werten für  $\tilde{t}_0$ ,  $\tilde{t}_2$  und  $v_w$  erfüllt ist. Wenn ja, ist die Windgeschwindigkeit gefunden. Ist dies nicht der Fall, beginne von vorne.

Folgende Werte wurden durch Ablesen aus den Graphen bestimmt:

Tabelle 2: Iterativ bestimmte Werte.

$\tilde{t}_0 / \text{s}$	$\tilde{t}_2 / \text{s}$	$v_w / \text{m s}^{-1}$	$\frac{y_2}{2} / \text{m}$	$\tilde{t}_0 / \text{s}$	$\tilde{t}_2 / \text{s}$	$v_w / \text{m s}^{-1}$	$\frac{y_2}{2} / \text{m}$
1,0	5,1	9,6	50	1,4	5,3	12,9	42
1,2	5,2	11,2	46	1,5	5,4	13,8	41
1,3	5,2	12,1	44	2,0	5,7	17,4	30

Der gesuchte Wert von  $y_2/2$  für die Fallstrecke wird daher bei einer Windgeschwindigkeit von etwa

$$v_w \approx 13 \text{ m s}^{-1} \quad (3.16)$$

erreicht<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Wenn man vereinfachend annimmt, dass die Fallzeit auch mit dem Wind die gleiche wie in dem vorigen Aufgabenteil ist und dass das Kügelchen relativ zur bewegten Luft frei fällt, ergibt sich aus  $v_w t_2 - \frac{g}{2} t_2^2 = -\frac{y_2}{2}$  eine Windgeschwindigkeit von  $v_w \approx 15 \text{ m s}^{-1}$

**Aufgabe 4 Experimentelle Aufgabe - Physik mit Wackelpudding**
**(35 Pkt.)**
*Lösung*

 a) **Theoretische Vorüberlegung**

Da ein Block Wackelpudding in Wasser langsam zu Boden sinkt, ist die Dichte des Wackelpuddings ein wenig höher als die von Wasser. Genauer lässt sich die Dichte mit Hilfe eines selbst gebauten Aräometers (oft auch Hydrometer genannt) bestimmen. Hierzu befestigt man Blöcke des Wackelpuddings an dem unteren Ende eines Trinkhalmes, so dass dieser möglichst aufrecht im Wasser schwimmt. Durch Messung der Eintauchtiefe des Strohhalmes in Abhängigkeit von dem Volumen des befestigten Wackelpuddings lässt sich dessen Dichte bestimmen.

Beim Schwimmen muss dabei nach dem archimedischen Prinzip die Gewichtskraft des als Halter verwendeten Strohhalmes (Masse  $m_{\text{Halter}}$ ) zusammen mit der Gewichtskraft des befestigten Wackelpuddings (Masse  $M_{\text{Wackel}} = V_{\text{Wackel}} \rho_{\text{Wackel}}$ ) gerade der Gewichtskraft des verdrängten Wassers entsprechen. Es muss also gelten:

$$(m_{\text{Halter}} + V_{\text{Wackel}} \rho_{\text{Wackel}}) g = \rho_{\text{H}_2\text{O}} (V_{\text{Halter}} + V_{\text{Wackel}}) g, \quad (4.1)$$

wobei  $V_{\text{Halter}}$  dem Volumen des unter Wasser befindlichen Halterteils entspricht. Dieses lässt sich über die Eintauchtiefe  $h$  des Trinkhalmes gemessen ab einer frei gewählten Eintauchtiefe  $h_0$  ausdrücken durch

$$V_{\text{Halter}} = \pi r^2 h + V_0. \quad (4.2)$$

Hierbei bezeichnen  $V_0$  das unter Wasser befindliche Volumen bei der Eintauchtiefe  $h_0$  und  $r$  den Außenradius des Trinkhalmes.

Damit lässt sich die Eintauchtiefe als lineare Funktion des befestigten Wackelpuddingvolumens darstellen:

$$h = \frac{1}{\pi r^2} \left( \frac{m_{\text{Halter}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} - V_0 + \left( \frac{\rho_{\text{Wackel}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} - 1 \right) V_{\text{Wackel}} \right). \quad (4.3)$$

Aus einer Bestimmung von  $h$  als Funktion des Wackelpuddingvolumens  $V_{\text{Wackel}}$  lässt sich somit die Dichte des Wackelpuddings bestimmen.

**Versuchsaufbau**

Für den Versuch wurde eine Wackelpuddingmischung aus dem Supermarkt verwendet, die gemäß der Packungsangabe vorbereitet und zum einen in einem Eiswürfelbehälter und zum anderen in Gläsern gekühlt wurde. Für den Versuchsteil zur Dichtebestimmung wurden die in der Eiswürfelschale hergestellten Blöcke verwendet. Sie besitzen alle etwa das gleiche Volumen.

Bei der Durchführung des Versuches liegt eine Schwierigkeit darin, dass die Blöcke aus Wackelpudding sehr leicht kaputt gehen, wenn sie mit einem Trinkhalm durchbohrt werden. Daher wird der Trinkhalm an seinem unteren Ende mit Zahnstochern durchbohrt und dann mit Knetmasse abgedichtet. Dadurch entsteht ein Halter wie in der nebenstehenden Abbildung. An diesen werden nun jeweils eine unterschiedliche Anzahl an Blöcken befestigt und die Eintauchtiefe des Aräometers ab dem oberen Ende des Trinkhalmes gemessen.

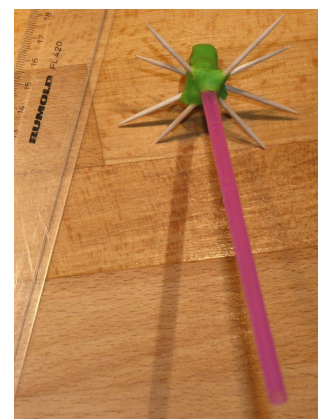


Abb. 5: Aräometer zur Dichtebestimmung.

## Messwerte und Auswertung

### Volumen eines Wackelpuddingblockes

Die Blöcke aus Wackelpudding haben grob die Form eines Pyramidenstumpfes mit rechteckiger Grundfläche, so dass sich das Volumen eines Blockes mit den Bezeichnungen in Abbildung 6 bestimmen lässt durch<sup>7</sup>

$$V_{\text{Block}} \approx \frac{c}{3} \left( a_1 b_1 + a_2 b_2 + \sqrt{a_1 b_1 a_2 b_2} \right). \quad (4.4)$$

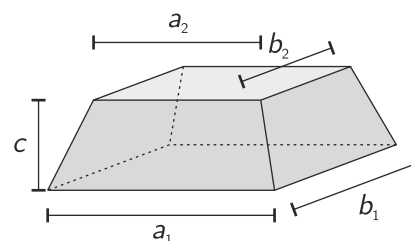


Abb. 6: Geometrie eines Wackelpuddingblockes.

Gemessen wurden für die Abmessungen der Blöcke mit einem Lineal die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} a_1 &= (3,6 \pm 0,1) \text{ cm}, & a_2 &= (2,7 \pm 0,1) \text{ cm}, \\ b_1 &= (2,1 \pm 0,1) \text{ cm}, & b_2 &= (1,4 \pm 0,1) \text{ cm}, & c &= (1,8 \pm 0,1) \text{ cm}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Damit ergibt sich für das Volumen eines Blockes

$$V_{\text{Block}} = (10,0 \pm 1,4) \text{ cm}^3, \quad (4.6)$$

wobei der Fehler für die in der Fußnote angegebenen Formel mittels Fehlerfortpflanzung gemäß

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{Block}} = V_{\text{Block}} \frac{\Delta c}{c} + \frac{c}{3} \left( \Delta a_1 b_1 + a_1 \Delta b_1 + \Delta a_2 b_2 + a_2 \Delta b_2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\Delta a_1 b_2 + a_1 \Delta b_2 + \Delta a_2 b_1 + a_2 \Delta b_1) \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

bestimmt wurde.

### Messwerte zur Dichtebestimmung

Für die Bestimmung der Dichte wurden die folgenden Messwerte aufgenommen.

Tabelle 3: Messwerte zur Bestimmung der Dichte von Wackelpudding.

Nr.	n	$V_{\text{Wackel}} / \text{cm}^3$	$\Delta V_{\text{Wackel}} / \text{cm}^3$	$h / \text{cm}$	$\Delta h / \text{cm}$
1	1,0	10	1,4	-7,8	0,2
2	1,5	15	2,2	-6,45	0,2
3	2,0	20	2,9	-6,2	0,2
4	2,5	25	3,6	-5,3	0,2
5	3,0	30	4,3	-4,7	0,2
6	3,5	35	5,0	-4,1	0,2
7	4,0	40	5,8	-3,2	0,2
8	4,5	45	6,5	-2,8	0,2
9	5,0	50	7,2	-2,5	0,2

<sup>7</sup>Da sich die Verlängerungen der Seitenkanten bei den verwendeten Blöcken nicht genau in einem Punkt schneiden, ist die Formel (4.4) nicht ganz korrekt. Durch Integration der Fläche über die Höhe des Blockes erhält man exakt  $V_{\text{Block}} = \frac{c}{3} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \frac{1}{2} (a_1 b_2 + a_2 b_1))$ . Der durch die falsche Formel verursachte Fehler ist aber deutlich kleiner als der Messfehler.

Hierbei bezeichnet  $n$  die Anzahl der an dem Aräometer befestigten Wackelpuddingblöcke. Die Blöcke wurden zum Teil halbiert. Da die Eintauchtiefe  $h$  ab dem oberen Ende des Trinkhalmes gemessen wurde, sind die tabellierten Werte negativ.

Trägt man  $h$  über  $V_{\text{Wackel}}$  graphisch auf, so lässt sich aus der Ausgleichsgeraden die Steigung ablesen.

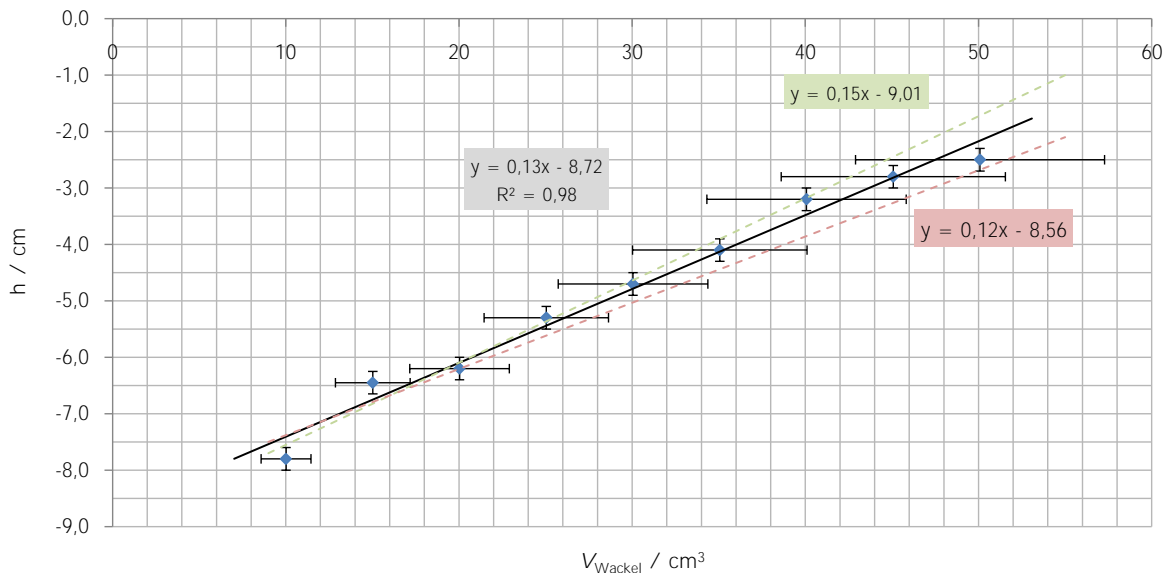


Abb. 7: Graph zur Dichtebestimmung: Eintauchtiefe über dem Wackelpuddingvolumen.

Es ergibt sich aus dem Graphen für die Steigung  $\vartheta$  der Ausgleichsgeraden

$$\vartheta = \frac{1}{\pi r^2} \left( \frac{\rho_{\text{Wackel}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} - 1 \right) = (0,13 \pm 0,02) \text{ cm}^{-2}, \quad (4.8)$$

wobei der Fehler in  $\vartheta$  über die Steigung der alternativ eingezeichneten Ausgleichsgeraden bestimmt wurde.

#### Durchmesser des Trinkhalmes

Für die Bestimmung der Dichte wird nun noch der Außenradius  $r$  bzw. der Durchmesser  $d$  des Trinkhalmes benötigt. Dieser lässt sich bestimmen, indem man den Trinkhalm, wie in Abbildung 8 skizziert, zwischen einem Lineal und einem Tisch einklemmt. Mit den Bezeichnungen in der Abbildung gilt dann nach dem Strahlensatz:

$$\frac{d}{x_1} = \frac{y}{x_2} \quad \text{bzw.} \quad d = \frac{x_1}{x_2} y. \quad (4.9)$$

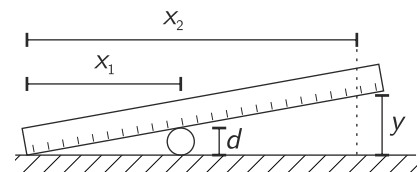


Abb. 8: Skizze zur Bestimmung des Durchmessers des Trinkhalmes.

Gemessen wurden  $x_1 = (5,00 \pm 0,05) \text{ cm}$ ,  $x_2 = (30,00 \pm 0,05) \text{ cm}$  sowie  $y = (2,90 \pm 0,05) \text{ cm}$ . Damit ergibt sich der Durchmesser zu

$$d = (0,48 \pm 0,02) \text{ cm}. \quad (4.10)$$

Der Fehler ergibt sich dabei nach

$$\Delta d = d \left( \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta y}{y} \right). \quad (4.11)$$



### Ergebnis und Fehlerbetrachtung

Mit Hilfe der bestimmten Werte lässt sich nun die Dichte des Wackelpuddings angeben zu

$$\rho_{\text{Wackel}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \left( 1 + \frac{\vartheta \pi d^2}{4} \right) = \rho_{\text{H}_2\text{O}} (1 + 0,024 \pm 0,006) = (1024 \pm 6) \text{ kg m}^{-3}, \quad (4.12)$$

wobei für den Fehler  $\Delta\rho_{\text{Wackel}}$  der Dichte gilt:

$$\Delta\rho_{\text{Wackel}} = (\rho_{\text{Wackel}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}}) \left( 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} \right). \quad (4.13)$$

Das Ergebnis für die Dichtedifferenz zu Wasser ist insgesamt nicht sehr genau, da der Einfluss einer Reihe von Fehlern mit den erlaubten Materialien nur schwer zu verringern ist. Wesentliche Fehlerquellen sind das Zurechtschneiden bzw. die Bestimmung des Volumens der Wackelpuddingblöcke und der mögliche Einschluss von Luftblasen in dem Wackelpudding. Darüber hinaus lösen sich die Blöcke mit der Zeit beim Schwimmen im Wasser auf. Der absolute Fehler in der Dichte des Wackelpuddings ist aber relativ klein.

- b) Zur Herleitung des in den Aufgaben gegebenen Ausdruckes für das rückstellende Drehmoment kann man sich den Zylinder horizontal in flache Scheiben der Dicke  $\Delta L$  zerlegt vorstellen, die jeweils einen Winkel  $\Delta\alpha = \alpha \Delta L/L$  gegeneinander verdreht sind. Betrachte, wie in den Abbildungen 9 und 10 dargestellt, einen kleinen Quader innerhalb der obersten Scheibe, der in einem dünnen Kreisring mit Radius  $r$  liegt.

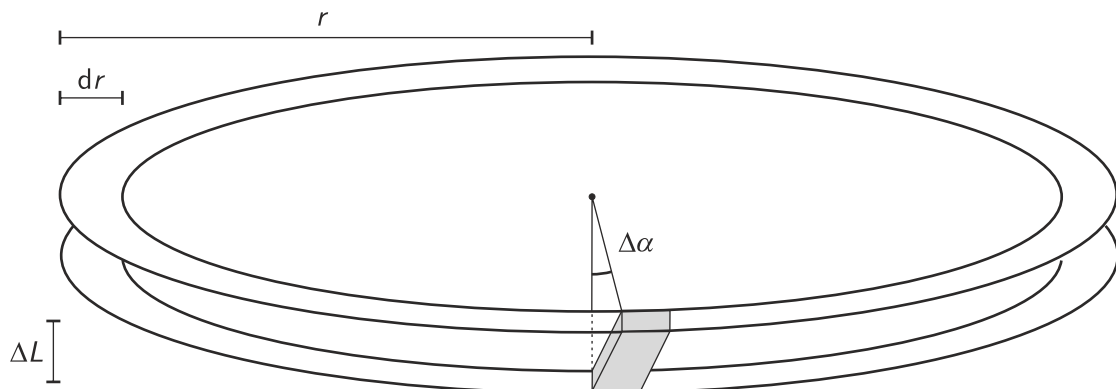


Abb. 9: Skizze zur Verdrehung eines dünnen Ringes in perspektivischer Ansicht.

Durch die Verdrehung der Scheibe erfährt der Quader eine Scherung um einen kleinen Scherwinkel  $\Delta\theta \approx \Delta\alpha r/\Delta L$ . Die Scherung führt zu einer Scherspannung bzw. einer der Scherrichtung entgegengesetzten Kraft  $\Delta F$ , die sich mit den Bezeichnungen in der Abbildung ausdrücken lässt durch:

$$\Delta F = G \Delta\theta \Delta b dr = \frac{G \Delta\alpha r \Delta b dr}{\Delta L}. \quad (4.14)$$

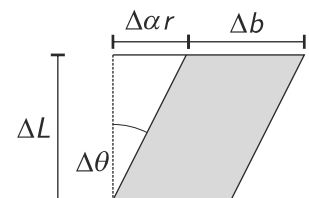


Abb. 10: Scherung des Quaders von der Seite.

Um das insgesamt von der Scheibe ausgeübte rückstellende Drehmoment zu bestimmen, muss die Kraft mit dem Abstand zur Scheibenmitte multipliziert und über die gesamte Scheibe integriert werden.

$$M = \int_0^R dr r \frac{G \Delta\alpha r 2\pi r}{\Delta L} = \frac{\pi G R^4 \alpha}{2L}, \quad (4.15)$$

wobei im letzten Schritt  $\Delta\alpha = \alpha \Delta L/L$  verwendet wurde.

### c) Theoretische Vorüberlegung

Nach dem in der Aufgabenstellung gegebenen Zusammenhang ist das rückstellende Drehmoment eines leicht verdrehten Zylinders aus Wackelpudding proportional zum Winkel  $\alpha$ , um den der Zylinder verdreht ist. Diese Form des rückstellenden Drehmomentes führt nach dem Loslassen des Zylinders zu einer harmonischen Drehschwingung. Da diese eine relativ kurze Periodendauer besitzt, ist es hilfreich, auf dem oberen Ende des Zylinders einen Körper zu platzieren, der ein größeres Trägheitsmoment bezüglich der Zylinderachse aufweist. Hierzu kann zum Beispiel ein Lineal dienen.

Die Bewegungsgleichung für die Drehschwingung lautet

$$(I_{\text{Lineal}} + \kappa I_{\text{Zylinder}}) \ddot{\alpha} = - \frac{\pi G R^4 \alpha}{2 L}. \quad (4.16)$$

Hierbei bezeichnet  $I_{\text{Lineal}}$  das Trägheitsmoment des auf dem Zylinder liegenden Lineales bei Drehung um die Zylinderachse. Das Trägheitsmoment  $I_{\text{Zylinder}}$  des Wackelpuddingzylinders bei Drehung um die Zylinderachse wird mit einem zunächst unbekanntem Faktor  $\kappa$  mit  $0 < \kappa < 1$  gewichtet, da sich aufgrund der Fixierung der Bodenfläche bei der Drehung nicht der gesamte Zylinder bewegt.

Diese Bewegungsgleichung ist die einer harmonischen Schwingung mit Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2L (I_{\text{Lineal}} + \kappa I_{\text{Zylinder}})}{\pi G R^4}}. \quad (4.17)$$

Aus einer Messung der Schwingungsdauer lässt sich daher der Torsionsmodul bestimmen gemäß

$$G = \frac{8\pi L (I_{\text{Lineal}} + \kappa I_{\text{Zylinder}})}{T^2 R^4}. \quad (4.18)$$

### Versuchsaufbau

Für den Versuch wird ein zylinderförmiger Block mit Radius  $R$  und Höhe  $L$  aus dem Wackelpudding vorbereitet. Am leichtesten gelingt dies, wenn man den Wackelpudding gleich in einem runden Glas herstellt oder einen Becher im Supermarkt kauft. Ein Lineal wird für den Schwingungsversuch, wie in Abbildung 11 zu sehen, mittig auf den Zylinder gelegt. Dabei ist darauf zu achten, dass der Wackelpuddingzylinder möglichst fest auf dem Untergrund haftet. Hierzu ist eine raue Oberfläche, wie z.B. von einem Frühstücksbrett hilfreich. Außerdem muss das Lineal gut an der Oberseite haften, damit es bei der Schwingung nicht verrutscht.

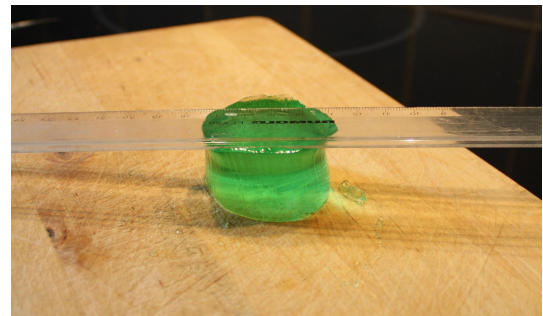


Abb. 11: Versuchsaufbau zur Bestimmung des Torsionsmoduls von Wackelpudding.

Mit einer Stoppuhr wird dann mehrfach die Schwingungsperiode  $T$  der Drehschwingung gemessen.

### Messwerte und Auswertung

#### Trägheitsmomente

Das Trägheitsmoment des Vollzylinders aus Wackelpudding bei Drehung um die Zylinderachse beträgt

$$I_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} m_{\text{Zylinder}} R^2 = \frac{\pi L \rho_{\text{Wackel}} R^4}{2}. \quad (4.19)$$

Für den Versuch wurden zwei unterschiedliche Zylinder mit den folgenden Maßen verwendet:

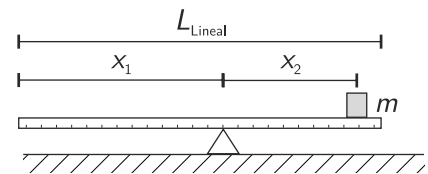
$$\text{Zylinder 1} \quad 2R = (4,15 \pm 0,10) \text{ cm} \quad L = (2,75 \pm 0,05) \text{ cm} \quad I_{\text{Zylinder}} = (8,2 \pm 1,0) \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

$$\text{Zylinder 2} \quad 2R = (5,95 \pm 0,10) \text{ cm} \quad L = (2,35 \pm 0,05) \text{ cm} \quad I_{\text{Zylinder}} = (3,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes des Lineals kann man dieses in guter Näherung als homogenen, dünnen Stab der Länge  $L_{\text{Lineal}}$  ansehen. Damit ist dessen Trägheitmoment um eine Achse durch den Schwerpunkt und senkrecht zum Lineal gegeben durch

$$I_{\text{Lineal}} = \frac{1}{12} m_{\text{Lineal}} L_{\text{Lineal}}^2. \quad (4.20)$$

Die unbekannte Masse  $m_{\text{Lineal}}$  des Lineals kann mit Hilfe einer Balkenwaage aus dem auf einer Kante gelagerten Lineal und einer bekannten Masse (wie z.B. einem Block des Wackelpuddings) bestimmt werden. Mit den Bezeichnungen in der nebenstehenden Abbildung 12 gilt



$$m_{\text{Lineal}} \frac{x_1}{L_{\text{Lineal}}} \frac{x_1}{2} = m_{\text{Lineal}} \frac{(L_{\text{Lineal}} - x_1)^2}{2 L_{\text{Lineal}}} + m x_2, \quad (4.21)$$

Abb. 12: Skizze zur Waage.

beziehungsweise  $m_{\text{Lineal}} = m x_2 / \left( x_1 - \frac{L_{\text{Lineal}}}{2} \right)$ . Das verwendete Lineal besitzt eine Länge von  $L_{\text{Lineal}} = (31,00 \pm 0,05) \text{ cm}$  und bei einer Wackelpuddingmasse<sup>8</sup> von  $m = (10,0 \pm 0,7) \text{ g}$  werden die Längen  $x_1$  sowie  $x_2$  bestimmt zu  $x_1 = (20,25 \pm 0,05) \text{ cm}$  und  $x_2 = (9,25 \pm 0,05) \text{ cm}$ . Damit ergibt sich für die Masse des Lineals

$$m_{\text{Lineal}} = m \frac{x_2}{x_1 - \frac{L_{\text{Lineal}}}{2}} = (19,5 \pm 1,8) \text{ g}, \quad (4.22)$$

wobei für den Fehler  $\Delta m_{\text{Lineal}}$  gilt:

$$\Delta m_{\text{Lineal}} = m_{\text{Lineal}} \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_1 + \Delta L_{\text{Lineal}}}{x_1 - \frac{L_{\text{Lineal}}}{2}} \right). \quad (4.23)$$

Der Wert für das relevante Trägheitsmoment des Lineals ergibt sich damit zu

$$I_{\text{Lineal}} = \frac{1}{12} m_{\text{Lineal}} L_{\text{Lineal}}^2 = (1,56 \pm 0,16) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2. \quad (4.24)$$

Das Trägheitsmoment des Lineals ist also deutlich größer als das der Wackelpuddingzylinder. Daher vernachlässigen wir letzteres im Folgenden. Der dadurch hervorgerufene Fehler ist deutlich kleiner als der durch die Messungenauigkeiten bedingte.

Nach dieser Vorarbeit können nun die Schwingungsperioden für die Drehschwingungen aufgenommen werden. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Messergebnisse.

Tabelle 4: Messwerte zur Bestimmung des Torsionsmoduls von Wackelpudding.

	N	$NT / s$										$\bar{T} / s$	$\sigma \bar{T} / s$
Zylinder 1	5	7,5	7,6	7,7	7,8	7,5	7,6	7,7	7,5	7,8	7,6	1,53	0,01
Zylinder 2	10	6,8	6,8	7,0	6,9	6,9	6,9	6,9	6,9	6,8	6,9	0,69	0,00

<sup>8</sup>Der Fehler der Masse wird ähnlich zu den in diesem Versuch verwendeten Zylindern zu etwa 7% angenommen.

Hierbei bezeichnet  $N$  die Anzahl der betrachteten Schwingungsperioden und die Standardabweichung der Schwingungsperiode wurde als Standardabweichung des Mittelwertes bestimmt. Dieser Wert wird im Folgenden als Fehler  $\Delta T$  für die Periodendauer verwendet.

### Ergebnis und Fehlerbetrachtung

Mit den Ergebnissen lässt sich schließlich der Torsionsmodul des Wackelpuddings nach Formel (4.18) berechnen. Es ergibt sich

$$\begin{array}{l} \text{Zylinder 1} \quad G = (250 \pm 56) \text{ N m}^{-2} \\ \text{Zylinder 2} \quad G = (249 \pm 49) \text{ N m}^{-2} \end{array} \quad (4.25)$$

Der Fehler wurde erneut mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung gemäß

$$\Delta G = G \left( \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta I_{\text{Lineal}}}{I_{\text{Lineal}}} + 2 \frac{\Delta T}{T} + 4 \frac{\Delta R}{R} \right) \quad (4.26)$$

berechnet.

Wenn man den Einfluss der Bewegung des Zylinders mit berücksichtigt, ergibt sich für  $\kappa = 1$  als (unrealistischer) Maximalwert  $G = (263 \pm 59) \text{ N m}^{-2}$  (Zylinder 1) bzw.  $G = (296 \pm 57) \text{ N m}^{-2}$  (Zylinder 2). Der Unterschied ist also immer noch im Rahmen der Messfehler.

Ebenso wie im ersten Teil ist das Ergebnis nicht sehr genau. Insbesondere die Temperatur des Wackelpuddings hat einen großen Einfluss auf die Ergebnisse. Die vorgestellten Messungen wurden mit Wackelpudding durchgeführt, der direkt aus dem Kühlschrank genommen wurde. Darüber hinaus ist der Wackelpuddingzylinder bei Belastung mit dem Lineal in der Regel nicht sehr stabil, so dass er sich leicht verformt.

## Bewertungsvorschläge

Gemäß den Gepflogenheiten bei der Internationalen PhysikOlympiade sollte primär die Richtigkeit der Lösung bewertet werden und weniger die Sauberkeit der Ausarbeitung oder der sprachliche Ausdruck. Wie auf dem Aufgabenblatt vermerkt, sind computergenerierte Lösungen nicht zulässig.

Die angegebenen Punktzahlen beziehen sich jeweils auf den von uns ausgearbeiteten Lösungsweg. Bei anderen Lösungswegen muss die Bewertung sinngemäß abgeändert werden, wobei die Gesamtpunktzahl pro Aufgabe beizubehalten ist. Folgefehler sollten nicht bestraft werden. Die Verwendung eines falschen Zwischenergebnisses sollte, sofern sich dadurch keine starke Vereinfachung des Problems ergibt, also nicht zu Punktabzug führen. Dies bedeutet insbesondere, dass ein numerisches Ergebnis auch dann als korrekt gewertet werden sollte, wenn der Schüler vorher eine falsche Formel abgeleitet, aber korrekt mit dieser Formel weitergerechnet hat. Wenn bei einem Ergebnis die erforderliche Angabe einer Einheit fehlt, sollte dies zu Punktabzug führen.

**Achten Sie darauf, dass den Lösungen der vollständig ausgefüllte Adressbogen mit den persönlichen Daten und der unterschriebenen Erklärung beiliegt!**

**Bitte geben Sie bei der Bewertung nicht nur die Gesamtpunktzahl pro Aufgabe an, sondern auch die Aufschlüsselung nach Teilleistungen gemäß der Bepunktungsvorlage auf dem Adress- und Bewertungsbogen.**

<b>Aufgabe 1 Black-Boxen</b>		<b>Punkte</b>
a)	Angabe der Schaltskizze für Box <b>A</b>	1
	Begründung, dass dies die einzig mögliche Schaltung für Box <b>A</b> ist	0,5
	Angabe der Schaltskizze für Box <b>B</b>	1
	Begründung, dass dies die einzig mögliche Schaltung für Box <b>B</b> ist	0,5
	Angabe der Schaltskizzen nur mit Widerständen für Box <b>C</b>	1
	Angabe der anderen beiden Schaltskizzen für Box <b>C</b>	2
	Herleitung der Bedingung, dass in diesem Fall $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ gelten muss	2
	Begründung, dass keine anderen Schaltungen für Box <b>C</b> möglich sind	1
b)	Verwendung der korrekten Schaltungen	0,5
	Ausdrücke für $R$ , $L$ und $C$ (1.6)	1,5
	Numerische Werte für $R$ , $L$ und $C$ (1.6)	1,5
c)	Angabe der Gesamtimpedanz (1.7)	2
	Angabe einer Bedingung für Scheinwiderstand und Gleichung (1.8)	1
	Lösung (1.9) für Kreisfrequenzen und numerische Werte	1,5
		<b>17</b>

<b>Aufgabe 2 Rotierende Flüssigkeiten</b>		<b>Punkte</b>	
a)	Idee zur Bestimmung der Form der Flüssigkeitsoberfläche	2	
	Aufstellen einer Differentialgleichung wie (2.1)	0,5	
	Allgemeine Lösung der Differentialgleichung	0,5	
	Verwendung einer Normierungsbedingung (2.3)	1	
	Lösung für die Höhe der Flüssigkeitsoberfläche (2.4)	0,5	
	Betrachtung des Bodenkontaktes und Erkennen, dass dieser Effekt berücksichtigt werden muss	1,5	
	Herleitung der Form der Oberfläche mit Bodenkontakt (2.10)	2	
	Aufstellen der Bedingung (2.11) für das Überlaufen	0,5	
	Maximal mögliche Winkelgeschwindigkeit bis zum Überlaufen (2.12)	0,5	
b)	Idee zur Bestimmung der Oberflächenform über Drücke	2	
	Aufstellen einer Druckbilanz wie in (2.13)	0,5	
	Umformen zu einer differentiellen Betrachtung	0,5	
	Aufstellen der Differentialgleichung für obere Flüssigkeit (2.14)	0,5	
	Lösung für die Höhe der oberen Flüssigkeitsoberfläche (2.15)	1	
	Berücksichtigung des Schweredruckes für untere Flüssigkeit wie in (2.16)	1	
	Aufstellen der Differentialgleichung für untere Flüssigkeit (2.17)	0,5	
	Lösung für die Höhe der unteren Flüssigkeitsoberfläche (2.18)	2	
c) i.	Ausdrücke für Flüssigkeitsoberflächen (2.19)	0,5	
	Untersuchung der drei einschränkenden Bedingungen und Angabe von $\tilde{\omega}_2$	1,5	
	Skizze des Verlaufes der Oberflächen in diesem Fall	0,5	
	ii.	Ausdrücke für Flüssigkeitsoberflächen (2.21)	0,5
		Feststellen, dass Abstand konstant ist und Angabe des Abstandes	1
		Skizze des Verlaufes der Oberflächen in diesem Fall	0,5
	iii.	Ausdrücke für Flüssigkeitsoberflächen (2.19)	0,5
		Bestimmung der maximalen Steighöhe der unteren Flüssigkeit	0,5
		Vergleich mit der Form aus dem ersten Teil	0,5
		<b>23</b>	

<b>Aufgabe 3 Schrottturm</b>		<b>Punkte</b>
a)	Bestimmung der Grenzgeschwindigkeit $v_f$ (3.2)	1
	Vergleich der Leistungen für Wärmestrom und Wärmeleitung (3.3)	1,5
	Ausdrücken von $\alpha$ wie in (3.4)	0,5
	Verwendung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes für Wärmestrahlung	1
	Vergleich der Leistungen für Wärmestrom und Wärmestrahlung	1,5
	Ergebnis, dass Konvektion maßgeblich für Abkühlung ist	0,5
b)	Angabe der zur Erstarrung abzugebenden Wärmeenergie (3.7)	1
	Bilanzgleichung für den Erstarrungsvorgang (3.8)	1
	Aufstellen einer Leistungsbilanz für Abkühlvorgang (3.10)	1
	Überführung in integralen Ausdruck wie in (3.11)	1
	Formulierung einer sinnvollen Idee zur Bestimmung der Fallhöhen <sup>*)</sup>	3
	Durchführung der Bestimmung der Fallhöhen <sup>*)</sup>	3
	Ergebnisse für Fallhöhen (Das Ergebnis sollte für die volle Punktzahl nicht mehr als 10% von dem Wert in (3.13) abweichen)	2
c)	Formulierung einer sinnvollen Idee zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit <sup>*)</sup>	3
	Durchführung der Bestimmung der Windgeschwindigkeit <sup>*)</sup>	2
	Ergebnis für Windgeschwindigkeit (Das Ergebnis sollte für die volle Punktzahl nicht mehr als 20% von dem Wert in (3.16) abweichen)	2
		<b>25</b>

<sup>\*)</sup> Bei Verwendung eines stark vereinfachten Ansatzes, wie dem freien Fall, sollte, wenn keine Begründung zur Zulässigkeit der Näherung gemacht wird, maximal die Hälfte der Punkte für diesen Aspekt vergeben werden.

<b>Aufgabe 4 Physik mit Wackelpudding</b>		<b>Punkte</b>
a)	Beschreibung einer Methode zur Dichtebestimmung und des Aufbaus	3
	Theoretische Vorüberlegung und Idee zur Auswertung (z.B. Linearisierung)	3
	Aufnahme einer sinnvollen Anzahl von Messwerten	3
	Passende Auswertung (z.B. Steigung aus Graphen bestimmen)	3
	Plausibles Ergebnis für Dichte des Wackelpuddings (Es sollte $1000 \text{ kg m}^{-3} < \rho_{\text{Wackel}} < 1200 \text{ kg m}^{-3}$ gelten)	3
	Fehlerbetrachtung	2
b)	Idee zur Betrachtung dünner Scheiben	1
	Betrachtung eines Kreisringsegmentes	1
	Bestimmung der Kraft (4.14) auf einzelnes Element	1
	Berechnung des Gesamtdrehmomentes	1
c)	Beschreibung einer Methode zur Bestimmung und des Aufbaus	2
	Theoretische Vorüberlegung und Idee zur Auswertung	3
	Aufnahme einer sinnvollen Anzahl von Messwerten	3
	Passende Auswertung	2
	Plausibles Ergebnis für Torsionsmodul des Wackelpuddings (Die Ergebnisse können stark von der Musterlösung abweichen)	2
	Fehlerbetrachtung mit Angabe wesentlicher Einflussfaktoren	2
		<b>35</b>

Es ist in dieser Aufgabe nicht zu erwarten, dass die Teilnehmenden deutlich genauere Ergebnisse erzielen.

**Summe der Punkte 100**