

43. Internationale PhysikOlympiade

Tallinn & Tartu, Estland 2012



Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen
Tel.: 0431 / 880-5120
email: petersen@ipho.info

Sekretariat

Lulu Hoffmeister
Tel.: 0431 / 880-5387
email: sekretariat@ipho.info

Anschrift: IPN an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel

Fax: 0431 / 880-3148
Webseite: www.ipho.info

Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im
Auswahlwettbewerb für die 43. IPhO 2012

Aufgabe 1 Wirbelstrombremsung
(19 Punkte)

a) Eine Sprosse der Leiter hat einen Widerstand von

$$R_{\text{Sprosse}} = \frac{4b}{\pi d^2 \sigma_{\text{Cu}}} \approx 4,4 \cdot 10^{-2} \Omega. \quad (1.1)$$

Die Verbindungsstücke der Sprossen sind nur ein Viertel so lang und haben daher einen Widerstand von $R_{\text{Sprosse}}/4 =: \kappa R_{\text{Sprosse}}$.

Da die Anzahl der Sprossen mit $l/a = 200$ sehr groß ist, ändert sich der Widerstand R_{AB} zwischen den Punkten A und B im Rahmen der Genauigkeit der gegebenen Werte nicht, wenn die erste Sprosse mit ihren beiden Verbindungsstücken entfernt wird¹. Es gilt also nach den Regeln für Reihen- und Parallelschaltungen:

$$R_{\text{AB}} \approx 2\kappa R_{\text{Sprosse}} + \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{Sprosse}}} + \frac{1}{R_{\text{AB}}}} = 2\kappa R_{\text{Sprosse}} + \frac{R_{\text{Sprosse}} R_{\text{AB}}}{R_{\text{Sprosse}} + R_{\text{AB}}}, \quad (1.2)$$

bzw.

$$R_{\text{AB}}^2 - 2\kappa R_{\text{Sprosse}} R_{\text{AB}} - 2\kappa R_{\text{Sprosse}}^2 \approx 0. \quad (1.3)$$

Die einzig physikalisch sinnvolle Lösung dieser quadratischen Gleichung ist

$$R_{\text{AB}} \approx R_{\text{Sprosse}} \left(\kappa + \sqrt{\kappa(\kappa + 2)} \right) \stackrel{\kappa = \frac{1}{4}}{=} R_{\text{Sprosse}} \approx 4,4 \cdot 10^{-2} \Omega. \quad (1.4)$$

b) Zu jeder Zeit befinden sich genau zwei Sprossen der Leiter im Feld des Hufeisenmagneten (vgl. Abb. 1).

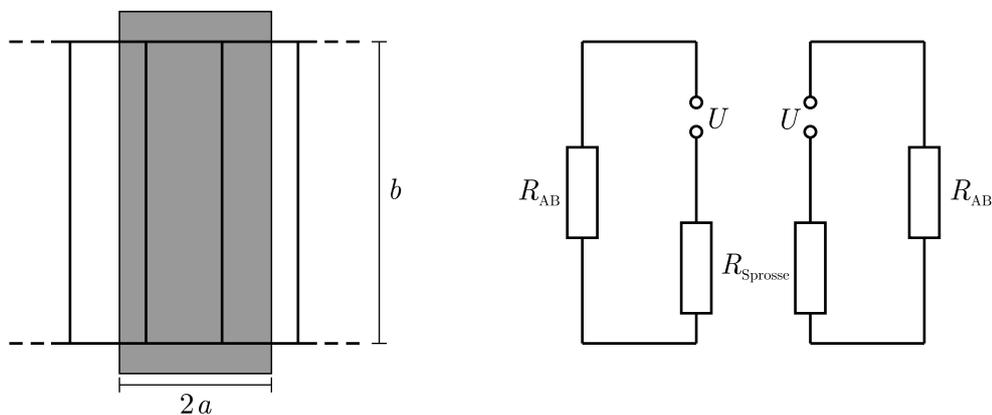


Abbildung 1: Ausschnitt aus dem rotierenden Ring mit von Magnetfeld durchsetzter Fläche (in grau) und Ersatzschaltbild (rechts).

Durch die Rotation des Ringes ändert sich der magnetische Fluß Φ durch die teilweise in dem Magnetfeld befindlichen Leiterschleifen und es wird jeweils eine Spannung

$$U = - \frac{d\Psi}{dt} = B\omega r b = \frac{B\omega l b}{2\pi} \quad (1.5)$$

in diesen induziert, wobei $r = l/2\pi$ den Radius des Ringes bezeichnet und ω die momentane Kreisfrequenz angibt. Zwischen den beiden Sprossen im Magnetfeld existiert allerdings keine

¹Es ist ebenfalls möglich, wenn auch aufwändiger, den Widerstand ohne diese Näherung zu bestimmen.

Potentialdifferenz, da sich der magnetische Fluss durch die vollständig im Feld befindliche Leiterschleife nicht ändert. Zur Bestimmung der im Ring umgesetzten Leistung kann der Ring daher zwischen diesen beiden Sprossen durchtrennt werden, ohne dass sich der Stromfluss ändern würde. Da der Ring von der gedachten Durchtrennung aus in beide Umlaufrichtungen gleich aufgebaut ist, muss das Potential symmetrisch abfallen, so dass die beiden der gedachten Durchtrennungsstelle gegenüberliegenden Sprossen auf dem gleichen Potential liegen müssen. Daher kann der Ring auch zwischen diesen beiden Sprossen durchtrennt werden und das in der Abb. 1 skizzierte Ersatzschaltbild verwendet werden. Die Verwendung von R_{AB} als Widerstand der halben Leiter resultiert aus der auch für die geringere Anzahl Stufen noch sehr gut gültigen Näherung einer unendlich langen Leiter.

Die in der aufgerollten Leiter aufgrund der induzierten Spannung in Wärme umgesetzte Leistung P ist daher gegeben durch

$$P \approx 2 \frac{U^2}{R_{AB} + R_{\text{Sprosse}}} = \frac{B^2 \omega^2 l^2 b^2}{4 \pi^2 R_{\text{Sprosse}}} \quad (1.6)$$

Diese Leistung bewirkt ein abbremsendes Drehmoment \vec{M} auf den rotierenden Ring, das antiparallel zur Kreisfrequenz und nach $P = -M \omega$ gegeben ist durch

$$M = -\frac{P}{\omega} = -\frac{B^2 \omega l^2 b^2}{4 \pi^2 R_{\text{Sprosse}}}. \quad (1.7)$$

Das Drehmoment² ist also proportional zur momentanen Kreisfrequenz ω .

c) Die Bewegungsgleichung

$$M = -\frac{B^2 \omega l^2 b^2}{4 \pi^2 R_{\text{Sprosse}}} = I \frac{d\omega}{dt} \quad (1.8)$$

für die Rotation des Ringes lässt sich mit

$$I = \left(\frac{1}{2} m_{\text{Boden}} + m_{\text{Wand}} + m\right) r^2 =: m' \frac{l^2}{4 \pi^2}, \quad (1.9)$$

wobei m die Masse des Ringes ist, umschreiben zu:

$$\int_0^t dt' \frac{B^2 b^2}{m' R_{\text{Sprosse}}} = -\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega'}{\omega'}, \quad \text{bzw. nach Integrieren} \quad t = \frac{m' R_{\text{Sprosse}}}{B^2 b^2} \ln \frac{\omega_0}{\omega}. \quad (1.10)$$

Die Masse m des Ringes und die Masse m' ergeben sich dabei mit der Dichte ρ_{Cu} zu

$$m = \rho_{\text{Cu}} \left(2l + \frac{l}{a} b\right) \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,42 \text{ g}, \quad m' = \frac{1}{2} m_{\text{Boden}} + m_{\text{Wand}} + m \approx 60,4 \text{ g}. \quad (1.11)$$

Die Masse des Ringes spielt also kaum eine Rolle und kann daher vernachlässigt werden.

Damit lässt sich schließlich die gesuchte Zeit bestimmen, nach der die Kreisfrequenz auf die Hälfte abgefallen ist:

$$t\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \approx \frac{4 \left(\frac{1}{2} m_{\text{Boden}} + m_{\text{Wand}}\right)}{\pi d^2 \sigma_{\text{Cu}} B^2 b} \ln 2 \approx 12,7 \text{ s}. \quad (1.12)$$

²Das Drehmoment lässt sich alternativ auch über die Kraft $F = I b B$ auf einen bewegten stromdurchflossenen Leiter in dem Magnetfeld berechnen. In diesem Fall ergibt sich das Drehmoment auf die beiden Sprossen im Magnetfeld gemäß $M = 2 F r = F l / \pi = -\frac{l}{\pi} \frac{U b B}{2 R_{\text{Sprosse}}} = -\frac{B^2 \omega l^2 b^2}{4 \pi^2 R_{\text{Sprosse}}}$.

Aufgabe 2 Das Prinzip von Fermat
(19 Punkte)
(Idee: Manuel Bärenz)

- a) Betrachte zur Herleitung des Reflexionsgesetzes einen Lichtstrahl, der, wie in der nebenstehenden Abbildung dargestellt, von einem Punkt A zu einem Punkt B verläuft und dabei an einem Spiegel reflektiert wird. Um den kürzesten Lichtweg zwischen A und B über den Spiegel zu finden, lässt sich der Strahl an der Spiegelebene reflektiert fortgesetzt denken. Da die kürzeste Verbindung zweier Punkte eine Gerade ist, verläuft der tatsächliche Lichtstrahl so, dass der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist.

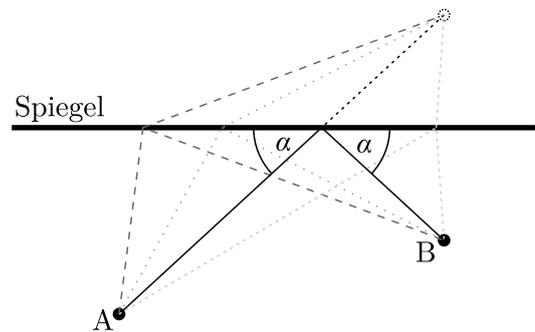


Abbildung 2: Skizze zum Reflexionsgesetz.

Das gleiche Ergebnis lässt sich auch durch das Aufstellen einer Formel für den Lichtweg und die Bestimmung des Minimums herleiten.

- b) Betrachte auch in diesem Fall einen Lichtstrahl, der von einem Punkt A zu einem Punkt B verläuft. Punkt A liege dabei in einem Medium mit Brechungsindex n_A , Punkt B in einem Medium mit Brechungsindex n_B . Die Situation ist in Abbildung 3 dargestellt. In den Medien breitet sich ein Lichtstrahl mit einer Geschwindigkeit von $\frac{c}{n_A}$ bzw. $\frac{c}{n_B}$ aus, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum angibt.

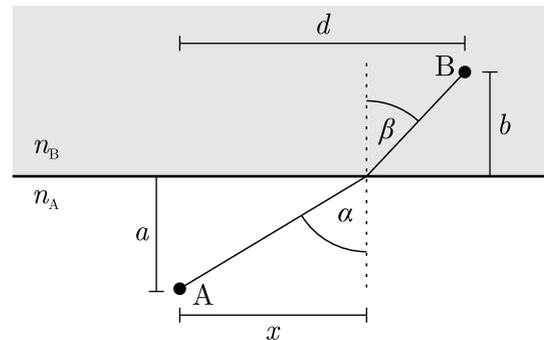


Abbildung 3: Skizze zum Brechungsgesetz.

Gesucht ist nun der Wert von x , für den die Zeit, die das Licht für das Zurücklegen der Strecke von A nach B benötigt, minimal wird.

Die Zeit, die ein Lichtstrahl benötigt, um von A nach B zu gelangen ist

$$t = \frac{n_A}{c} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{n_B}{c} \sqrt{b^2 + (d-x)^2}. \quad (2.1)$$

Notwendige Bedingung dafür, dass diese Zeit minimal wird, ist das Verschwinden der ersten Ableitung, d.h.

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{dt}{dx} = \frac{n_A x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n_B (d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = n_A \sin \alpha - n_B \sin \beta. \quad (2.2)$$

Die zweite Ableitung der Zeit ist für alle x positiv, da

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{n_A a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{n_B b^2}{(b^2 + (d-x)^2)^{3/2}} \geq 0. \quad (2.3)$$

Damit ist gezeigt, dass die Beziehung in (2.2) die Zeit minimiert. Es gilt also für den Übergang zwischen zwei Medien das bekannte Snelliussche Brechungsgesetz

$$\boxed{n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta}. \quad (2.4)$$

- c) Der Lichtweg zwischen der Lichtquelle und dem Punkt in dem das Licht fokussiert wird (dem Brennpunkt) muss bei der Reflexion nach dem Fermatschen Prinzip für jeden Reflexionspunkt auf dem Spiegel gleich lang sein, d.h. die Summe der Abstände Quelle-Reflexionspunkt und Brennpunkt-Reflexionspunkt ist konstant. In einer Ebene, die die Lichtquelle und den Brennpunkt einschließt, wird durch diese Bedingung eine Ellipse beschrieben. Durch Rotation der Ellipse um die Verbindungsgerade zwischen Lichtquelle und Empfänger erhält man ein Ellipsoid dessen Brennpunkte durch die Lichtquelle und den Brennpunkt der Lichtstrahlen gegeben sind.

- d) Das Problem lässt sich ebenfalls zunächst auf zwei Dimensionen reduzieren und am Ende um die Achse der Einfallrichtung drehen. Es wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Lichtquelle sich in sehr großer Entfernung vom Ursprung auf der positiven y -Achse befindet. Die von der Quelle kommenden Lichtstrahlen fallen dann quasi parallel auf den Spiegel ein.

Das Profil des Spiegels wird mit der Funktion $y(x)$ modelliert. Fällt ein parallel zur y -Achse verlaufender Lichtstrahl in einem Abstand x zu dieser auf den Spiegel, so muss der Lichtweg für eine Fokussierung im Brennpunkt (hier gleichzeitig der Koordinatenursprung) konstant sein.

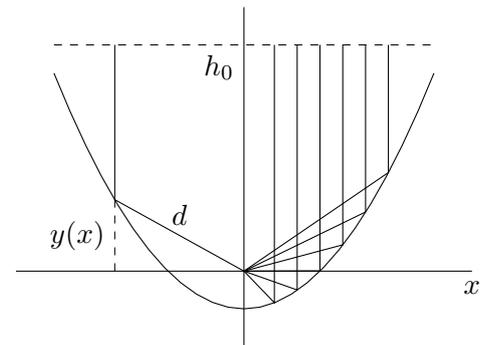


Abbildung 4: Skizze zum Strahlenverlauf mit $d := \sqrt{x^2 + y(x)^2}$.

Betrachte den von einem solchen Lichtstrahl ab einer willkürlich festgelegten y -Koordinate h_0 bis zum Brennpunkt zurückgelegten Weg l (vgl. Abb.4). Dann gilt:

$$l = h_0 - y(x) + \sqrt{x^2 + y(x)^2} = \text{const.} \quad (2.5)$$

Ein Lichtstrahl, der auf der y -Achse einfällt legt die Strecke $h_0 + 2f$ bis zum Brennpunkt zurück, wobei f ein freier Parameter ist, der den Abstand des Brennpunktes zu dem Spiegelpunkt auf der y -Achse angibt. Damit wird aus (2.5)

$$h_0 - y(x) + \sqrt{x^2 + y(x)^2} = h_0 + 2f \quad \text{bzw.} \quad y(x) = \frac{x^2}{4f} - f. \quad (2.6)$$

Rotiert man diese Parabelfunktion um die y -Achse, erhält man ein Paraboloid für die gesuchte Spiegelform, dessen Brennpunkt sich in einem Abstand f vom Scheitelpunkt befindet.

- e) Dieser Aufgabenteil ist analog zur vorherigen Teilaufgabe lösbar. Dabei ist zu beachten, dass der optische Weg durch die Linse mit Brechungsindex n das n -fache des Weges an Luft beträgt.

Für einen parallel zur y -Achse aus dem negativ Unendlichen auf die plane Seite der Linse einfallenden Lichtstrahl gilt analog zu (2.5)

$$n(y(x) - y_{\text{plan}}) + \sqrt{x^2 + (d - y(x))^2} = \text{const.} = (n - 1)y_0 + d - ny_{\text{plan}}, \quad (2.7)$$

wobei y_{plan} die y -Koordinate der planen Linsenseite bezeichnet und $y_0 := y(0)$ ist. Umstellen und Quadrieren ergibt

$$(d - y(x))^2 + x^2 = ((n - 1)y_0 + d)^2 - 2ny(x)((n - 1)y_0 + d) + n^2y(x)^2, \quad (2.8)$$

beziehungsweise

$$(n^2 - 1)y(x)^2 - 2(n - 1)(d + ny_0)y(x) + (n - 1)y_0((n - 1)y_0 + 2d) - x^2 = 0. \quad (2.9)$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung und damit die gesuchte Funktion ist

$$y(x) = \frac{1}{n+1} \left\{ d + n y_0 - \sqrt{(d - y_0)^2 + \frac{n+1}{n-1} x^2} \right\}. \quad (2.10)$$

Die Parameter d und y_0 legen dabei die Form der Linse fest. Die in der Abb. 5 gezeigten exemplarischen Formen der Funktion sind unabhängig davon, wie groß die y -Koordinate der planen Seite der Linse ist. Je kleiner y_{plan} ist, desto breiter ist jedoch die Linse und desto mehr des einfallenden Lichtes wird in dem Brennpunkt gebündelt.

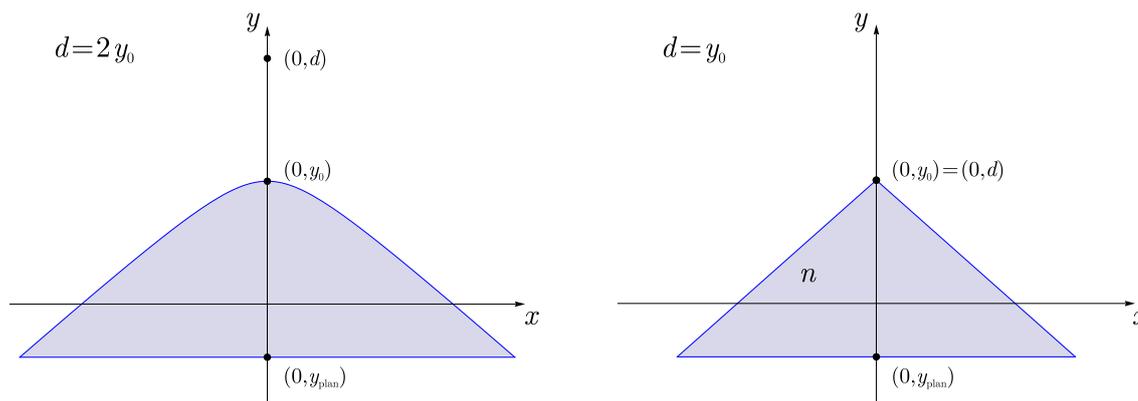


Abbildung 5: Exemplarische Darstellung der Linsenformen für $d = 2y_0$ und $d = y_0$.

Speziell für $d = y_0$ ergibt sich aus Gl. (2.10)

$$y(x) = d - \frac{|x|}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (2.11)$$

Die Linsenoberfläche ist damit sowohl für $y > 0$ als auch für $y < 0$ durch eine Gerade mit Steigung $\pm 1/\sqrt{n^2 - 1}$ gegeben. Die parallel zur y -Achse einfallende Lichtstrahlen werden an der Oberfläche also so gebrochen, dass sie entlang der Oberfläche zum Brennpunkt verlaufen und damit gerade den Grenzfall der Totalreflektion erfahren. Da der Betrag des Steigungswinkels α der Linsenoberfläche gerade dem Lotwinkel eines parallel zur y -Achse auf die Oberfläche einfallenden Lichtstrahls entspricht, gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad (2.12)$$

und damit

$$\sin \alpha = \frac{1}{n}. \quad (2.13)$$

Damit entspricht der Steigungswinkel der Linsenoberfläche in diesem Fall gerade dem Grenzwinkel der Totalreflektion. Auf diese, zugegebenermaßen etwas umständliche Art, lässt sich also ohne Verwendung des Brechungsgesetzes der Grenzwinkel der Totalreflektion bestimmen.

Aufgabe 3 Pioneer-Anomalie**(31 Punkte)***(Idee: Bastian Hacker)*

a) Das Gravitationspotential im Schwerefeld der Sonne beträgt

$$\Psi(r) = -\frac{G M_S}{r}, \quad (3.1)$$

wobei G die Gravitationskonstante und M_S die Sonnenmasse bezeichnen. Für kreisförmige Planetenbahnen ist die Gravitationskraft gleich der Zentripetalkraft, d.h. es gilt

$$F_G = m \frac{G M_S}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = F_Z, \quad \text{bzw.} \quad v^2 = \frac{G M_S}{r} = -\Psi(r). \quad (3.2)$$

Dies entspricht dem Virialsatz, nach dem für diesen Fall $E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} E_{\text{pot}}$ gilt. Für die Bahngeschwindigkeit v_E der Erde gilt daher mit $r = r_E = 1 \text{ AE}$:

$$v_E^2 = -\Psi(r_E) = \frac{G M_S}{1 \text{ AE}} \approx (29,8 \text{ km/s})^2. \quad (3.3)$$

Die in der Aufgabenstellung gegebene Geschwindigkeit v_0 bezeichnet die Geschwindigkeit, die die Sonde relativ zur Erde besitzt, wenn sie der Erde geometrisch noch nahe ist, der Einfluss der Erdschwerkraft aber bereits unerheblich ist. Die Sonde verlässt daher die Erdbahn mit der Geschwindigkeit³

$$v_1 = v_0 + v_E \approx 9,4 \text{ km/s} + 29,8 \text{ km/s} = 39,2 \text{ km/s} \quad (3.4)$$

und kommt im Jupiterorbit (Bahnradius $r_J = 5,2 r_E$) mit der Geschwindigkeit v_2 an. Für diese folgt über die Energieerhaltung

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m v^2(r) + m \Psi(r) = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{G M_S}{r_E} = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{G M_S}{r_J}. \quad (3.5)$$

Damit ist

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2 \Psi(r_E) \cdot (1 - 1/5,2)} \approx 10,1 \text{ km/s}. \quad (3.6)$$

Für die Untersuchung des Swing-by Manövers wird der radiale Anteil v_{2r} und der tangentielle Anteil $v_{2\varphi}$ dieser Geschwindigkeit bezogen auf die Sonne benötigt. Der Drehimpulserhaltungssatz $v_\varphi r = \text{const.}$ liefert

$$v_{2\varphi} = v_1/5,2 \approx 7,5 \text{ km/s}, \quad \text{und somit} \quad v_{2r} = \sqrt{v_2^2 - v_{2\varphi}^2} \approx 6,7 \text{ km/s}. \quad (3.7)$$

Jupiter selbst bewegt sich mit einer Bahngeschwindigkeit v_J in tangentialer Richtung, für die mit Gleichung (3.2) gilt:

$$v_J^2 = -\Psi(r_J) \approx (13,1 \text{ km/s})^2. \quad (3.8)$$

Betrachte das Swing-by Manöver im Ruhesystem des Jupiter. Dort ist das Potential statisch, und deshalb ist der Geschwindigkeitsbetrag der Sonde vor und nach dem Manöver identisch, d.h. es gilt:

$$\sqrt{v_{2r}^2 + (v_{2\varphi} - v_J)^2} = \sqrt{v_{3r}^2 + (v_{3\varphi} - v_J)^2}, \quad (3.9)$$

wobei v_3 die Geschwindigkeit im sonnenfesten System nach dem Swing-By Manöver bezeichnet und verwendet wurde, dass Jupiter den gleichen Umlaufsinn um die Sonne wie die Erde besitzt. Die linke Seite ist bereits bekannt und der Betrag von v_3 soll maximiert werden. Der Betrag einer Summe von zwei Vektoren gegebener Länge wird aber genau dann maximal wenn die

³Wenn die Sonde entgegen der Bahngeschwindigkeit der Erde gestartet wäre, müsste hier die Differenz betrachtet werden. Da die Sonde dann aber Jupiter nicht erreicht hätte, ist dieser Fall nicht relevant.

Vektoren parallel ausgerichtet sind. Daher ist die Austrittsgeschwindigkeit v_3 im Idealfall wieder tangential zur Bahn und $v_{3r} = 0$. Damit liefert Gleichung (3.9):

$$v_3 = v_{3\varphi} = v_J + \sqrt{v_{2r}^2 + (v_{2\varphi} - v_J)^2} \approx 21,8 \text{ km/s}. \quad (3.10)$$

Die weitere Bahngeschwindigkeit folgt erneut aus der Energieerhaltung:

$$v(r) = \sqrt{v_3^2 + 2(\Psi(r_J) - \Psi(r))} = \sqrt{v_3^2 + 2\Psi(r_J)(1 - r_J/r)}. \quad (3.11)$$

Die Radialgeschwindigkeit lässt sich wieder aus der Drehimpulserhaltung ableiten:

$$\begin{aligned} v_r(r) &= \sqrt{v_3^2 + 2\Psi(r_J)(1 - r_J/r)} \sqrt{1 - (r_J/r)^2} \\ &\approx \sqrt{(21,8 \text{ km/s})^2 - 2(13,1 \text{ km/s})^2(1 - 5,2 \text{ AE}/r)} \sqrt{1 - (5,2 \text{ AE}/r)^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Insbesondere erhalten wir die Endgeschwindigkeit der Sonde aus Gleichung (3.12) zu

$$\boxed{v_r(\infty) = \sqrt{v_3^2 + 2\Psi(r_J)} \approx \sqrt{(21,8 \text{ km/s})^2 - 2(13,1 \text{ km/s})^2} \approx 11,5 \text{ km/s}}. \quad (3.13)$$

Mit dieser Geschwindigkeit wird sich Pioneer 10 immer weiter vom Sonnensystem entfernen.

b) Für die Photonen des Sonnenlichts gilt die relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$E = cp. \quad (3.14)$$

Im Sonnenabstand r erreicht die Sonde eine Strahlungsleistung pro Fläche von

$$\frac{P}{A} = E_0 \left(\frac{1 \text{ AE}}{r} \right)^2, \quad (3.15)$$

wobei $A = \pi d^2/4$ die Querschnittsfläche der Sonde angibt. Damit ergibt sich eine Kraft auf die Sonde von $F = \dot{p} = P/c$. Dabei überträgt der reflektierte Anteil der Strahlung den doppelten Impuls, so dass sich für die Beschleunigung

$$a_{\text{Sonnenstrahlung}}(r) = \frac{F}{m} = \frac{(2 \cdot 0,8 + 0,2) P}{m c} = \frac{1,8 \pi d^2 E_0}{4 m c} \left(\frac{1 \text{ AE}}{r} \right)^2 \quad (3.16)$$

ergibt. Damit ist die Beschleunigung ausgedrückt durch die Beschleunigung bei $r = 50 \text{ AE}$

$$\boxed{a_{\text{Sonnenstrahlung}}(r) = 0,82 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2} \cdot \left(\frac{50 \text{ AE}}{r} \right)^2}. \quad (3.17)$$

c) Die Protonendichte des Sonnenwindes verringert sich mit r nach $n(r) = n_0 (1 \text{ AE}/r)^2$. Betrachte für den Impulsübertrag des Sonnenwindes die Masse $\Delta m_{\text{Sonnenwind}}$, die in einer Zeit Δt auf die Sonde trifft. Für diese gilt nach Masse entspricht Dichte mal Volumen:

$$\Delta m_{\text{Sonnenwind}} = \rho \Delta V = n(r) m_p A v \Delta t. \quad (3.18)$$

Damit ergibt sich als Beschleunigung durch den Sonnenwind:

$$a_{\text{Sonnenwind}}(r) = \frac{F}{m} = \frac{\Delta p}{\Delta t m} = \frac{v \Delta m_{\text{Sonnenwind}}}{m \Delta t} = \frac{m_p \pi d^2 v^2 n_0}{4 m} \left(\frac{1 \text{ AE}}{r} \right)^2 \quad (3.19)$$

Einsetzen der Konstanten liefert mit der Annahme einer konstanten Teilchengeschwindigkeit

$$a_{\text{Sonnenwind}}(r) \approx 0,00013 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2} \cdot \left(\frac{50 \text{ AE}}{r} \right)^2 \ll a_{\text{Sonnenstrahlung}}(r). \quad (3.20)$$

Der Sonnenwind bewirkt also genau wie der Strahlungsdruck eine Beschleunigung der Sonde von der Sonne weg. Da der Einfluss des Sonnenwindes aber sehr viel schwächer ist, fällt seine relativ große Unsicherheit (z.B. bei der Geschwindigkeit) nicht ins Gewicht.

- d) Die Beschleunigung durch den Funkstrahl ergibt ebenfalls mit $F = \dot{p} = P/c$ einen konstanten Beitrag

$$a_{\text{Funk}} = \frac{8 \text{ W}}{m c} = 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2} \quad (3.21)$$

weg von der Sonne.

- e) Die Sonde empfängt das von der Erde ausgesendete Signal mit einer (nichtrelativistischen) Dopplerverschiebung. Die empfangene Frequenz f' lässt sich dabei aus der ausgesandten Frequenz f bestimmen durch

$$\lambda' = \lambda + \frac{1}{f'} v_r \quad \text{bzw. mit } f \lambda = c \quad f' = f \left(1 - \frac{v_r}{c} \right), \quad (3.22)$$

wobei die Radialgeschwindigkeit v_r der Sonde bei $r = 50 \text{ AE}$ nach Gleichung (3.12)

$$v_r(50 \text{ AE}) \approx \sqrt{(21,8 \text{ km/s})^2 - 2(13,1 \text{ km/s})^2(1 - 5,2/50)} \sqrt{1 - (5,2/50)^2} \approx 12,9 \text{ km/s}. \quad (3.23)$$

beträgt. Das auf der Erde von der Sonde empfangene Signal ist in gleicher Weise dopplerverschoben, so dass die Frequenzverschiebung Δf gegeben ist durch

$$\Delta f = f \left(1 - \frac{v_r}{c} \right)^2 - f \approx -\frac{2 f v_r}{c} \approx -197 \text{ kHz}. \quad (3.24)$$

Zur Behandlung des zusätzlichen Drifts kann man die Dopplerformel, die sich in diesem Fall schreiben lässt als $v_r = \frac{c|\Delta f|}{2f}$, differenzieren:

$$a_{\text{Anomalie}} = \dot{v}_r = \frac{c}{2} \frac{|\dot{\Delta f}|}{f} = \frac{c}{2} \frac{-1,34 \cdot 10^{-8} \text{ Hz/s}}{2,292 \text{ GHz}}. \quad (3.25)$$

Damit ergibt sich eine signifikante Beschleunigung in Richtung Sonne

$$a_{\text{Anomalie}} = -8,8 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2}. \quad (3.26)$$

- f) Die elektrische Leistung, die im sechseckigen Kasten zu Wärme umgewandelt wird, beträgt

$$P = 3,9\% \cdot 2580 \text{ W} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{18 \text{ a}/88 \text{ a}} - 8 \text{ W} \approx 79 \text{ W} \quad (3.27)$$

Diese wird im thermischen Gleichgewicht vollständig als Wärmestrahlung abgegeben. Jeder Strahl der Leistung P erzeugt, wie in (3.16), eine Beschleunigung

$$a = \frac{\dot{p}}{m} = \frac{P}{m c} \quad (3.28)$$

entgegen der Abstrahlungsrichtung. Die Beiträge aller Strahlen müssen nun aber vektoriell addiert werden. Die weitere Betrachtung orientiert sich an Abbildung 6.

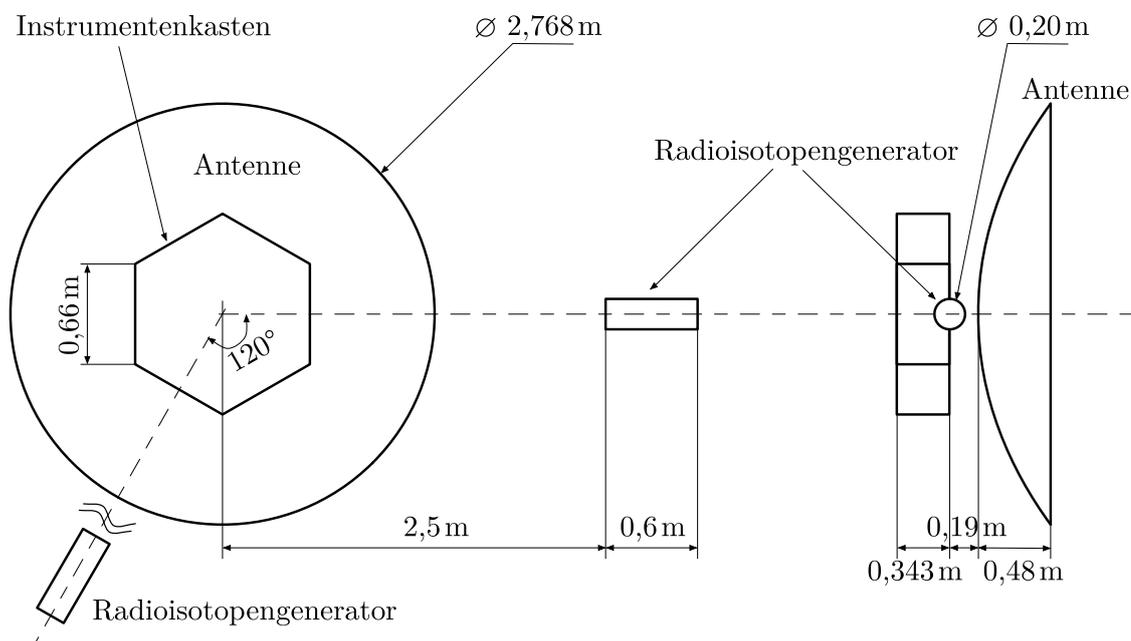


Abbildung 6: Pioneer 10 (von oben und von der Seite) mit Instrumentenkasten, Parabolantenne (Richtung Erde) und Radioisotopengeneratoren (kleine Zylinder).

Die Sonde ist nahezu rotationssymmetrisch und aufgrund der permanenten Rotation können nur Nettoeffekte in Achsrichtung auftreten.

Die Fläche der in der linken Skizze zu sehenden Oberseite des Kastens beträgt:

$$A_O = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (0,66 \text{ m})^2 \approx 1,13 \text{ m}^2 \quad (3.29)$$

und die Seitenfläche

$$A_S = 6 \cdot 0,66 \text{ m} \cdot 0,34 \text{ m} \approx 1,35 \text{ m}^2. \quad (3.30)$$

Die abgestrahlte Wärmeleistung ist proportional zur Fläche und Leitfähigkeit, daher sind die jeweiligen Leistungsanteile der Oberseite (k_O), der Seitenflächen (k_S) sowie der Unterseite (k_U) des Kastens:

$$\begin{aligned} k_O &= \frac{4 A_O}{4 A_O A_S + A_O} \approx 65\%, \\ k_S &= \frac{A_S}{4 A_O + A_S + A_O} \approx 19\%, \\ k_U &= \frac{A_O}{4 A_O + A_S + A_O} \approx 16\%. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die Oberseite des Kastens hat also den größten Anteil an der Wärmeabstrahlung. Für die weitere Untersuchung gibt es unterschiedliche Vorgehensweisen mit unterschiedlich groben Näherungen. Man könnte z.B. nur den Strahlungsanteil der Oberseite berechnen oder aber für jede Fläche die Abstrahlung explizit untersuchen.

Betrachte für eine hinreichend gute Näherung eine Aufspaltung der Beiträge in einen isotrop vom Kasten abgestrahlten Beitrag und einen zusätzlichen Beitrag der Oberseite des Kastens. Diese erhalten folglich einen jeweiligen Strahlungsanteil von

$$k_{\text{iso}} = \frac{A_O + A_S + A_O}{4 A_O + A_S + A_O} \approx 52\%, \quad k_{\text{zus}} = \frac{3 A_O}{4 A_O + A_S + A_O} \approx 48\%. \quad (3.32)$$

Isotroper Anteil: Zur Betrachtung dieses Anteils kann man den Instrumentenkasten als Punkt annähern, da er vergleichsweise klein zur Antenne ist und die Form bei relativ isotroper Abstrahlung keine große Rolle spielt. Würde die Strahlung die Sonde isotrop verlassen, so wäre davon kein Beitrag zur Beschleunigung zu erwarten. Ein Teil der von dem Kasten emittierten Strahlung trifft allerdings auf die Antenne und wird dort reflektiert.

Vereinfachend wird angenommen, dass sich bei der reflektierten Strahlung einfach die Komponente entgegen der Flugrichtung, d.h. die Radialkomponente bezüglich der Sonne, umkehrt. Dies entspricht einer flachen Antenne und überschätzt den Effekt etwas, da die Parabolantenne die Strahlen zum Rand hin weniger stark umlenkt. Außerdem werden auftretende mehrfache Reflektionen in dieser Betrachtung vernachlässigt.

Zur Berechnung des reflektierten Strahlungsanteils wird der Raumwinkel benötigt, unter dem die Antenne vom Mittelpunkt des Kastens gesehen wird. Der Winkel von der Mittelachse zur Antennenkante kann mit den Werten aus Abb. 6 berechnet werden:

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{2,768 \text{ m}}{2(0,34 \text{ m}/2 + 0,19 \text{ m} + 0,48 \text{ m})} \right) \approx 59^\circ. \quad (3.33)$$

Um nun den Impulsübertrag der isotropen Wärmestrahlung auf die Sonde zu bestimmen, müssen die auf die Verbindungslinie zur Sonne projizierten Strahlungsanteile über die Fläche des Parabolspiegels aufintegriert werden. Der entsprechende Anteil $\eta_{\text{iso,refl}}$ an der gesamten isotropen Strahlungsleistung ist:

$$\eta_{\text{iso,refl}} = \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^{\theta_0} \cos \theta \cdot \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{4} (1 - \cos^2 \theta_0) \approx 0,18. \quad (3.34)$$

Da die Strahlung zu 80% reflektiert und zu 20% absorbiert wird, muss dieser Anteil mit einem Faktor $2 \cdot 0,8 + 0,2$ gewichtet werden. Damit führt die isotrope Abstrahlung insgesamt zu einem Impulsübertrag pro Zeit in Richtung Sonne (daher ein negatives Vorzeichen) von

$$\dot{p}_{\text{iso}} = - \frac{1,8 \eta_{\text{iso,refl}} k_{\text{iso}} P}{c} \approx -0,17 \frac{P}{c} \quad (3.35)$$

Zusätzlicher Anteil: Für die zusätzliche Strahlung von der Oberseite des Kastens muss die Komponente der Strahlung in Flugrichtung mit der Lambert Charakteristik gewichtet und über alle Richtungen integriert werden:

$$\eta_{\text{zus}} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos \theta (\cos \theta \sin \theta \, d\theta)}{\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta} = \frac{2}{3} \quad (3.36)$$

Der Term im Nenner ist ein Normierungsfaktor, der daher rührt, dass die Integration der Strahlungsleistung über alle Raumwinkelanteile der Gesamtstrahlungsleistung der Oberfläche entsprechen muss.

Die zusätzlich von der Oberseite ausgesandte Strahlung führt damit ebenfalls zu einem Impulsübertrag pro Zeit in Richtung Sonne, der gegeben ist durch

$$\dot{p}_{\text{zus}} = - \frac{\eta_{\text{zus}} k_{\text{zus}} P}{c} \approx -0,32 \frac{P}{c} \quad (3.37)$$

Gesamteffekt: Zusammengenommen ergibt sich aus der isotropen Abstrahlung des Kastens und der zusätzlichen Abstrahlung von dessen Oberseite mit (3.28), (3.35) sowie (3.37) eine zusätzliche Beschleunigung von

$$a_{\text{Wärmestrahlung}} = \frac{\dot{p}_{\text{iso}} + \dot{p}_{\text{zus}}}{m} \approx - \frac{0,49 \cdot 79 \text{ W}}{241 \text{ kg} \cdot c} \approx -5,4 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2. \quad (3.38)$$

Das negative Vorzeichen bedeutet eine Beschleunigung in Richtung Sonne. Dieser Wert liegt tatsächlich in der gleichen Größenordnung wie die zuvor unerklärte Abweichung von $-8,8 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$.

Ist die Pioneer-Anomalie damit gelöst? Der berechnete Effekt sollte zusammen mit der Wärmeleistung zeitlich abfallen, die gemessene Anomalie ist jedoch annähernd konstant. Verbleibende Abweichungen sind allerdings relativ gering und können mit verschiedenen Unsicherheiten erklärt werden. Die Anomalie ist also möglicherweise gelöst, perfekte Einigkeit unter den Wissenschaftlern besteht aber nicht.

Eine ausführliche Diskussion der Anomalie und eine Untersuchung der Wärmestrahlungseffekte sind z.B. zu finden in

- John D. Anderson et al., *Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11*, *Phys.Rev. D* **65** (2002) [arXiv:gr-qc/0104064]
- F. Francisco, O. Bertolami, P. J. S. Gil, J. Páramos, *Modelling the reflective thermal contribution to the acceleration of the Pioneer spacecraft*, (2011) [arXiv:1103.5222]

Aufgabe 4 Experimentelle Aufgabe - Rinnsalphysik
(8 + 18 + 5 Punkte)
(Idee: Georg Schröter)
4.1 Oberflächenspannung von Wasser

- a) Zur Bestimmung eines Ausdruckes für die Oberflächenspannung wird die mechanische Gesamtenergie E_{ges} der Lache betrachtet. Diese besteht aus potentieller und Oberflächenenergie:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{ges}} &= \rho g h \pi r^2 \frac{h}{2} + \underbrace{\sigma \pi r^2}_{\text{Oberseite}} - \underbrace{\sigma_G \pi r^2}_{\text{Unterseite}} + \underbrace{\sigma 2 \pi r h}_{\text{Mantelfläche}} \\
 &= \frac{\rho g h^2 \pi r^2}{2} + \sigma \left((1 - \cos \theta) \pi r^2 + 2 \pi r h \right),
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

wobei ρ die Wasserdichte bezeichnet und die letzten drei Terme die Oberflächenspannungsbeiträge sind. Der Term für den Beitrag von der Lachenunterseite trägt ein negatives Vorzeichen, da der Beitrag der Unterseite bei einer hydrophilen Oberfläche, für die $\theta < 90^\circ$ ist, zu einer Energieerniedrigung führen muss, wenn sich die Fläche der Unterseite vergrößert⁴.

Da das Volumen $V = \pi r^2 h$ der Lache konstant ist, gilt $h = \frac{V}{\pi r^2}$ und damit

$$E_{\text{ges}} = \frac{\rho g V^2}{2 \pi r^2} + \sigma \left((1 - \cos \theta) \pi r^2 + \frac{2V}{r} \right).
 \tag{4.2}$$

Die Form der Lache muss die mechanische Energie minimieren, d.h. es muss gelten:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{dE_{\text{ges}}}{dr} = -\frac{\rho g V^2}{\pi r^3} + 2\sigma \left((1 - \cos \theta) \pi r - \frac{V}{r^2} \right).
 \tag{4.3}$$

Daraus ergibt sich für die Viskosität von Wasser der Ausdruck

$$\sigma = \frac{\rho g V^2}{2 \pi ((1 - \cos \theta) \pi r^4 - V r)} = \frac{\rho g h^2 r}{2 ((1 - \cos \theta) r - h)}.
 \tag{4.4}$$

b) Versuchsbeschreibung

Um die Oberflächenspannung von Wasser experimentell zu bestimmen, wurde eine Plexiglasplatte möglichst homogen mit Teelichtwachs überzogen und auf diese mit einer Pipette Wassertropfen mit bekanntem Volumen aufgebracht. Durch die Hydrophobizität der Oberfläche bildeten sich Lachen mit einer annähernd kreisförmigen Grundfläche. Der Radius der Tropfen wurde direkt mit einem Lineal gemessen. Zur Bestimmung des Kontaktwinkels wurden Fotos der Tropfen von der Seite gemacht (s. Abb. 7) und die Kontaktwinkel direkt auf einem Ausdruck der Fotos vermessen. Zur besseren Darstellung der Tropfen auf den Fotos wurde das Wasser mit ein wenig Füllertinte eingefärbt. Die ermittelten Werte waren aber identisch zu denen ohne Tintenzugabe.

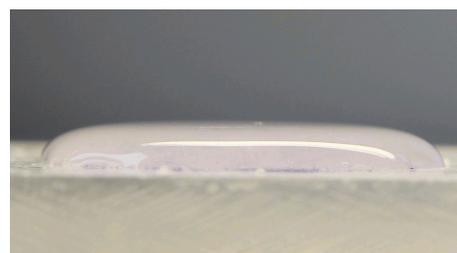


Abbildung 7: Foto zur Kontaktwinkelmessung (Wasser mit etwas Tinte eingefärbt).

Mit diesen Daten lässt sich die Oberflächenspannung von Wasser aus (4.4) berechnen.

⁴Tatsächlich besteht die in der Aufgabe mit σ_G bezeichnete Grenzflächenspannung aus zwei Beiträgen. Der Oberflächenspannung σ_{FK} des Festkörpers auf dem sich die Lache befindet zur Luft und der Grenzflächenspannung $\sigma_{\text{Wasser-FK}}$ zwischen der Lache und dem Festkörper. Es gilt nach der Youngschen Gleichung $\sigma_G = \sigma_{\text{FK}} - \sigma_{\text{Wasser-FK}}$. Für eine hydrophile Oberfläche ist $\sigma_{\text{FK}} > \sigma_{\text{Wasser-FK}}$. Bei einer Vergrößerung der Lachenunterseite nimmt die Grenzfläche zwischen Lache und Unterseite zu, während die Oberfläche des Festkörpers abnimmt. Daher das negative Vorzeichen in obiger Energiebilanz. Eine entsprechende Argumentation gilt für hydrophile Oberflächen.

Messwerte und Auswertung

Die folgende Tabelle gibt die aufgenommenen Messwerte für vier Tropfen wieder. d bezeichnet dabei den Durchmesser der Tropfen. Der Kontaktwinkel wurde jeweils an beiden auf dem Foto zu sehenden Seiten gemessen und gemittelt. Dabei lässt sich der Winkel bei sorgfältiger Versuchsdurchführung sehr genau bestimmen. Die Umgebungs- und Wassertemperatur betrug während der Messungen etwa 22°C .

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Oberflächenspannung von Wasser.

Nr.	V / mL	d / cm	r / cm	$\theta / ^\circ$	$\sigma / \text{J m}^2$	$\Delta\sigma / \text{J m}^{-2}$
1	3,0	3,45	1,73	87	0,066	0,021
2	3,0	3,40	1,70	85	0,075	0,025
3	3,0	3,35	1,68	86	0,078	0,026
4	3,0	3,35	1,68	82	0,086	0,030
Mittelwert					0,076	

Die letzte Spalte gibt die Fehler in den Einzelmessungen der Oberflächenspannung gemäß der Fehlerdiskussion im folgenden Abschnitt an.

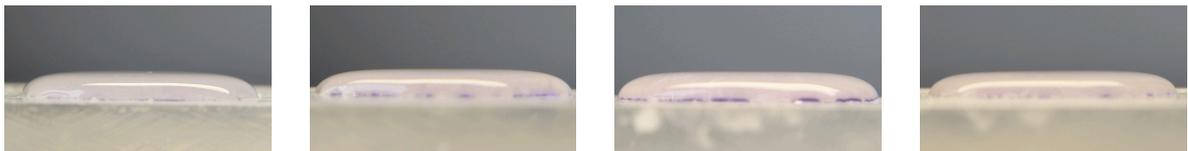


Abbildung 8: Fotos der Tropfen, die für die Kontaktwinkelmessung verwendet wurden in der Reihenfolge 1, 2, 3 und 4 (v.l.n.r.).

Fehlerrechnung

Der Fehler $\Delta\sigma$ in der Messung der Viskosität von Wasser lässt sich aus (4.4) über eine Fehlerfortpflanzung bestimmen zu

$$\begin{aligned}
 \Delta\sigma &= \left| \frac{\partial\sigma}{\partial V} \right| \Delta V + \left| \frac{\partial\sigma}{\partial r} \right| \Delta r + \left| \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \right| \Delta\theta \\
 &= \frac{\sigma}{(1 - \cos\theta) \pi r^4 - V r} \left\{ \left| \frac{2((1 - \cos\theta) \pi r^4 - V r)}{V} + r \right| \Delta V \right. \\
 &\quad \left. + |(1 - \cos\theta) 4 \pi r^3 - V| \Delta r + |\sin\theta \pi r^4| \Delta\theta \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Die einzelnen Fehler lassen sich aus dem Experiment abschätzen zu

$$\Delta V = 0,1 \text{ mL}, \quad \Delta r = 0,04 \text{ cm}, \quad \Delta\theta = 3^\circ. \tag{4.6}$$

Dabei wurde ΔV als systematischer (Ablese-)fehler angenommen und für die Bestimmung von Δr und $\Delta\theta$ die Standardabweichungen des Mittelwertes des Tropfendurchmessers bzw. des Kontaktwinkels sowie ein systematischer Ablesefehler von $0,5 \text{ mm}$ bzw. 2° verwendet.

Damit lässt sich die bestimmte Oberflächenspannung von Wasser als Mittelwert angeben zu

$$\sigma = (0,076 \pm 0,017) \text{ J m}^{-2}. \tag{4.7}$$

Der Fehler der Messungen beträgt also etwa 23%. Der Wert ist in sehr guter Übereinstimmung mit dem Literaturwert, der nach <http://de.wikipedia.org/wiki/Oberflächenspannung> für eine Wassertemperatur von 20° C bei $\sigma = 0,07275 \text{ J m}^{-2}$ liegt.

4.2 Bestimmung der Viskosität von Wasser

- c) Analog zu Aufgabenteil a) muss sich das Rinnsal so ausbilden, dass es die mechanische Energie, hier allerdings pro Länge, bei fester Querschnittsfläche A minimiert. Die mechanische Energie pro Länge ℓ ist gegeben durch

$$\frac{E_{\text{ges}}}{\ell} = A \rho g \frac{h}{2} \cos \alpha + \sigma ((1 - \cos \theta) b + 2h), \quad (4.8)$$

wobei die Variablenbezeichnungen wie in der Aufgabenstellung gewählt wurden.

Das Minimieren der Energie nach h bei festem $A = bh$ führt auf die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{dE_{\text{ges}}/\ell}{dh} = \frac{A \rho g \cos \alpha}{2} + 2\sigma - \frac{A\sigma}{h^2} (1 - \cos \theta) \\ &\stackrel{A=bh}{=} \frac{\rho g b \cos \alpha}{2} h + 2\sigma - \frac{b\sigma}{h} (1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Damit ergibt sich für die Höhe h des Rinnsals eine quadratische Gleichung mit der gesuchten und einzig physikalisch sinnvollen Lösung

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g b \cos \alpha} \left(\sqrt{\frac{(1 - \cos \theta) \cos \alpha b^2 \rho g}{2\sigma} + 1} - 1 \right). \quad (4.10)$$

- d) Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils in dem Rinnsal betrachte eine dünne, parallel zur Unterlage orientierte Wasserschicht der Dicke Δx , die eine Fläche S parallel zur Unterlage besitzt und dessen Unterseite sich in einem Abstand x zu der Unterlage befindet. Auf diese Wasserschicht wirkt insgesamt die Kraft

$$\Delta F = \rho g S \Delta x \sin \alpha + S \eta \left(\frac{dv}{dx}(x + \Delta x) - \frac{dv}{dx}(x) \right) = S \Delta x \left(\rho g \sin \alpha + \eta \frac{d^2v}{dx^2} \right). \quad (4.11)$$

mit dem Ausdruck $\Delta m = \rho S \Delta x$ für die Masse der Wasserschicht und $\Delta F = \Delta m a$ ergibt sich daraus für den Fall eines stationären Fließverhaltens

$$0 = a = g \sin \alpha + \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (4.12)$$

Mit den gegebenen Randbedingungen $v(0) = 0$ und $\frac{dv}{dx}(h) = 0$ folgt damit für das Geschwindigkeitsprofil

$$v(x) = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \left(hx - \frac{1}{2} x^2 \right). \quad (4.13)$$

- e) Der gesuchte Volumenstrom $\Delta V/\Delta t$ ergibt sich nun mit (4.13) zu

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = b \int_0^h dx v(x) = \frac{\rho g b h^3 \sin \alpha}{3\eta}. \quad (4.14)$$

- f) Mit dem Ergebnis (4.14) aus dem vorigen Aufgabenteil kann die Viskosität von Wasser nach

$$\eta = \frac{\rho g b h^3 \sin \alpha}{3 \frac{\Delta V}{\Delta t}} \quad (4.15)$$

bestimmt werden. Die Höhe des Rinnsals kann dabei mit Hilfe von (4.10) durch andere Messgrößen ausgedrückt werden.

Versuchsbeschreibung

Zur Aufnahme der relevanten Parameter wurde die bereits für die Kontaktwinkelmessung verwendete Plexiglasplatte als schiefe Ebene mit sehr geringer Neigung verwendet. Die Plexiglasplatte hat eine Länge von $\ell = (30,0 \pm 0,1)$ cm und wurde zur Erhöhung an einer Seite auf einen flachen Stapel Metallplättchen gelegt. Mit Hilfe eines Schlauches (ein Wasserhahn geht auch) wurde vorsichtig Wasser auf den oberen Teil der Platte laufen gelassen, so dass sich ein Wasserrinnsal entlang der schiefen Ebene einstellte. An diesem wurden die zur Bestimmung der Viskosität notwendigen Parameter gemessen. Diese sind:

- Breite b des Rinnsals gemessen mit dem Lineal an mehreren Stellen des als stationär fließend angenommenen mittigen Abschnittes des Rinnsals,
- Anzahl n der Metallplättchen, die unter das obere Ende der Platte gelegt werden,
- Neigungswinkel α der Ebene. Bestimmt aus $\sin \alpha = n d / \ell$, wobei $d = (0,20 \pm 0,01)$ cm die Dicke einer der Metallplatten ist,
- Wasservolumenstrom $\Delta V / \Delta t$ gemessen durch Auffangen des fließenden Wassers in einem Messzylinder und Abmessen des Volumens V , das in der Zeit $t = 30$ s aufgefangen wird.



Abbildung 9: Foto des Versuchsaufbaus für die Bestimmung der Viskosität.

Der für die Berechnung der Höhe des Rinnsals noch notwendige Kontaktwinkel und die Oberflächenspannung wurden aus dem ersten Versuchsteil übernommen.

Das passende Einstellen der Versuchsbedingungen ist nicht ganz einfach. Bei einer zu starken Neigung der Ebene oder einem zu starken Wasserfluss, beginnt das Rinnsal sehr stark hin und her zu wandern. Da nur geringe Steigungen verwendet wurden, wurde die Platte zunächst mit einer Wasserwaage möglichst genau horizontal ausgerichtet.

Messwerte und Auswertung

Die folgende Tabelle stellt die aufgenommenen Messwerte zur Viskositätsbestimmung dar. Die Wassertemperatur betrug während der Messungen etwa 15°C .

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung der Viskosität von Wasser.

n	b / cm	V / mL	$\alpha / ^\circ$	h / cm	$\eta / \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
2	1,50	120	0,8	0,29	$3,9 \cdot 10^{-3}$
3	1,10	126	1,1	0,26	$3,0 \cdot 10^{-3}$
4	1,10	119	1,5	0,26	$4,3 \cdot 10^{-3}$
5	1,00	138	1,9	0,25	$3,8 \cdot 10^{-3}$
6	0,95	126	2,3	0,25	$4,5 \cdot 10^{-3}$

n	b / cm	V / mL	$\alpha / ^\circ$	h / cm	$\eta / \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
7	0,85	130	2,7	0,25	$3,9 \cdot 10^{-3}$
8	0,80	136	3,1	0,23	$3,7 \cdot 10^{-3}$
9	0,75	136	3,4	0,22	$3,6 \cdot 10^{-3}$
10	0,70	130	3,8	0,22	$3,5 \cdot 10^{-3}$
11	0,60	134	4,2	0,20	$2,5 \cdot 10^{-3}$
12	0,55	136	4,6	0,19	$2,1 \cdot 10^{-3}$
14	0,50	130	5,4	0,18	$2,0 \cdot 10^{-3}$
Mittelwert					$3,4 \cdot 10^{-3}$

Fehlerbetrachtung

Die Fehler der bestimmten Werte für die Viskosität sind in diesem Experiment insbesondere aufgrund der relativ großen Fehlern in den Eingangsgrößen sehr groß. Im Einzelnen können die Fehler abgeschätzt werden zu $\Delta b = 0,1 \text{ cm}$, $\Delta V = 5 \text{ mL}$ und $\Delta t = 0,2 \text{ s}$. Die Fehler in dem Winkel α , der Höhe h und damit schließlich der Viskosität η ergeben sich aus der Fehlerfortpflanzung der gemessenen Größen.

Der mit Abstand größte Anteil am Fehler der Viskosität stammt aus dem Fehler in der Berechnung der Rinnsalhöhe, in die viele Messgrößen und die Fehler aus dem ersten Versuchsteil mit eingehen. Die Fehler der einzelnen Höhenmessungen liegen nach Fehlerfortpflanzung⁵ zwischen 50% und etwa 100%, so dass der Fehler im Ergebnis für die Viskosität auch in diesem Bereich liegen wird. Damit lässt sich die bestimmte Viskosität für Wasser dieser Temperatur angeben zu

$$\eta = (1 \pm 0,7) 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (4.16)$$

g) Der tatsächlich Wert für die Viskosität liegt nach <http://de.wikipedia.org/wiki/Viskosität> zwischen $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ (bei 20° C) und $1,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ (bei 10° C). Aufgrund des großen Fehlers des bestimmten Wertes ist der tatsächliche Wert mit den Messwerten verträglich. Dennoch liefert diese Methode keine sehr guten Ergebnisse. Es gibt mehrere Ursachen für diese schlechte Passung:

- Zum einen wurden in der theoretischen Betrachtung einige Näherungen gemacht, deren Gültigkeit nicht gegeben sein muss. Zum Beispiel besitzt das Rinnsal keinen quaderförmigen Querschnitt und der hier verwendete Kontaktwinkel aus dem ersten Teil muss bei fließenden Flüssigkeiten nicht mehr der gleiche sein.
- Darüber hinaus sind einige der Größen nur ungenau messbar. Dazu zählen zum Beispiel die Breite des Rinnsals, die bei vielen Messungen entlang des Rinnsals variiert hat.
- Schließlich können Turbulenzen in dem Rinnsal dazu führen, dass die gemessenen Viskositäten größer als die Viskositäten einer laminaren Strömung sind. Dieser Effekt wird in dem letzten Versuchsteil noch einmal deutlich werden.

⁵Die vollständige Fehlerfortpflanzung ist sehr umfangreich und wird hier daher nicht dargestellt. Aber auch mit einer größeren Abschätzung des Fehlers (z.B. durch Summierung der relativen Fehler oder Betrachtung der maximalen und minimalen Werte) gelangt man zu dem Schluss, dass der Fehler in der Höhe des Rinnsals in der Größenordnung der Höhe selbst liegt.

4.3 Vergleichsexperiment zur Viskositätsbestimmung

h) Vorüberlegung

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille besagt, dass für den Volumenstrom $\Delta V/\Delta t$ einer Flüssigkeit durch ein Rohr der Länge ℓ im Falle einer laminaren Strömung der Zusammenhang

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{\ell} \quad (4.17)$$

gilt. Dabei bezeichnen r den Radius des Rohres und Δp die Druckdifferenz in der Flüssigkeit zwischen den beiden Enden des Rohres. Aus einer Bestimmung des Volumenstromes in einem Rohr bekannter Länge und mit bekanntem Durchmesser kann man demnach also bei bekannter Druckdifferenz die Viskosität der verwendeten Flüssigkeit bestimmen. Wird die Druckdifferenz alleine durch den Schweredruck der Flüssigkeit erzeugt, gilt

$$\eta = \frac{\pi r^4 \rho g h \Delta t}{8 \ell \Delta V}, \quad (4.18)$$

wobei ρ die Dichte der Flüssigkeit ist und h die Höhendifferenz der Flüssigkeitsspiegel zwischen Anfang und Ende des Rohres bezeichnet.

Versuchsbeschreibung

Um die Viskosität von Wasser mit Hilfe des Gesetzes von Hagen-Poiseuille zu bestimmen, wurde eine Plastikflasche im oberen Teil abgeschnitten und ein Loch in die Seitenwand gebohrt, in das ein Strohhalm bzw. später ein Schlauch gesteckt wurde. Das Loch in der Seitenwand wurde außerdem mit Knetmasse abgedichtet. Die Flasche wurde für den Versuch unter einen Wasserhahn gestellt, der so eingestellt war, dass die Flasche während des gesamten Versuches vollständig gefüllt war. Dadurch blieb der Wasserspiegel auf der einen Seite des Strohhalmes stets auf der gleichen Höhe. Die Höhe der anderen Seite des Strohhalmes wurde variiert und der Volumenstrom durch Messen des in einer bestimmten Zeit aus dem Strohhalm austretenden Wasservolumens gemessen.

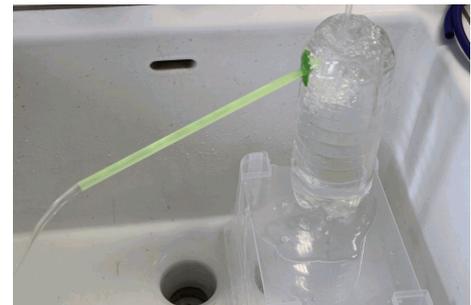


Abbildung 10: Foto des Versuchsaufbaus für die Bestimmung der Viskosität nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille.

Die Höhendifferenz zwischen den Wasserspiegeln an den beiden Seiten des Strohhalmes konnte mit einem an einer Wasserwaage befestigten Lineal relativ genau gemessen werden.

Messwerte und Auswertung

Die folgende Tabelle stellt die aufgenommenen Messwerte zur Viskositätsbestimmung mit Hilfe des Gesetzes von Hagen-Poiseuille dar. Die Wassertemperatur betrug während der Messungen wie in dem vorherigen Versuch etwa 15°C . Für die Messungen wurde, anders als auf dem Foto, ein Schlauch benutzt, da dieser mit $(0,30 \pm 0,02)$ cm einen deutlich geringeren Durchmesser als die vorhandenen Strohhälme besitzt. Die Länge des Schlauches beträgt $(33,4 \pm 0,2)$ cm. Außerdem wurden der Einfachheit halber die Bezeichnungen V und t für das Volumen und die Zeit verwendet.

Tabelle 3: Messwerte zur Bestimmung der Viskosität von Wasser.

Nr.	h / cm	V / mL	t / s	t / s	$t_{\text{mean}} / \text{s}$	$\eta / \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
1	1,40	26	40,0	40,0	40,0	$1,3 \cdot 10^{-3}$
2	2,25	33	40,1	41,1	40,6	$1,6 \cdot 10^{-3}$
3	2,70	42	40,1	41,2	40,7	$1,5 \cdot 10^{-3}$
4	3,10	48	40,2	40,4	40,3	$1,5 \cdot 10^{-3}$
5	3,40	54	41,0	41,2	41,1	$1,5 \cdot 10^{-3}$
6	3,95	58	39,9	41,1	40,5	$1,6 \cdot 10^{-3}$
7	4,50	62	40,2	42,5	41,4	$1,7 \cdot 10^{-3}$
Mittelwert						$1,5 \cdot 10^{-3}$

Fehlerbetrachtung

Für die Fehler bei den Einzelmessungen kann die folgende Abschätzung verwendet werden:

$$\Delta h = 0,05 \text{ cm} \qquad \Delta V = 2 \text{ mL} . \qquad (4.19)$$

Der Fehler in der Zeitmessung ergibt sich aus der Standardabweichung des Mittelwertes und einem zusätzlichen systematischen Fehler bei der Zeitstoppung, der auf 0,2s geschätzt wird. Der Fehler der Viskosität ergibt sich daher nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta \eta = \eta \left(\frac{4 \Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta V}{V} \right) . \qquad (4.20)$$

Für den Mittelwert der Viskosität ergibt sich daraus

$$\eta = (1,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} . \qquad (4.21)$$

Der Fehler ist mit etwa 35% also deutlich kleiner als in dem vorherigen Experiment und das Ergebnis passt auch besser zu dem theoretisch erwarteten.

Für größere Höhendifferenzen und damit größere Fließgeschwindigkeiten macht sich auch in diesem Fall der Einfluss von Turbulenzen sehr bemerkbar und die gemessene Viskosität steigt stark an. Daher ist es wichtig, bei möglichst geringen Höhendifferenzen zu messen.

Bewertungsvorschläge

Gemäß den Gepflogenheiten bei der Internationalen PhysikOlympiade sollte primär die Richtigkeit der Lösung bewertet werden und weniger die Sauberkeit der Ausarbeitung oder der sprachliche Ausdruck. Wie auf dem Aufgabenblatt vermerkt, sind computergenerierte Lösungen nicht zulässig.

Die angegebenen Punktzahlen beziehen sich jeweils auf den von uns ausgearbeiteten Lösungsweg. Bei anderen Lösungswegen muss die Bewertung sinngemäß abgeändert werden, wobei die Gesamtpunktzahl pro Aufgabe beizubehalten ist. Folgefehler sollten nicht bestraft werden. Die Verwendung eines falschen Zwischenergebnisses sollte, sofern sich dadurch keine starke Vereinfachung des Problems ergibt, also nicht zu Punktabzug führen. Dies bedeutet insbesondere, dass ein numerisches Ergebnis auch dann als korrekt gewertet werden sollte, wenn der Schüler vorher eine falsche Formel abgeleitet, aber korrekt mit dieser Formel weitergerechnet hat. Wenn bei einem Ergebnis die erforderliche Angabe einer Einheit fehlt, sollte dies zu Punktabzug führen.

Achten Sie darauf, dass den Lösungen der vollständig ausgefüllte Adressbogen mit den persönlichen Daten und der unterschriebenen Erklärung beiliegt!

Bitte geben Sie bei der Bewertung nicht nur die Gesamtpunktzahl pro Aufgabe an, sondern auch die Aufschlüsselung nach Teilleistungen gemäß der Bepunktungsvorlage auf der Rückseite des Adress- und Bewertungsbogens.

Aufgabe 1 Wirbelstrombremsung		Punkte
a)	Widerstand einer Sprosse (1.1)	1
	Ansatz zur Bestimmung des Widerstandes (z.B. unendliches Netzwerk)	2
	Anwendung von Parallel- und Reihenschaltung	1
	Analytischer Ausdruck für Widerstand in (1.4)	0,5
	Numerischer Ausdruck für Widerstand in (1.4)	0,5
b)	Idee der magnetischen Induktion	1
	Ausdruck für induzierte Spannung (1.5)	1
	Erkennen, dass die Leiterschleife im Magnetfeld spannungsfrei ist	1
	Idee, Ring aufzuschneiden	1
	Angabe einer Ersatzschaltung	1
	Ausdruck für Leistung (1.6)	1
	Verknüpfung von Leistung und Drehmoment	1
	Ergebnis für Drehmoment (1.7)	1
c)	Aufstellen der Bewegungsgleichung (1.8)	1
	Angabe des Trägheitsmomentes (1.9)	1
	Ansatz zum Lösen der Bewegungsgleichung in (1.10)	1
	Lösung der Bewegungsgleichung (1.10)	1
	Bestimmung der Masse des Ringes (1.11)	1
	Ergebnis für Zeit bis zum Abfall von ω auf die Hälfte (1.12)	1
		19

Aufgabe 2 Das Prinzip von Fermat		Punkte
a)	Zielführender Ansatz	1
	Restliche Lösung	1
b)	Zielführender Ansatz	1
	Aufstellen der Extremalbedingungen	1
	Lösung und (2.4)	1
c)	Ergebnis mit geometrischer Begründung	3
d)	Reduktion auf zweidimensionalen Fall	1
	Beschreibung der Lichtwege	1
	Beziehung wie (2.5) für Lichtweglänge	1
	Ergebnis (2.6) und Erweiterung auf 3D	1
e)	Beschreibung der Lichtwege	1
	Bedingung für konstante Lichtweglängen (2.7)	1
	Lösen der Gleichung und Ergebnis (2.10)	2
	Spezialfall (2.11)	1
	Beschreibung der Bedeutung der Steigung	1
	Ergebnis für Grenzwinkel der Totalreflexion (2.13)	1
		19

Aufgabe 3 Pioneer-Anomalie		Punkte
a)	Gravitationspotential (3.1)	0,5
	Bestimmung der Bahngeschwindigkeit der Erde (3.3)	1
	Aufstellen des Energiesatzes (3.5)	1
	Ergebnis für Geschwindigkeit vor Swing-By (3.6)	0,5
	Drehimpulserhaltung und Zerlegung in (3.7)	1
	Behandlung des Swing-by Manövers und (3.10)	2
	Ergebnis (3.12) für Radialgeschwindigkeit	1
	Grenzfall für große Abstände (3.13)	1
b)	Relativistische Energie-Impuls Beziehung (3.14)	0,5
	Strahlungsleistung pro Fläche (3.15)	1
	Ansatz für Kraft und Impulsübertrag	1
	Ausdruck für Beschleunigung (3.16)	1
	Numerisches Ergebnis (3.17)	0,5
c)	Abnahme der Protonendichte	0,5
	Masse (3.18)	1
	Ausdruck für Beschleunigung (3.19)	1
	Numerisches Ergebnis (3.20)	0,5
d)	Zusammenhang zwischen Leistung und Kraft	1
	Analytisches Ergebnis in (3.21)	0,5
	Numerisches Ergebnis in (3.21)	0,5
e)	Idee und Formel für nichtrelativistische Dopplerverschiebung (3.22)	1
	Radialgeschwindigkeit im Abstand von 50 AE (3.23)	0,5
	Frequenzverschiebung (3.24)	1
	Ableiten des Ausdrucks für zusätzliche Beschleunigung (3.25)	1
	Numerisches Ergebnis für Beschleunigung (3.26)	0,5
f)	Ausdruck (3.27) für elektrische Leistung	1
	Angabe unterschiedlicher Leistungsanteile wie in (3.31)	1
	Beschreibung einer sinnvollen Näherung	2
	Durchführung der gewählten Näherungsmethode	4
	Ergebnis für zusätzliche Beschleunigung (3.38)	1
	Diskussion des Ergebnisses	1
		31

Aufgabe 4 Rinnsalphysik		Punkte
<i>Aufgabe 4.1 Oberflächenspannung von Wasser</i>		
a)	Energiebilanz (4.1)	1
	Verwenden konstantes Volumen und Aufstellen Extramelbedingung (4.3)	1
	Formel (4.4) für Oberflächenspannung	1
b)	Beschreibung einer Methode für Durchführung und des Aufbaus	1
	Aufnahme einer ausreichenden Anzahl von Messwerten	2
	Plausibles Ergebnis für Oberflächenspannung (Abweichung sollte unter 40% liegen)	1
	Fehlerabschätzung	1
<i>Aufgabe 4.2 Bestimmung der Viskosität von Wasser</i>		
c)	Energiebilanz (4.8)	1
	Extremalbedingung (4.9)	0,5
	Formel für Höhe (4.10)	0,5
d)	Kraftansatz zu Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils (4.11)	1
	Bewegungsgleichung (4.12)	1
	Ergebnis (4.13) für Geschwindigkeitsprofil	1
e)	Aufstellen der Formel für den Volumenstrom	1
	Ergebnis (4.14) für Volumenstrom	1
f)	Beschreibung einer Methode für Durchführung und des Aufbaus	2
	Aufnahme einer ausreichenden Anzahl von Messwerten	3
	Plausibles Ergebnis für Viskosität (Größenordnung sollte stimmen)	2
	Fehlerabschätzung	1
g)	Vergleich des Ergebnisses mit Literaturwert	1
	Diskussion zu mindestens drei möglichen Gründen für Abweichungen	2
<i>Aufgabe 4.3 Vergleichsexperiment zur Viskositätsbestimmung</i>		
h)	Theoretische Betrachtung und Formel wie (4.18)	0,5
	Beschreibung einer Methode für Durchführung und des Aufbaus	1
	Aufnahme einer ausreichenden Anzahl von Messwerten	2
	Plausibles Ergebnis für Viskosität (sollte deutlich besser sein als in f)	1
	Fehlerabschätzung	0,5
		31

Es ist in dieser Aufgabe nicht zu erwarten, dass die Teilnehmenden sehr genaue Ergebnisse heraus bekommen.

Summe der Punkte 100