

48. Internationale PhysikOlympiade Bali, Indonesien 2017



Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen
Tel.: 0431 / 880 - 5120
email: petersen@ipho.info

Sekretariat

Lulu Hoffmeister
Tel.: 0431 / 880 - 5387
email: sekretariat@ipho.info

Anschrift: IPN an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel

Fax: 0431 / 880 - 3148
Webseite: www.ipho.info

Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 48. IPhO 2017

Diese Musterlösungen und Bepunktungsrichtlinien waren die Grundlage der Bewertung der Arbeiten der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur Internationalen PhysikOlympiade 2017. Bei abweichenden Lösungswegen wurden die Bewertungen entsprechend angepasst.

Die Lösungen enthalten möglicherweise noch Fehler. Für Hinweise und Verbesserungsvorschläge unter petersen@ipho.info sind wir sehr dankbar.

Naturkonstanten und gebräuchliche Größen

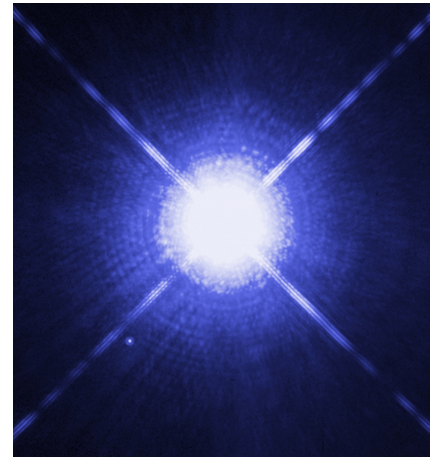
Konstante	gebräuchliche Formelzeichen	Wert
Absoluter Nullpunkt	T_0	0 K = $-273,15\text{ }^\circ\text{C}$
Atomare Masseneinheit	u	$1,660\,565\,5 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6,022\,136\,7 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1,380\,658 \cdot 10^{-23}\text{ J K}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12}\text{ A s V}^{-1}\text{ m}^{-1}$
Elementarladung	e	$1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19}\text{ A s}$
Fallbeschleunigung auf der Erde	g	$9,806\,65\text{ m s}^{-2}$
Gravitationskonstante	γ, G	$6,672\,59 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c_0	$2,997\,924\,58 \cdot 10^8\text{ m s}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$1,256\,637\,061\,4 \cdot 10^{-6}\text{ V s A}^{-1}\text{ m}^{-1}$
Normdruck, Atmosphärendruck	p_n	$101\,325\text{ N m}^{-2}$
Planck'sches Wirkungsquantum	h	$6,626\,075\,5 \cdot 10^{-34}\text{ J s}$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9,109\,389\,7 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1,674\,928\,6 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	$1,672\,623\,1 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$1,097\,373\,153\,4 \cdot 10^7\text{ m}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	α, σ	$5,670\,32 \cdot 10^{-8}\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-4}$
Universelle Gaskonstante	R	$8,314\,510\text{ J K}^{-1}\text{ mol}^{-1}$
Elektronenvolt	eV	$1\text{ eV} = 1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19}\text{ J}$

Aufgabe 1 Weiße Zwerge

(6+9+7+8 Pkt.)

1.1 Die Entdeckung von Sirius B

Der von der Erde etwa 8,6 Lichtjahre entfernte Stern Sirius A besitzt bei einer Masse von etwa $4,2 \cdot 10^{30}$ kg eine etwa 25 Mal so große Leuchtkraft wie die Sonne. Der Stern emittiert also etwa das 25-fache der Strahlungsleistung der Sonne, deren Strahlungsleistung bei $3,8 \cdot 10^{26}$ W liegt. Aufgrund der relativ geringen Entfernung zum Sonnensystem ist Sirius A mit einer scheinbaren Helligkeit¹ von $-1,46$ mag der hellste Stern am Nachthimmel und daher seit langer Zeit Gegenstand astronomischer Untersuchungen. Gegen Mitte des 19. Jahrhunderts wurde aufgrund von Unregelmäßigkeiten der Bewegung von Sirius auf einen Begleiter dieses Sterns geschlossen.



In den folgenden Jahrzehnten konnte bestätigt werden, dass Sirius ein Doppelsternsystem ist. Der zweite Stern, Sirius B, besitzt etwa die Hälfte der Masse von Sirius A und eine Oberflächentemperatur von ungefähr $2,5 \cdot 10^4$ K. Dies sorgte für großes Aufsehen, da der Stern mit einer scheinbaren Helligkeit von $8,44$ mag sehr viel schwächer leuchtet, als man es aufgrund dieser Daten erwartet hätte. Damit musste Sirius B sehr klein und sehr dicht sein.

Abbildung 1: *Sirius A und Sirius B vom Hubble-Weltraumteleskop aufgenommen (NASA, ESA, H. Bond (STScI), und M. Barstow (U. of Leicester), liz. CC BY 3.0).*

Der englische Astronom Arthur Stanley Eddington fasste dies folgendermaßen zusammen:

We learn about the stars by receiving and interpreting the messages which their light brings to us. The message of the Companion of Sirius when it was decoded ran: "I am composed of material 3,000 times denser than anything you have ever come across; a ton of my material would be a little nugget that you could put in a matchbox." What reply can one make to such a message? The reply which most of us made in 1914 was "Shut up. Don't talk nonsense." (Eddington, A.S. (1927). *Stars and Atoms*. Clarendon Press, p.50.)

- 1.a) Schätzen Sie mit den im Text gegebenen Informationen die Leuchtkraft des Begleitsterns Sirius B und dessen Radius ab. Beachten Sie dabei, dass das Spektrum von Sirius B aufgrund der höheren Oberflächentemperatur gegenüber dem von Sirius A verändert und, in der Folge, die aus der scheinbaren Helligkeit bestimmte Leuchtkraft etwa um einen Faktor 10 zu niedrig ist. (4 Pkt.)
- 1.b) Berechnen Sie damit, wie viel ein Kubikzentimeter Materie von Sirius B im Mittel etwa wiegt und wie groß die Schwerebeschleunigung an dessen Oberfläche ungefähr ist. (2 Pkt.)

Die Ergebnisse der obigen Aufgaben zeigen, dass es sich bei Sirius B um einen sehr speziellen Stern handeln muss. Tatsächlich gehört er zu einer Klasse Sterne, die weiße Zwerge genannt werden. Weiße Zwerge sind sehr kompakte Überreste von Sternen, in denen die Fusionsprozesse bereits zum Erliegen gekommen sind. Was aber hindert diese Sterne daran, weiter in sich zusammenzufallen? Dieser Frage sollen Sie sich in den folgenden Aufgaben widmen.

¹Die scheinbare Helligkeit m eines Objektes ist ein Maß dafür, wie hell es einem Beobachter auf der Erde erscheint. Sie ist definiert über die von dem Objekt in einem bestimmten Wellenlängenbereich auf der Erde pro Fläche eintreffende Strahlungsleistung S . Für die scheinbare Helligkeit gilt $m = -2,5 \log_{10} \frac{S}{S_0}$, wobei S_0 ein fester Referenzwert für die Strahlungsleistung in dem betrachteten Wellenlängenbereich ist. Die scheinbare Helligkeit wird als Zahl angegeben und trägt den Zusatz mag für „Magnitudo“.

1.2 Phasenraumbetrachtung und entartetes Fermigas

In der klassischen Mechanik, wird der Zustand eines Partikels durch dessen Ort \vec{r} und dessen Geschwindigkeit \vec{v} beschrieben. Alternativ kann statt der Geschwindigkeit auch der Impuls \vec{p} des Partikels verwendet werden. Ort und Impuls des Partikels lassen sich als Koordinaten in dem so genannten Phasenraum auffassen. Jeder mögliche Zustand des Partikels entspricht dabei einer Position im Phasenraum. Da es jeweils drei Dimensionen für den Ort und den Impuls gibt, besitzt der Phasenraum in diesem Fall sechs Dimensionen.

Die Heisenbergsche Unschärferelation der Quantenmechanik sagt nun aus, dass Ort und Impuls eines Partikels nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmbar sind. Für die Unbestimmtheiten Δr_x und Δp_x in eine beliebige Raumrichtung x gilt in der Formulierung von Heisenberg

$$\Delta r_x \cdot \Delta p_x \geq h.$$

Dabei bezeichnet $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js das Plancksche Wirkungsquantum. Damit entspricht ein Teilchenzustand weniger einem Punkt im Phasenraum sondern einem Volumen der Größe h^3 . Für so genannte Fermionen², zu denen sowohl Elektronen als auch Protonen und Neutronen gehören, gilt darüber hinaus das Pauli-Prinzip, nach dem zwei Teilchen gleicher Art nicht gleichzeitig in dem selben Zustand existieren können. Daher überlappen die gerade beschriebenen Phasenraumvolumina für diese Teilchen nicht. Aufgrund der beiden möglichen Spinorientierungen von Fermionen kann aber jedes Phasenraumvolumenelement zwei Teilchen aufnehmen.

Betrachten Sie ein Gas einer Sorte fermionischer Teilchen der Masse m . Das Gas sei auf ein Kugelvolumen mit Radius R verteilt und besitze eine Teilchendichte n . Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Teilchen sehr groß ist. Im Grundzustand, also am Temperaturnullpunkt, nehmen die Fermionen einen energetisch möglichst tiefen Zustand ein und besitzen damit auch einen möglichst geringen Impuls. Aufgrund der obigen Betrachtungen können die Teilchen allerdings nicht alle einen sehr kleinen Impuls und damit eine niedrige kinetische Energie besitzen.

- 1.c) Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Betrachtungen den maximalen Impulsbetrag p_F eines Teilchens in dem Fermigas am Temperaturnullpunkt. Berücksichtigen Sie dabei nur die beschriebenen quantenmechanischen Effekte und vernachlässigen Sie alle anderen Wechselwirkungen. Zeigen Sie, dass die entsprechende kinetische Energie E_F , die so genannte Fermienergie, eines Teilchens gegeben ist durch (3 Pkt.)

$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} n^{2/3}.$$

Wenn die thermische Energie der Teilchen deutlich kleiner als die Fermienergie ist, bestimmt letztere auch oberhalb des Temperaturnullpunktes das Verhalten eines Fermigases. Das Gas kann dann näherungsweise so behandelt werden als wäre es am Temperaturnullpunkt. Man spricht in diesem Fall von einem entarteten Fermigas.

- 1.d) Bestimmen Sie die gesamte kinetische Energie des entarteten Fermigases als Funktion der Teilchenmasse, des Radius und der Teilchendichte. (3 Pkt.)

Wenn der Radius des Gasvolumens verringert wird, erhöht sich entlang der obigen Betrachtung dessen kinetische Energie. Es muss also Arbeit gegen einen Druck aufgewandt werden, um das Gasvolumen zu komprimieren. Dieser Druck wird Entartungsdruck genannt.

²Die vollständige Beschreibung eines Fermigases erfolgt eigentlich im Rahmen der Quantenstatistik. Die vorgestellte semiklassische Untersuchung reproduziert aber die auftretenden Abhängigkeiten korrekt.

- 1.e) Bestimmen Sie die aus dem Entartungsdruck resultierende nach außen gerichtete Kraft des nicht-relativistischen Fermigases. Vergleichen Sie die Größe dieser Kraft für ein Elektronen- und ein Protonengas. Begründen Sie damit, warum der Entartungsdruck in einem Stern nahezu ausschließlich durch die Elektronen hervorgerufen wird. (3 Pkt.)

1.3 Sternentwicklung

Nun aber zurück zu den Sternen: In einem Stern wie unserer Sonne wirkt der durch die Fusionsprozesse im Inneren entstehende Strahlungsdruck der Kontraktion des Sternes aufgrund der Gravitation entgegen.

- 1.f) Leiten Sie einen Ausdruck für die potentielle Energie, die ein Stern mit Radius R , konstanter Dichte und Masse M aufgrund seines Gravitationsfeldes besitzt, her. (3 Pkt.)

Kommen die Fusionsprozesse zum Erliegen, so kühlt der Stern ab und zieht sich zusammen. Wenn der Stern weit genug abgekühlt ist, spielt der Strahlungsdruck keine dominante Rolle mehr und die Fermionengase im Stern entarten vollständig. Nehmen Sie an, dass der erloschene Stern komplett aus Helium, also zu gleichen Teilen aus Elektronen, Protonen und Neutronen, besteht.

- 1.g) Bestimmen Sie, auf welchen Radius sich der Stern nach dem Abkühlen zusammenziehen wird und schätzen sie den numerischen Wert dieses Radius für die Sonne, die eine Masse von etwa $M_{\odot} \approx 2,0 \cdot 10^{30}$ kg besitzt, ab. Begründen Sie, warum der Endzustand stabil ist. (4 Pkt.)

1.4 Chandrasekhar-Grenze

Die bisherige nichtrelativistische Betrachtung funktioniert bei sehr dichten Fermigasen nicht mehr, da die Teilchen dann sehr hohe Geschwindigkeiten besitzen und relativistisch betrachtet werden müssen. Nehmen Sie an, dass Sie auch im relativistischen Fall eine analoge Analyse zu der in den vorherigen Aufgabenteilen anstellen können.

- 1.h) Wiederholen Sie die Betrachtung zu der kinetischen Energie eines entarteten Fermigases für den Fall eines ultrarelativistischen Fermigases in dem die Fermionen alle eine kinetische Energie besitzen, die sehr viel größer als ihre Ruheenergie ist. (3 Pkt.)
- 1.i) Betrachten Sie einen Stern, in dem die Elektronen als ultrarelativistisch betrachtet werden können. Zeigen Sie, dass der Entartungsdruck der Elektronen oberhalb einer kritischen Masse nicht mehr ausreicht, um den Stern vor dem Kollabieren zu bewahren. Bestimmen Sie diese kritische Masse, die so genannte Chandrasekhar-Masse, und geben Sie diese als Vielfaches der Sonnenmasse an. (3 Pkt.)

Ein kollabierender weißer Zwerg kann zu einem Neutronenstern werden. In diesem vereinen sich Elektronen und Protonen zu Neutronen.

- 1.j) Schätzen Sie mit einer zu der obigen analogen Überlegung den Radius eines Neutronensterns ab, der eine Masse knapp oberhalb der Chandrasekhar-Masse besitzt, und vergleichen Sie diesen Radius mit dem eines weißen Zwerges einer Masse knapp unterhalb der kritischen Masse. (2 Pkt.)

Sie können für diese grobe Abschätzung die Neutronen als nichtrelativistisch annehmen und auch den weißen Zwerg nichtrelativistisch betrachten.

Lösung

- 1.a) Für die scheinbaren Helligkeiten m_A und m_B von Sirius A und B gilt mit den Informationen aus dem Aufgabentext

$$m_A - m_B = -2,5 \left(\log_{10} \frac{S_A}{S_0} - \log_{10} \frac{S_B}{S_0} \right) = 2,5 \log_{10} \frac{S_B}{S_A}. \quad (1.1)$$

Da die beiden Sterne etwa den gleichen Abstand von der Erde besitzen, ist das Verhältnis der auf der Erde pro Fläche ankommenden Strahlungsleistung gleich dem Verhältnis der von den beiden Sternen emittierten Strahlungsleistungen in dem betrachteten Wellenlängenbereich. Unter Berücksichtigung des erwähnten Korrekturfaktors ist damit die Leuchtkraft P_B von Sirius B gegeben durch

$$P_B = 10 P_A 10^{\frac{m_A - m_B}{2,5}} \approx 1,0 \cdot 10^{25} \text{ W} . \quad (1.2)$$

Sie entspricht also etwas weniger als einem Tausendstel der Leuchtkraft von Sirius A.

Der Radius R_B von Sirius B lässt sich aus der Leuchtkraft und der Temperatur des Sterns mit Hilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes bestimmen. Unter der Annahme, dass der Stern wie ein schwarzer Körper strahlt, gilt

$$P_B = \sigma 4 \pi R_B^2 T_B^4 , \quad (1.3)$$

wobei $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ die Stefan-Boltzmann-Konstante bezeichnet. Daraus ergibt sich

$$R_B = \sqrt{\frac{P_B}{4 \pi \sigma T_B^4}} \approx 6,1 \cdot 10^6 \text{ m} . \quad (1.4)$$

Der Radius von Sirius B liegt damit in der gleichen Größenordnung wie der Radius der Erde und liegt tatsächlich sehr nah bei diesem.

1.b) Für die Dichte von Sirius B gilt

$$\rho_B = \frac{M_B}{V_B} = \frac{0,54,2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \pi R_B^3} \approx 2,2 \cdot 10^9 \text{ kg m}^{-3} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg cm}^{-3} . \quad (1.5)$$

Ein Kubikzentimeter Materie von Sirius B wiegt damit rund 2 Tonnen.

Mit Hilfe des Radius (1.4) und der Masse von Sirius B lässt sich die Schwerebeschleunigung an dessen Oberfläche berechnen zu

$$g_B = G \frac{M_B}{R_B^2} \approx 3,7 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-2} \approx 3,8 \cdot 10^5 g_{\text{Erde}} . \quad (1.6)$$

1.c) Eine Anzahl von N Fermionen nimmt ein Phasenraumvolumen von

$$V_r V_p = N \frac{h^3}{2} \quad (1.7)$$

ein. Dabei bezeichnet V_r das Volumen im Orts- und $V_p = \frac{4}{3} \pi p_F^3$ das Volumen im Impulsraum. Der Faktor 2 stammt von den beiden möglichen Spinorientierungen der Fermionen. Aufgelöst nach dem Impulsbetrag ergibt sich mit $n = N/V_r$

$$p_F = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} n^{1/3} . \quad (1.8)$$

Für die maximale kinetische Energie folgt

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} n^{2/3} . \quad (1.9)$$

- 1.d) Die gesamte kinetische Energie des entarteten Fermigas ergibt sich aus dem Zusammenfassen der kinetischen Energien aller Teilchen in der Impulskugel mit Radius p_F . Die Anzahl $N_{[p,p+d\rho]}$ der Teilchen mit einem Impulsbetrag zwischen p und $p + d\rho$ mit $0 \leq p \leq p_F$ und für eine kleine Impulsdifferenz $d\rho$ ist

$$N_{[p,p+d\rho]} = N \frac{4\pi p^2 d\rho}{\frac{4}{3}\pi p_F^3}. \quad (1.10)$$

Daher ist die gesamte kinetische Energie des nichtrelativistischen Fermigas gegeben durch

$$E_{\text{kin}} = \int_0^{p_F} N_{[p,p+d\rho]} \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{5} N E_F = \frac{h^2 3^{2/3} \pi^{1/3}}{10m} R^3 n^{5/3} = \frac{h^2 3^{7/3}}{10m 4^{5/3} \pi^{4/3}} \frac{N^{5/3}}{R^2}. \quad (1.11)$$

Die letzte Darstellung mittels der Teilchenzahl N ist insbesondere für die weiteren Betrachtungen hilfreich.

- 1.e) Die Kraft F aufgrund des Entartungsdruckes bestimmt sich aus der Änderung der kinetischen Energie bei einer Veränderung des Radius.

$$F = -\frac{dE_{\text{kin}}}{dR} = -\frac{d}{dR} \frac{h^2 3^{7/3}}{10m 4^{5/3} \pi^{4/3}} \frac{1}{R^2} N^{5/3} = \frac{h^2}{10\pi^{4/3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \frac{N^{5/3}}{m R^3}. \quad (1.12)$$

Da die Masse eines Protons nahezu der 2000-fachen Elektronenmasse entspricht, ist damit die Kraft bzw. der Entartungsdruck durch die Elektronen nahezu 2000 mal so groß wie die durch die Protonen. Für die späteren Betrachtungen in einem weißen Zwerg dominieren daher die Beiträge zu dem Entartungsdruck durch die Elektronen.

- 1.f) Die Energie E_G aufgrund des Gravitationspotentials des Sterns lässt sich, analog zu der Bestimmung der kinetischen Energie, durch sukzessives Aufbauen des Sterns aus dünnen Kugelschalen, die aus dem Unendlichen an den bereits bestehenden Sternteil gebracht werden, bestimmen. Es ist

$$E_G = -G \int_0^R \frac{4\pi r^2 \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} dr = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (1.13)$$

- 1.g) Der Stern wird sich so lange zusammenziehen, bis die Gravitationskraft mit der Kraft aufgrund des Entartungsdruckes der Elektronen im Gleichgewicht steht. Dies entspricht einem stationären Punkt der Summe aus Gravitations- und kinetischer Energie des Gases, aus dem der Stern besteht. Folglich stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein, wenn

$$\frac{d}{dR} (E_G + E_{\text{kin}}) = 0. \quad (1.14)$$

Daraus ergibt sich mit den Ergebnissen aus den vorherigen Aufgabenteilen

$$\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R^2} - \frac{h^2}{10\pi^{4/3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{m_e R^3} = 0 \quad (1.15)$$

und damit

$$R = \frac{h^2 3^{4/3}}{G \pi^{4/3} 2^5 m_e m_p^{5/3}} \frac{1}{M^{1/3}} \approx 7,2 \cdot 10^6 \text{ m}. \quad (1.16)$$

Dabei wurde benutzt, dass für die Anzahl der Elektronen in dem Stern gilt: $N_e = N_p = \frac{M}{2m_p}$. Dieses Gleichgewicht ist stabil, wie man erkennen kann, wenn man die zweite Ableitung der Gesamtenergie nach R bei diesem Radius betrachtet:

$$\frac{d^2}{dR^2} (E_G + E_{\text{kin}}) = -\frac{2}{R} \left(\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R^2} - \frac{h^2}{10\pi^{4/3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{m_e R^3} \right) + \frac{h^2}{10\pi^{4/3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{m_e R^4}. \quad (1.17)$$

Für den durch (1.16) gegebenen Radius ist dieser Ausdruck größer Null. Damit nimmt die Gesamtenergie bei diesem Radius ein Minimum ein und der Radius ist stabil.

- 1.h) Im ultrarelativistischen Fall ist die kinetische Energie eines Fermions gegeben durch $E - m c^2 \approx p c$. Die Fermienergie beträgt daher $E_F = p_F c$. Für die kinetische Energie \tilde{E}_{kin} gilt so

$$\tilde{E}_{\text{kin}} = \int_0^{p_F} N_{[p, p+d\rho]} p c = \frac{3}{4} N E_F = \frac{h c 3^{1/3} \pi^{2/3}}{2} R^3 n^{4/3} = \frac{h c 3^{5/3}}{2^{11/3} \pi^{2/3}} \frac{N^{4/3}}{R}. \quad (1.18)$$

- 1.i) Die Gleichgewichtsbedingung für diesen Stern ist auch im relativistischen Fall gegeben durch (1.14). Allerdings ist nun

$$\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R^2} - \frac{h c 3^{5/3}}{2^{11/3} \pi^{2/3}} \frac{N_e^{4/3}}{R^2} = 0. \quad (1.19)$$

Der Radius kürzt sich aus dieser Gleichung heraus und es ergibt sich eine kritische Masse von

$$M_{\text{krit}} = \left(\frac{h c}{G} \right)^{3/2} \frac{3 \cdot 5^{3/2}}{2^{15/2} \pi m_p^2} \approx 3,4 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 1,7 M_{\odot}. \quad (1.20)$$

Oberhalb dieser Masse ist die Gravitationsenergie ($\sim M^2$) betragsmäßig größer als die kinetische Energie des Elektronengases ($\sim M^{4/3}$) und der Stern würde weiter kollabieren.

- 1.j) Zur Abschätzung wird der Entartungsdruck der Neutronen mit dem Druck durch die Gravitation gleichgesetzt.

$$\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R^2} - \frac{h^2}{10 \pi^{4/3}} \left(\frac{3}{2} \right)^{7/3} \frac{N_n^{5/3}}{m_n R^3} = 0 \quad (1.21)$$

und damit

$$R_{\text{Neutronenstern}} = \frac{h^2 3^{4/3}}{G \pi^{4/3} 2^{10/3} m_n^{8/3}} \frac{1}{M^{1/3}} \approx 1,0 \cdot 10^4 \text{ m}, \quad (1.22)$$

wobei für die Masse die kritische Masse eingesetzt wurde. Der Radius eines weißen Zwerges mit einer ähnlichen Masse liegt gemäß (1.16) bei $5,0 \cdot 10^6 \text{ m}$, also um einen Faktor 500 darüber.

Bewertung - Weiße Zwerge		Punkte
1.a)	Vewendung der scheinbaren Helligkeit und Erkennen, dass diese bei gleichem Abstand direkt auf ein Verhältnis der Leuchtkräfte führt	1
	Bestimmung der Leuchtkraft von Sirius B (1.2)	1
	Verwendung des Stefan-Boltzmann Gesetzes	1
	Bestimmung des Radius von Sirius B (1.4)	1
1.b)	Bestimmung der Dichte von Sirius B (1.5)	1
	Bestimmung der Schwerebeschleunigung auf Sirius B (1.6)	1
1.c)	Betrachtung des Phasenraumvolumens einer Anzahl von Fermionen	1
	Bestimmung des Fermiimpulses (1.8)	1
	Angabe der Fermienergie (1.9)	1
1.d)	Formulierung einer Idee zur Bestimmung der kinetischen Energie (z.B. Zerlegung in Impulskugelschalen)	1
	Ausführung der Idee zur Bestimmung der kinetischen Energie (z.B. Bestimmung des Beitrages einer Kugelschale)	1
	Angabe der kinetischen Energie (1.11)	1
1.e)	Idee zur Bestimmung der Kraft aus der Änderung der kinetischen Energie	1
	Bestimmung der Kraft durch den Entartungsdruck (1.12)	1
	Vergleich der Kräfte bei Protonen und Elektronen und Begründung, warum Elektronen entscheidend sind	1
1.f)	Formulierung einer Idee zur Bestimmung der potentiellen Energie (z.B. Zerlegung in Massekugelschalen)	1
	Ausführung der Idee zur Bestimmung der potentiellen Energie (z.B. Bestimmung des Beitrages einer Kugelschale)	1
	Angabe der potentiellen Energie (1.13)	1
1.g)	Formulierung einer Idee zur Lösung und Angabe einer Gleichgewichtsbedingung (1.15)	2
	Angabe des Gleichgewichtsradius (1.16)	1
	Begründung für Stabilität dieses Radius	1
1.h)	Angabe der Fermienergie im ultrarelativistischen Fall	1
	Formulierung einer Idee zur Bestimmung der kinetischen Energie (z.B. Zerlegung in Impulskugelschalen)	1
	Angabe der kinetischen Energie (1.18)	1
1.i)	Ableitung der Gleichgewichtsbedingung (1.19)	1
	Angabe der kritischen Masse (1.20)	1
	Begründung für Instabilität oberhalb dieser Masse	1
1.j)	Verwendung der Gleichgewichtsbedingung (1.21) und Berechnung des Neutronensternradius (1.22)	1
	Vergleich mit dem Radius eines weißen Zwerges	1
		30

Aufgabe 2 Diodenphysik

(14+5+11 Pkt.)

(Halbleiter-)Dioden sind elektrische Bauelemente, die im Alltag vielfältige Verwendungen finden. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie Strom in eine Richtung, die so genannte Durchlassrichtung, ab einer bestimmten angelegten Spannung sehr gut leiten und in die andere Richtung, die Sperrichtung, sehr gut isolierend wirken. Dadurch können sie zum Beispiel zur Gleichrichtung von Strom verwendet werden.

Leuchtdioden – kurz LEDs – können elektrischen Strom direkt in Licht umwandeln. Wegen ihrer hohen Effizienz und Robustheit sind sie als Lichtquellen in den letzten Jahren immer beliebter geworden. Die Bandlücke des verwendeten Halbleitermaterials bestimmt dabei die Wellenlänge und damit die Farbe des von einer LED emittierten Lichtes.

Die folgenden Aufgaben befassen sich mit einigen Aspekten von Leuchtdioden.

2.1 LED im Schaltkreis

Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt die Strom-Spannungs-Kennlinie einer LED in Durchlassrichtung.

- 2.a) Schätzen Sie aus der Kennlinie grob die dominante Wellenlänge des von der LED emittierten Lichtes ab und geben Sie an, welche Farbe das Licht hat. (3 Pkt.)

Die LED wird in dem in Abbildung 3 gezeigten Stromkreis verbaut. Der Stromkreis enthält neben der LED einen Schalter, eine Spannungsquelle, die eine Spannung $U = 4,0\text{V}$ bereitstellt, einen Widerstand mit Widerstandswert $R = 100\ \Omega$ und einen Kondensator der Kapazität $C = 3,0\ \mu\text{F}$. Der Schalter ist anfänglich offen und der Kondensator nicht geladen.

- 2.b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kennlinie die Größe des direkt nach dem Schließen des Schalters durch die LED fließenden Stromes und die über der LED abfallende Spannung. (5 Pkt.)

Der nichtlineare Verlauf der Diodenkennlinie erschwert eine weitergehende Betrachtung des Verhaltens der Schaltung. Näherungsweise kann man das elektrische Verhalten der LED aber durch eine Ersatzschaltung erfassen, in der eine Spannungsquelle und ein ohmscher Widerstand mit einer idealen Diode in Reihe geschaltet sind, die in Sperrichtung vollständig isolierend und in Durchlassrichtung perfekt leitend ist.

- 2.c) Bestimmen Sie die Parameter einer solchen Ersatzschaltung für die verwendete LED. Berechnen Sie damit die während des Aufladens des Kondensators insgesamt in der LED umgesetzte Energie. (6 Pkt.)

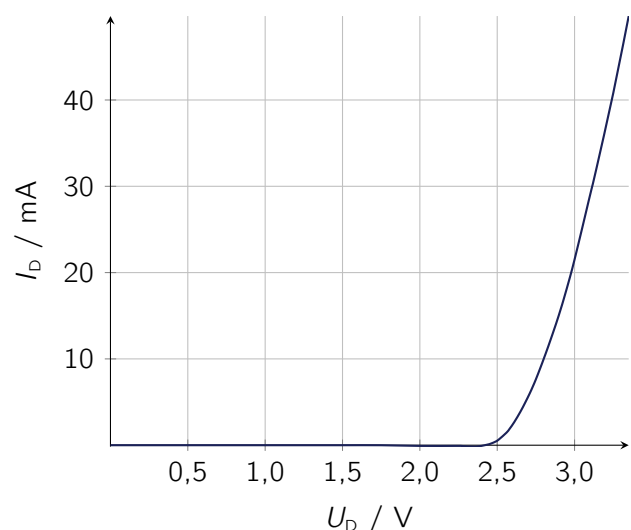


Abbildung 2: Verlauf des Diodenstroms I_D als Funktion der Diodenspannung U_D in Durchlassrichtung.

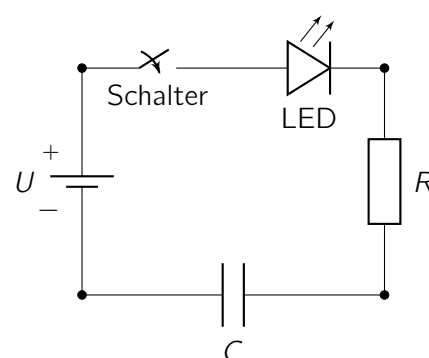


Abbildung 3: Stromkreis mit LED.

2.2 Bauform einer LED

Eine LED in typischer Bauform besteht, wie nebenstehend skizziert, aus einer kleinen lichtemittierenden Fläche, dem Halbleiterkristall, der in einem transparenten Kunststoffgehäuse eingegossen ist. Dieses schützt die Diode und formt die räumliche Abstrahlcharakteristik der LED.

In vielen Fällen möchte man die LED als gerichteten Strahler einsetzen, der möglichst viel Licht in eine Richtung abstrahlt. Hierzu wird ein charakteristisches Kunststoffgehäuse verwendet, das aus einem zylindrischen Teil der Länge ℓ und einer halbkugelförmigen Kuppe mit Radius r besteht. Der Radius r sei dabei deutlich größer als die Abmessung des Halbleiterkristalls. Eine gute Fokussierung ergibt sich, wenn alle Strahlen, die nahe der Symmetrieachse des Zylinders austreten, das Gehäuse parallel verlassen.

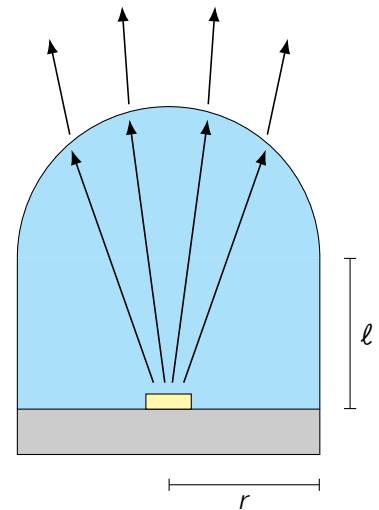


Abbildung 4: Skizze zu Lichtstrahlen im LED-Gehäuse.

- 2.d) Bestimmen Sie, wie lang hierzu die Zylinderlänge ℓ in Abhängigkeit von dem Radius r gewählt werden muss, wenn der Brechungsindex des Gehäusematerials $n = 1,6$ beträgt. (5 Pkt.)

2.3 Effizienz einer LED

Die hohe Effizienz von LEDs ist ein wesentlicher Grund für ihre zunehmende Verwendung als Lichtquellen. Verglichen mit Glühlampen, die einen großen Teil der aufgenommenen Leistung als Wärmestrahlung abgeben, können LEDs so konstruiert werden, dass sie nahezu ausschließlich Strahlung im sichtbaren Spektralbereich abgeben. Damit lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen LEDs sogar mit einem elektrischen Wirkungsgrad größer als 100 % betreiben. Sie geben dann also mehr Strahlungsleistung ab, als sie elektrische Leistung aufnehmen. Dies ist möglich, wenn die LED Wärme aus der Umgebung aufnimmt und diese in Strahlung umwandelt. Auch wenn der genaue Mechanismus dieses Vorganges kompliziert ist, lassen sich einige thermodynamische Überlegungen ohne genaue Kenntnis des Prozesses anstellen. Die LED kann dabei als Wärmepumpe betrachtet werden, die Wärme aus der Umgebung aufnimmt und Wärme in Form von Strahlung abgibt.

Das Strahlungsspektrum einer Glühlampe einer Temperatur T für Temperaturen weit oberhalb der Raumtemperatur T_0 kann durch das für einen Wärmestrahler typische Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben werden. Demnach ist die von dem Strahler in einem engen Frequenzintervall $[\nu, \nu + \Delta\nu]$ mit $\Delta\nu \ll \nu$ pro Fläche abgestrahlte Leistung $I(\nu) \Delta\nu$ gegeben durch

$$I(\nu) \Delta\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \Delta\nu.$$

Dabei bezeichnen h das Plancksche Wirkungsquantum, c die Vakuumlichtgeschwindigkeit und k_B die Boltzmannkonstante. Die insgesamt pro Fläche emittierte Strahlungsleistung ergibt sich durch Integration des obigen Ausdruckes über alle möglichen Frequenzen.

Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich auch das Spektrum einer LED näherungsweise in ähnlicher Weise beschreiben. Um der Spektralverteilung der LED Rechnung zu tragen, werden bei der Integration allerdings nur Beiträge oberhalb einer bestimmten Frequenz ν_0 berücksichtigt, so dass sich die Strahlungsleistung P einer homogen leuchtenden Fläche der Größe A zu

$$P = A \int_{\nu_0}^{\infty} I(\nu) d\nu.$$

ergibt. Dabei bezeichnet T allerdings nicht die Temperatur der LED sondern die effektive Temperatur des emittierten Lichts.

Betrachten Sie eine LED mit einer Oberfläche von $A = 1,0 \text{ mm}^2$ und einer Strahlungsleistung von $P = 1,0 \mu\text{W}$. Das von der LED emittierte Licht habe dabei Wellenlängen, die nicht größer als 700 nm sind und die Umgebungstemperatur betrage 20°C .

- 2.e) Schätzen Sie den theoretisch maximal erreichbaren elektrischen Wirkungsgrad der LED ab. Der elektrische Wirkungsgrad ist dabei festgelegt als das Verhältnis der abgegebenen Strahlungsleistung der LED zu der von ihr aufgenommenen elektrischen Leistung. (11 Pkt.)

Lösung

- 2.a) Die LED beginnt zu leuchten, wenn die Ladungsträger durch die angelegte Spannung so viel Energie erhalten, dass sie die Bandlücke des Halbleiters überwinden können. In der Strom-Spannungskennlinie steigt die Stromstärke dann stark an. Die entsprechende Diodenspannung U_D lässt sich aus der gegebenen Kennlinie abschätzen³ zu $2,50 \text{ V} \leq U_D \leq 2,75 \text{ V}$. Für die Energie der Elektronen und damit die Energie der emittierten Photonen gilt dann

$$U_D e = h \nu. \quad (2.1)$$

Die Wellenlänge der von der LED emittierten Photonen beträgt damit

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{U_D e} \approx 450 \text{ nm} - 500 \text{ nm}. \quad (2.2)$$

Die Diode leuchtet daher blau bis blau-grün.

- 2.b) Der Kondensator ist direkt nach dem Schließen des Schalters noch ungeladen und verhält sich daher anfänglich wie eine leitende Verbindung. Die anfänglich über dem Widerstand abfallende Spannung U_R lässt sich mit Hilfe der Maschenregel durch den Spannungsabfall U_D über der Diode ausdrücken als

$$U_R = U - U_D. \quad (2.3)$$

Damit lässt sich die Stromstärke I_R des durch den Widerstand fließenden Stromes ebenfalls durch die Diodenspannung ausdrücken.

$$I_R = \frac{U - U_D}{R} \quad (2.4)$$

und in das Diagramm mit der Diodenkennlinie einzeichnen (vgl. Abb. 5).

Nach der Knotenregel muss nun aber die Stromstärke I_D des durch die Diode fließenden Stromes gleich der Stromstärke I_R sein. Die gesuchte anfängliche Stromstärke und die Diodenspannung ergeben sich daher aus dem Schnittpunkt der beiden Kurven in Abb. 5 zu

$$I_D(0) \approx 11,7 \text{ mA} \quad \text{sowie} \quad U_D(0) \approx 2,83 \text{ V}. \quad (2.5)$$

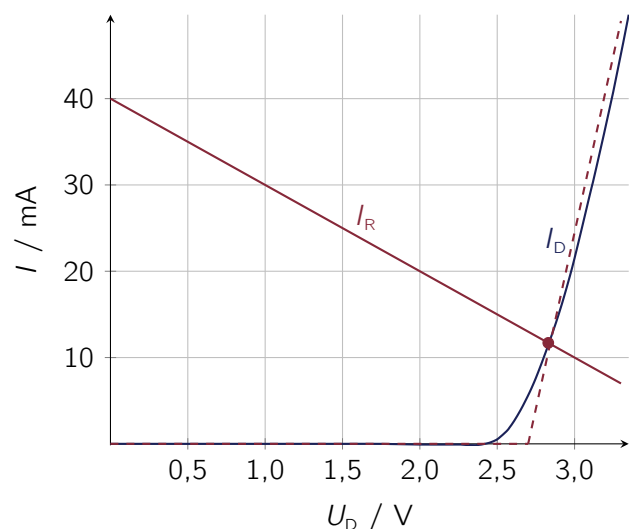


Abbildung 5: Verlauf des Diodenstroms I_D als Funktion der Diodenspannung U_D in Durchlassrichtung.

³Zur Bestimmung dieser so genannten Schwellenspannung sind mehrere Methoden denkbar. Üblich sind z.B. die Verwendung der Verlängerung des steil aufsteigenden Astes der Kennlinie bis zur Spannungsachse oder des Spannungsabfalls bei einem Diodenstromwert von 1 mA (vgl. auch den entsprechenden Wikipediaeintrag).

2.c) Zu näherungsweise Beschreibung des elektrischen Verhaltens der LED wird die nebenstehende Ersatzschaltung verwendet. Die Schaltung sperrt den Strom unterhalb einer Spannung von \tilde{U} in Durchlassrichtung und verhält sich bei höheren Spannungen wie ein ohmscher Widerstand mit Widerstandswert \tilde{R} , an den eine um \tilde{U} reduzierte Spannung angelegt ist.

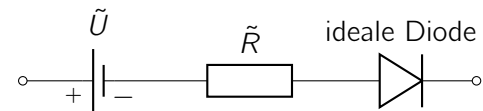


Abbildung 6: Ersatzschaltung für die LED.

Die Parameter der Ersatzschaltung lassen sich aus der in Abb. 5 hinzugefügten gestrichelten Kennlinie ermitteln, die dieses Verhalten abbildet. Es ergeben sich

$$\boxed{\tilde{U} \approx 2,7\text{V} \quad \text{sowie} \quad \tilde{R} \approx \frac{0,60\text{V}}{49\text{mA}} \approx 12\Omega} . \quad (2.6)$$

Die Spannung \tilde{U} wird dabei positiv festgelegt. Sie ist allerdings umgekehrt gepolt wie die Spannungsquelle in der ursprünglichen Schaltung. Die Spannung U der Spannungsquelle ist größer als die Spannung \tilde{U} der Ersatzspannungsquelle der LED. Daher verhält sich der zu untersuchende Stromkreis nach dem Schließen des Schalters, wie ein Kondensator, der mit einer Spannungsquelle der Spannung $U - \tilde{U}$ über einen Widerstand $R + \tilde{R}$ aufgeladen wird. Für die Stromstärke I in dem Stromkreis und die Spannung U_C über dem Kondensator gilt daher

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{sowie} \quad U_C(t) = (U - \tilde{U}) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) . \quad (2.7)$$

Dabei ist $I_0 = \frac{U - \tilde{U}}{R + \tilde{R}}$ die anfängliche Stromstärke und $\tau = (R + \tilde{R})C$ die Zeitkonstante der Serienschaltung aus Widerständen und Kondensator.

Die während des Kondensatoraufladevorganges in der LED umgesetzte elektrische Energie E_{LED} ergibt sich als Summe der in dem ohmschen Ersatzwiderstand umgesetzten Energie und der Energie, die die Spannungsquelle der fließenden Ladung entnimmt, zu

$$\begin{aligned} E_{\text{LED}} &= \int_0^\infty \left\{ \underbrace{I(t) \cdot U_{\tilde{R}}(t)}_{\text{Ersatzwiderstand}} + \underbrace{I(t) \cdot \tilde{U}}_{\text{Ersatzquelle}} \right\} dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \frac{U - \tilde{U}}{R + \tilde{R}} e^{-\frac{t}{\tau}} (U - \tilde{U}) \frac{\tilde{R}}{R + \tilde{R}} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U - \tilde{U}}{R + \tilde{R}} e^{-\frac{t}{\tau}} \tilde{U} \right\} dt . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aus der Integration folgt als Ergebnis

$$\boxed{E_{\text{LED}} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{R}}{R + \tilde{R}} (U - \tilde{U})^2 C + \tilde{U} (U - \tilde{U}) C \approx 1,1 \cdot 10^{-5} \text{J}} . \quad (2.9)$$

Hinweis: Das Ergebnis kann man auch ohne Integration aus der Energieerhaltung ableiten. Der Kondensator wird auf eine Endspannung von $U_C = U - \tilde{U} \approx 1,3\text{V}$ aufgeladen und besitzt dann eine elektrostatische Energie von $\frac{1}{2} C U_C^2$. Die beim Laden insgesamt geflossene Ladung beträgt $U_C C$. Damit lassen sich die von der Ersatzspannungsquelle aufgenommene und die von der Spannungsquelle eingebrachte Energie direkt bestimmen. Die in den Widerständen umgesetzte Energie ergibt sich aus der Differenz der Energien der Spannungsquellen und des Kondensators. Da der Strom in den beiden Widerständen gleich groß ist, teilt sich die umgesetzte Energie nach der Spannungsteilerregel auf die Widerstände auf und es ergibt sich insgesamt das gleiche Ergebnis wie in (2.9).

- 2.d) Betrachte einen Strahl der im Abstand ρ nahe der Symmetrieachse auf die Kuppe des Gehäuses trifft. Der Strahl hat in Kleinwinkelnäherung die Steigung $\rho/(\ell + r)$ und trifft auf die Gehäuseoberfläche auf, wo der Normalenvektor die Steigung ρ/r hat. Der Strahl schließt also einen Winkel

$$\alpha = \frac{\rho}{r} - \frac{\rho}{\ell + r} \quad (2.10)$$

mit dem Normalenvektor der Oberfläche ein. Der austretende Strahl hat dann gemäß dem Brechungsgesetz einen Winkel $\beta = n\alpha$ zur Flächennormalen. Um parallel zur Symmetrieachse zu sein muss der Austrittswinkel aber genau ρ/r zur Flächennormalen sein, also

$$\beta = n \left(\frac{\rho}{r} - \frac{\rho}{\ell + r} \right) \stackrel{!}{=} \rho/r. \quad (2.11)$$

Somit muss für den Fall von Kunststoff mit $n = 1,6$

$$\ell = \frac{r}{n-1} = \frac{r}{0,6} = 1,7r \quad (2.12)$$

gelten. Das ist genau die wohlbekannte charakteristische längliche LED Bauform.

- 2.e) Die LED nimmt elektrische Leistung P_{el} und thermische Leistung P_{th} aus der Umgebung auf und wandelt diese in Licht einer Strahlungsleistung P um. Die abgegebene Strahlung besitzt dabei eine effektive Temperatur T . Thermodynamisch entspricht dieser Prozess einer Wärmepumpe. Der theoretisch höchste (elektrische) Wirkungsgrad wird daher erreicht, wenn zum einen alle aufgenommene Energie in Strahlung umgewandelt wird und zum anderen die Wärmeaufnahme und Wärmeabgabe ohne Entropieänderung erfolgen (Carnotprozess). Die LED ist dann im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung. In diesem Fall gilt

$$\frac{P_{\text{th}}}{T_0} = \frac{P}{T} \quad (2.13)$$

und der elektrische Wirkungsgrad der LED ist

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{el}}} = \frac{P}{P - P_{\text{th}}} = \frac{1}{1 - \frac{T_0}{T}}. \quad (2.14)$$

dabei wurde die Energieerhaltung $P = P_{\text{el}} + P_{\text{th}}$ verwendet.

Die noch unbekannt effektive Temperatur T der von der LED emittierten Strahlung lässt sich aus der gegebenen Formel für die Strahlungsleistung bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{P}{A} &= \int_{\nu_0}^{\infty} I(\nu) d\nu \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu \\ &\approx \frac{2\pi h}{c^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \nu^3 e^{-h\nu/k_B T} d\nu. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dabei wurde verwendet, dass $\nu_0 = \frac{c}{700 \text{ nm}} \approx 4,29 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ und damit $e^{h\nu/k_B T} \gg 1$ für $\nu > \nu_0$ und $T < 5 \cdot 10^4 \text{ K}$ gilt. Die tatsächliche Temperatur ist, wie wir sehen werden, deutlich geringer, so dass diese Näherung gerechtfertigt ist. Das Integral lässt sich durch mehrfaches partielles Integrieren

lösen.

$$\begin{aligned}
 \int_{\nu_0}^{\infty} \nu^3 e^{-h\nu/k_B T} d\nu &= \left[-\frac{k_B T}{h} \nu^3 e^{-h\nu/k_B T} \right]_{\nu_0}^{\infty} + \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{3k_B T}{h} \nu^2 e^{-h\nu/k_B T} d\nu \\
 &= \dots \\
 &= \left\{ \frac{k_B T}{h} \nu_0^3 + 3 \left(\frac{k_B T}{h} \right)^2 \nu_0^2 + 6 \left(\frac{k_B T}{h} \right)^3 \nu_0 + 6 \left(\frac{k_B T}{h} \right)^4 \right\} e^{-h\nu_0/k_B T}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die Temperatur T lässt sich aus Gleichung (2.15) mit dem Ergebnis (2.16) nur numerisch bestimmen (z.B. aus einem Funktionsgraph). Die folgende Abbildung 7 zeigt zwei Ausschnitte des Graphen des Integrals (2.16) abzüglich $\frac{Pc^2}{2\pi hA}$ als Funktion der Temperatur.

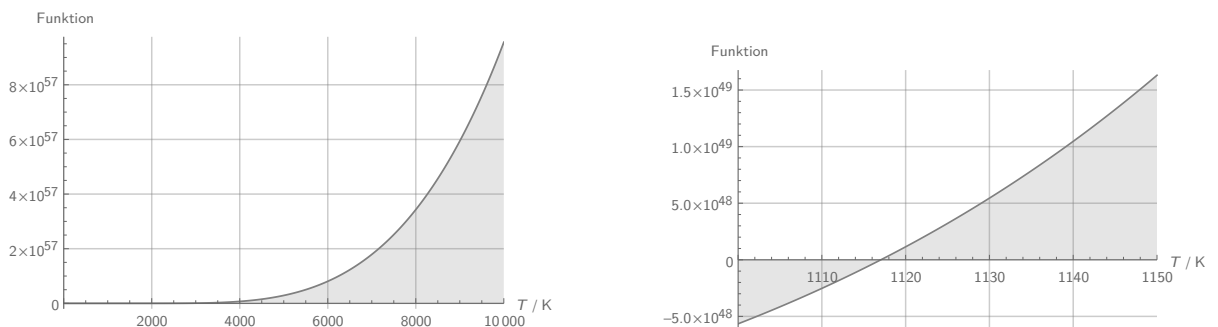


Abbildung 7: Graph des Integrals (2.16) abzüglich des Terms $\frac{Pc^2}{2\pi hA}$ als Funktion der Temperatur.

Die Nullstelle des Graphen ist die gesuchte Temperatur mit $T \approx 1120$ K. Daraus ergibt sich der gesuchte maximal mögliche elektrische Wirkungsgrad der LED mit $T_0 = 293$ K zu

$$\boxed{\eta = \frac{1}{1 - \frac{T_0}{T}} \approx 135\%}. \tag{2.17}$$

Hinweis: Elektrische Wirkungsgrade größer als 1 sind nicht nur von theoretischem Interesse. Sie wurden auch technisch bereits realisiert (s. z.B. Santhanam, P., Gray, D.J. & Ram, R.J. (2012). Thermoelectrically Pumped Light-Emitting Diodes Operating above Unity Efficiency. *Phys. Rev. Lett.* **108**. doi:10.1103/PhysRevLett.108.097403 oder Santhanam, P. et al. (2013). Room temperature thermo-electric pumping in mid-infrared light-emitting diodes. *Appl. Phys. Lett.* **103**. doi:10.1063/1.4828566).

Bewertung - Diodenphysik		Punkte
2.a)	Formulierung einer physikalisch sinnvollen Idee zur Bestimmung der Wellenlänge	1
	Ausführung der Idee	1
	Angabe der Wellenlänge im angegebenen Bereich (2.2) und Nennung der Farbe	1
2.b)	Betrachtung des Kondensators als leitende Verbindung	1
	Sinnvolle Verwendung von Knoten-/Maschenregel und des ohmschen Gesetzes	1
	Verwendung des Diagramms zur Bestimmung von Stromstärke und Spannung	2
	Ergebnisse für Stromstärke und Spannung (2.5)	1
2.c)	Formulierung einer physikalisch sinnvollen Idee zur Bestimmung der Parameter der Ersatzschaltung und Angabe des Ergebnisses (2.6)	2
	Beschreibung des Aufladevorganges qualitativ	1
	Beschreibung des Aufladevorganges quantitativ	1
	Bestimmung des Beitrages des Ersatzwiderstandes in (2.9)	1
	Bestimmung des Beitrages der Ersatzspannungsquelle in (2.9)	1
2.d)	Betrachtung des Strahlverlaufs in Kleinwinkelnäherung vor der Brechung	1
	Verwendung des Snelliusschen Brechungsgesetzes	1
	Betrachtung des Strahlverlaufs in Kleinwinkelnäherung nach der Brechung	1
	Formulierung einer Bedingung für paralleles Austreten (2.11)	1
	Angabe des Ergebnisses für die LED-Länge (2.12)	1
2.e)	Betrachtung der LED als Wärmepumpe und Angabe einer Bedingung für optimalen Prozess (2.13)	3
	Ausdrücken des Wirkungsgrades für diesen Fall durch Temperaturen (2.14)	2
	Idee zur Bestimmung der effektiven Temperatur aus Strahlungsleistung	1
	Angabe der Formel für Strahlungsleistung und Näherung (2.15)	1
	Ausintegrieren zu (2.16)	1
	Numerische Bestimmung der Temperatur	2
	Angabe des Wirkungsgrades (2.17)	1
		30

Aufgabe 3 Experimentelle Aufgabe - Schwingende Stäbchen

(20+6+14 Pkt.)

Die in Asien weitverbreiteten Essstäbchen besitzen in der Regel einen quadratischen oder kreisförmigen Querschnitt, der sich vom oberen zum unteren Ende hin verjüngt. Mit diesen Stäbchen lässt sich allerdings nicht nur Essen greifen. In dieser Aufgabe sollen Sie einige physikalische Experimente mit Essstäbchen durchführen.

Neben Essstäbchen⁴ können Sie die folgenden Materialien zum Experimentieren verwenden: Stoppuhr, Lineal, Faden, Klebeband und außerdem alle anderen haushaltstypischen Dinge.

Allgemeine Hinweise zur experimentellen Aufgabe

- Beschreiben und dokumentieren Sie Ihr Vorgehen so ausführlich, dass jeder Schritt gut nachvollziehbar ist. Skizzieren Sie insbesondere Ihre Versuchsaufbauten.
- Führen Sie alle Ihre Versuche so durch, dass die Ergebnisse so genau wie möglich sind.
- Schätzen Sie außerdem die Fehler aller Ergebnisse sinnvoll ab.

3.1 Ein Essstäbchen als Pendel

Hängen Sie ein Essstäbchen, wie nebenstehend in Abb. 8 skizziert, an zwei leicht gespannten Fäden so auf, dass es möglichst vertikal hängt. Es empfiehlt sich dabei, das Stäbchen mit einer festen Schlaufe oder einem Knoten zu befestigen, damit es nicht rutscht. Wenn Sie das Stäbchen ein klein wenig aus der vertikalen Ruhelage auslenken, vollführt es Schwingungen um den Aufhängepunkt.

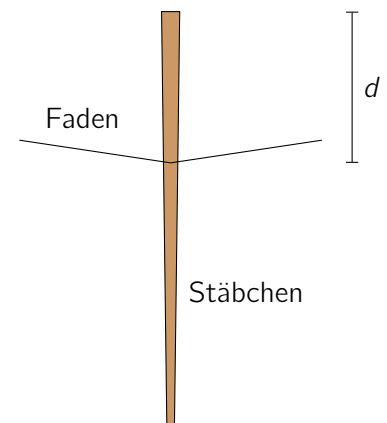


Abbildung 8: Skizze zur Aufhängung des Stäbchens.

- Bestimmen Sie die Periodendauer der Schwingung des Stäbchens als Funktion des Abstandes d zwischen dem dickeren Ende des Stäbchens und dem Aufhängepunkt. Erstellen Sie einen Graphen, der diesen Zusammenhang darstellt. (8 Pkt.)
- Bestimmen Sie mit Hilfe Ihrer Messergebnisse die Schwerebeschleunigung g auf der Erde. (4 Pkt.)
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen den Abstand des Schwerpunktes des Essstäbchens zu seinem dickeren Ende. Hierfür sind verschiedene Herangehensweisen denkbar. Beschreiben Sie mindestens zwei verschiedene Auswertemethoden und vergleichen Sie die damit erzielten Ergebnisse hinsichtlich Ihrer Genauigkeit. (7 Pkt.)

Der Schwerpunkt lässt sich auf andere Art natürlich sehr viel einfacher bestimmen.

- Bestimmen Sie die Schwerpunktposition auch durch das Balancieren des Stäbchens auf einer schmalen Kante und vergleichen Sie das Ergebnis mit den vorherigen. (1 Pkt.)

⁴Die notwendige Anschaffung von Essstäbchen ist vielleicht auch eine gute Gelegenheit, asiatisch zu kochen oder ein asiatisches Restaurant zu besuchen und dabei seine Fähigkeiten im Essen mit Stäbchen zu trainieren.

3.2 Anstoßen des Stäbchens

Legen Sie ein Essstäbchen auf eine glatte (Tisch-)oberfläche. Stoßen Sie es, zum Beispiel mit einem weiteren Stäbchen, wie in Abb. 9 skizziert, leicht von der Seite an. Der Stoß soll dabei senkrecht zur Hauptachse des Stäbchens erfolgen.

3.e) Beobachten Sie die Bewegung des Stäbchens direkt nach dem Stoß. Bestimmen Sie experimentell den Abstand d zwischen Stoßpunkt und dickerem Ende des Stäbchens, bei dem sich das dünnere Ende des Stäbchens direkt nach dem Stoß nicht bewegt. Geben Sie das Verhältnis des gefundenen Wertes von d zur Gesamtlänge des Stäbchens an. (3 Pkt.)

3.f) Berechnen Sie, wie groß dieses Verhältnis für einen sehr dünnen Stab theoretisch ist. (3 Pkt.)

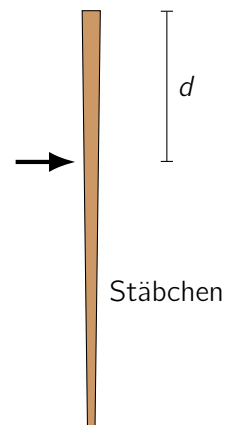


Abbildung 9: Anstoßen des Stäbchens.

3.3 Gedämpfte Schwingung

Wenn ein Magnet über einer leitenden Oberfläche bewegt wird, induziert er in dieser Wirbelströme, die zu einer abbremsenden Kraft führen. Die Kraft hängt dabei insbesondere von den elektrischen Eigenschaften der Oberfläche ab. Dieser Effekt erlaubt die Untersuchung des spezifischen Widerstandes von Metallen⁵.

Betrachten Sie einen Magneten, der an dem Ende eines, wie in dem ersten Aufgabenteil aufgehängten, Stäbchens befestigt ist. Lässt man das Stäbchen mit dem Magneten über einem geeigneten Metallstück schwingen, so wird die Schwingung aufgrund der Wirbelströme abgebremst. Es findet eine gedämpfte Schwingung statt. Für eine schwach gedämpfte Schwingung ist die Periodendauer gegenüber der ungedämpften Schwingung nicht wesentlich verändert. Allerdings nimmt die Amplitude A der Schwingung mit der Zeit t ab. Sie folgt dabei einem exponentiellen Gesetz der Form

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\kappa t}{\rho}}.$$

Dabei bezeichnet A_0 die anfängliche Amplitude zur Zeit $t = 0$, κ einen Faktor, der die Geometrie der Anordnung widerspiegelt, und ρ den spezifischen Widerstand des Metalls.

3.g) Begründen Sie theoretisch, warum die Amplitude bei der schwach gedämpften Schwingung dem obigen exponentiellen Zusammenhang folgt. Sie können dabei von kleinen Auslenkungen ausgehen und annehmen, dass sich die Amplitude mit jeder Schwingung nur wenig ändert. (3 Pkt.)

Auf www.ipho.info finden Sie in der Rubrik „aufgaben“ einen Link zu drei Videos in denen ein entsprechender Pendelversuch dargestellt ist. In einem der Videos pendelt das Stäbchen mit dem Magneten weitestgehend frei. In den anderen beiden Videos befindet sich eine Metallplatte aus Aluminium bzw. Kupfer unter dem Magneten. Die beiden Platten besitzen die gleichen Abmessungen und befinden sich an der gleichen Position. Der spezifische Widerstand von Kupfer beträgt etwa $\rho_{\text{Cu}} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$.

3.h) Verwenden Sie die Videos⁶, um zu rechtfertigen, dass es sich bei den Pendelbewegungen über den Metallplatten um schwach gedämpfte Schwingungen handelt. (3 Pkt.)

3.i) Bestimmen Sie mit Hilfe der Videos einen Wert für den spezifischen Widerstand von Aluminium und vergleichen Sie diesen mit dem Literaturwert. (8 Pkt.)

⁵Dies funktioniert jedoch nur bei dia- oder paramagnetischen Materialien. Wenn das Metall, wie z.B. bei ferromagnetischen Materialien, ein permanentes magnetisches Moment besitzt, wird der Magnet dauerhaft angezogen oder abgestoßen. Das würde den zu untersuchenden Effekt überlagern.

⁶Die Analyse der Videos ist vermutlich einfacher, wenn Sie sich diese herunterladen und mit einem Medienabspielprogramm wie dem VLC media player oder dem QuickTime Player anschauen.

Lösung

3.a) Versuchsaufbau und Messwerte

Für den Versuch wurde ein Esstäbchen einer Länge von $(22,5 \pm 0,1)$ cm verwendet, auf dem mit einem Bleistift Abstände markiert wurden. Das Stäbchen wurde an zwei Fäden aufgehängt. Dabei wurden die Fäden mit einem Kreuzknoten zusammengebunden und das Stäbchen in die Schlaufe des Knotens gesteckt, bevor dieser festgezogen wurde. Die Fadenenden wurden an einem Stativ aufgebaut befestigt. Abbildung 10 zeigt ein Bild des Aufbaus.

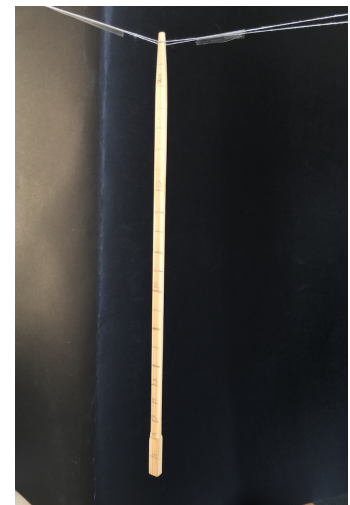


Abbildung 10: Aufhängung des Esstäbchens mit Abstandsmarkierungen.

Zur Bestimmung der Periodendauer der Schwingung wurde der Abstand d zwischen dem dickeren Ende des Stäbchens und dem Aufhängepunkt beginnend bei $d = 1,0$ cm in $1,0$ cm Schritten erhöht. Anfänglich befand sich dabei das dickere Ende des Stäbchens oben. Bei einem Abstand zwischen $10,0$ cm und $11,0$ cm ist das Stäbchen umgekippt und das dickere Ende befand sich bei den weiteren Messungen unten. Gemessen wurde mit einer Stoppuhr jeweils die Zeit für $N = 20$ Schwingungsperioden. Für jeden Abstand wurde die Messung insgesamt fünf Mal durchgeführt, um statistische Fehler gering zu halten. Tabelle 1 stellt die Messwerte aus dem Versuch dar.

Tabelle 1: Messwerte für die Periodendauer T der Stäbchenschwingung als Funktion des Abstandes d von der Aufhängung zu dem dickeren Ende des Stäbchens. Für die Messwerte zwischen $1,0$ cm und $10,0$ cm befand sich das dickere Ende des Stäbchens oben, bei allen weiteren Messungen unten. Gemessen wurden jeweils N Perioden.

n	d/cm	$\Delta d/\text{cm}$	N	NT/s					\bar{T}/s	$\Delta\bar{T}/\text{s}$
1	1,0	0,15	20	15,44	15,37	15,28	15,38	15,34	0,768	0,004
2	2,0	0,15	20	15,10	15,06	15,10	15,06	15,16	0,755	0,006
3	3,0	0,15	20	14,78	15,00	14,91	14,91	14,88	0,745	0,007
4	4,0	0,15	20	14,78	14,69	14,69	14,75	14,75	0,737	0,006
5	5,0	0,15	20	14,85	14,69	14,68	14,75	14,75	0,737	0,007
6	6,0	0,15	20	15,03	14,85	15,03	15,00	15,10	0,750	0,007
7	7,0	0,15	20	15,65	15,66	15,54	15,60	15,62	0,781	0,006
8	8,0	0,15	20	17,25	17,32	17,31	17,31	17,34	0,865	0,006
9	9,0	0,15	20	20,13	20,09	20,06	20,25	20,09	1,006	0,007
10	10,0	0,15	20	28,44	28,91	28,78	28,75	28,69	1,436	0,009
11	11,0	0,15	20	28,13	27,91	27,91	27,94	27,97	1,399	0,007
12	12,0	0,15	20	20,15	20,19	20,22	20,12	20,16	1,008	0,006
13	13,0	0,15	20	16,94	16,88	16,88	16,81	16,78	0,843	0,006
14	14,0	0,15	20	15,65	15,44	15,60	15,59	15,62	0,779	0,007
15	15,0	0,15	20	14,91	14,93	15,00	14,87	14,91	0,746	0,006
16	16,0	0,15	20	14,69	14,69	14,72	14,69	14,69	0,735	0,005
17	17,0	0,15	20	14,72	14,69	14,69	14,72	14,71	0,735	0,005
18	18,0	0,15	20	14,74	14,81	14,82	14,78	14,81	0,740	0,006
19	19,0	0,15	20	15,00	14,97	14,94	14,95	15,00	0,749	0,006
20	20,0	0,15	20	15,38	15,31	15,38	15,25	15,38	0,767	0,006
21	21,0	0,15	20	15,63	15,62	15,66	15,63	15,66	0,782	0,005
22	22,0	0,15	20	16,03	16,12	16,06	16,03	16,03	0,803	0,006

Die Unsicherheit Δd bei der Bestimmung von d setzt sich zusammen aus der Unsicherheit der Markierung, die zu einem halben Skalenteil des verwendeten Lineals, also zu 0,5 mm angenommen wurde plus der Unsicherheit bei der Festlegung des Aufhängepunktes. Diese wurde zu 1,5 mm angenommen. Die Unsicherheit $\Delta \bar{T}$ der Mittelwerte der bestimmten Periodendauern ergibt sich aus dem statistischen Fehler der Messung (Standardabweichung des Mittelwertes der Periodendauer) und einem zusätzlich möglichen systematischen Fehler bei der Zeitmessung, der zu 0,1 s für die 20 Perioden angenommen wurde.

Abbildung 11 zeigt einen Graphen der mittleren Periodendauer, die im Folgenden der Einfachheit halber mit T bezeichnet wird, als Funktion des Abstandes d .

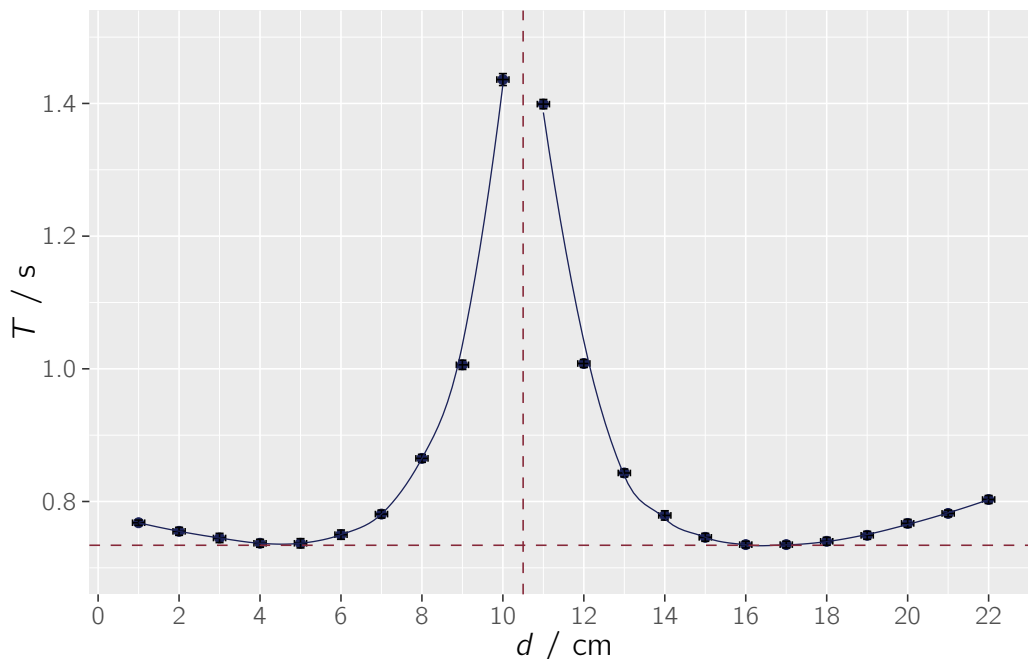


Abbildung 11: Graph der Periodendauer T als Funktion des Abstandes d der Aufhängung von dem dickeren Ende des Stäbchens. Die gestrichelten roten Linien geben die aus dem Graphen ermittelte Schwerpunktposition (vertikal) und das Minimum der Periodendauer (horizontal) an.

3.b) Bestimmung der Schwerebeschleunigung auf der Erde

Das schwingende Stäbchen stellt ein physikalisches Pendel dar. Bezeichne mit m dessen Masse und mit I_s dessen Trägheitsmoment um die Schwerpunktschwerachse parallel zu den im Experiment verwendeten Aufhängeachsen. Dann gilt für die Periodendauer T des Pendels bei kleinen Auslenkungen:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_s + m s^2}{m g s}}, \quad (3.1)$$

wobei s den Abstand des Drehpunktes vom Schwerpunkt angibt. Damit ergeben sich bei gegebener Periodendauer in der Regel zwei mögliche Schwerpunktabstände, nämlich

$$s_{1,2} = \frac{T^2 g}{8\pi^2} \pm \sqrt{\frac{T^4 g^2}{64\pi^4} - \frac{I_s}{m}}. \quad (3.2)$$

Für $T^2 = \frac{8\pi^2}{g} \sqrt{\frac{I_s}{m}}$ verschwindet der Radikand und es verbleibt nur ein möglicher Schwerpunktabstand. Im Graphen erkennt man, dass dies für das Minimum der Periodendauer der Fall ist.

Der Graph muss darüber hinaus symmetrisch bezüglich der Position des Schwerpunktes sein. Die zu dem Minimum der Periodendauer gehörenden Abstände s_{links} und s_{rechts} auf beiden Seiten der Schwerpunktposition im Graphen erlauben daher die Bestimmung der Schwerebeschleunigung auf der Erde ohne Kenntnis der Position des Schwerpunktes selbst. Es ist nämlich

$$s_{\text{links}} = s_{\text{rechts}} = \frac{T_{\text{min}}^2 g}{8 \pi^2} \quad (3.3)$$

und damit gilt

$$T_{\text{min}} = 2 \pi \sqrt{\frac{s_{\text{links}} + s_{\text{rechts}}}{g}} =: 2 \pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (3.4)$$

Durch Bestimmung des Abstandes ℓ der beiden Punkte minimaler Periodendauer lässt sich g so aus dem Graphen bestimmen, auch wenn die Schwerpunktposition nicht bekannt ist⁷. Für die Minima in dem Graphen ergeben sich etwa folgende Werte: $d_{\text{links}} = (4,3 \pm 0,5)$ cm, $d_{\text{rechts}} = (16,8 \pm 0,5)$ cm und $T = (0,735 \pm 0,005)$ s. Damit ist $\ell = (12,5 \pm 1,0)$ cm. Für die Schwerebeschleunigung auf der Erde ergibt sich so

$$g = \frac{4 \pi^2 \ell}{T^2} = (9,1 \pm 0,9) \text{ m s}^{-2}. \quad (3.5)$$

Die Bestimmung der Schwerebeschleunigung scheint mit dieser Methode nicht deutlich genauer machbar.

Hinweis: Die Schwerebeschleunigung lässt sich mit Hilfe von (3.2) auch aus anderen Periodendauern ermitteln. dann ist allerdings eine vorherige Bestimmung der Schwerpunktposition des Esstübchens erforderlich.

3.c) Bestimmung der Schwerpunktposition des Esstübchens

Zur Bestimmung des Schwerpunktes werden nachfolgend zwei mögliche Methoden dargestellt:

Polstelle des Graphen

Eine einfache Möglichkeit ist das Abschätzen der Polstelle des Graphen. Damit ergibt sich der Abstand d_s des Schwerpunktes von dem dickeren Ende des Stübchens zu

$$d_s = (10,5 \pm 0,3) \text{ cm}. \quad (3.6)$$

Diese Methode weist einen relativ geringen Fehler von nur etwa 3% auf. Sie lässt sich noch durch das Ausnutzen der Symmetrie des Graphen um die Polstelle erweitern. Zum Beispiel kann man die Punkte an der vermeintlichen Polstelle spiegeln. Diese müssen dann auf den anderen Seite auch auf der Ausgleichskurve liegen. Dadurch kann die Polstelle ggf. noch genauer bestimmt werden. Man könnte dazu ein Blatt Papier mit einem Ausdruck des Graphen an der Polstelle falten und prüfen, ob eine gute Deckung zustande kommt.

Betrachtung der Minima der Periodendauer

Für die Minima der Periodendauer gilt mit Gleichung (3.1)

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{dT}{ds} = \pi \sqrt{\frac{mgs}{I_s + ms^2}} \left(\frac{2ms}{mgs} - \frac{I_s + ms^2}{mgs^2} \right) \quad \text{und damit} \quad I_s \stackrel{!}{=} ms^2. \quad (3.7)$$

Damit folgt für die Minima der Periodendauer:

$$T_{\text{min}} = 2 \pi \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad \text{bzw.} \quad |d_s - d| = \frac{g T_{\text{min}}^2}{8 \pi^2}. \quad (3.8)$$

⁷Nach diesem Prinzip funktionieren alle Reversionspendel, für die das behandelte System ein Beispiel darstellt.

Mit den bereits für die g -Bestimmung verwendeten Werten ergibt sich der Abstand des Schwerpunktes des Stäbchens von dessen dickeren Ende so zu

$$d_s = (10,5 \pm 1,0) \text{ cm} . \quad (3.9)$$

Dabei wurde für g der bekannte Wert von $9,81 \text{ m s}^{-2}$ mit einem vernachlässigbaren Fehler verwendet. Der Fehler wurde aus den Fehlern der einzelnen Abstände ermittelt. Er liegt hier bei etwa 10%.

Vergleich der Methoden

Von den beiden vorgestellten Methoden ist die Ermittlung der Polstelle des Graphen mit einem Fehler von etwa 3% deutlich genauer als die Betrachtung der Minima der Periodendauer.

3.d) Balancieren des Esstäbchens

Durch Balancieren des Esstäbchens auf einer Kante, wie z. B. der Kante eines Lineals, lässt sich ein noch genauere Wert für den Schwerpunktabstand ermitteln. Es ergibt sich für das verwendete Stäbchen:

$$d_s = (10,5 \pm 0,1) \text{ cm} . \quad (3.10)$$

Der Fehler ist damit nur noch ein Drittel, bzw. ein Zehntel so groß wie bei den vorherigen Methoden.

3.e) Seitliches Anstoßen des Stäbchens

Wenn das Stäbchen, wie in der Aufgabenstellung beschrieben, seitlich angestoßen wird, rutscht es über den Tisch und dreht sich dabei. Bei dem Versuch muss darauf geachtet werden, dass das Stäbchen möglichst auf seiner ganzen Länge auf dem Tisch aufliegt. Variiert man die Position des Stoßpunktes, so stellt man fest, dass sich bei einer bestimmten Position das dünnere Ende des Stäbchens direkt nach dem Stoß gar nicht bewegt. Der Abstand d , bei dem dies passiert, liegt bei $d = (6,5 \pm 0,5) \text{ cm}$. Das Verhältnis dieses Abstandes zur Gesamtlänge $L = (22,5 \pm 0,5) \text{ cm}$ des Stäbchens beträgt damit

$$\frac{d}{L} = 0,29 \pm 0,03 . \quad (3.11)$$

3.f) Theoretische Betrachtung des seitlichen Anstoßens

Betrachte, wie nebenstehend in Abbildung 12 skizziert, einen homogenen, dünnen Stab der Länge L und Masse m , der in einem Abstand x von einem seiner Enden angestoßen wird.

Durch den Stoß findet ein Impulsübertrag Δp auf den Stab statt. Der Stab erhält dadurch eine Translationsgeschwindigkeit v_{trans} in Richtung des Stoßes von

$$v_{\text{trans}} = \frac{\Delta p}{m} . \quad (3.12)$$

Gleichzeitig wird der Stab in Rotation versetzt. Im Schwerpunktsystem des Stabes lassen sich der Translations- und der Rotationsanteil der Bewegung separieren. Betrachte daher die Drehimpulsbilanz des Stabes im Schwerpunktsystem des Stabes. Für den Drehimpuls ΔL des Stabes bezüglich des Schwerpunktes nach dem Stoß gilt:

$$\Delta L = \Delta p \left| \frac{L}{2} - x \right| = I_s \Delta \omega . \quad (3.13)$$

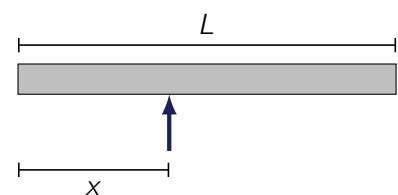


Abbildung 12: Skizze zum Stabstoß.

Dabei bezeichnet $\Delta\omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Stabes nach dem Stoß. Das Trägheitsmoment I_S des Stabes ergibt sich zu

$$I_S = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx x^2 \frac{m}{L} = \frac{1}{12} m L^2. \quad (3.14)$$

Wenn nun das Ende des Stabes direkt nach dem Stoß in Ruhe sein soll, müssen sich die Beiträge zur Bewegung durch die Translation und die Rotation gerade aufheben. Der Stab muss daher an einer Position $x < \frac{L}{2}$ angestoßen werden, für die

$$\frac{\Delta p}{m} \stackrel{!}{=} \Delta\omega \frac{L}{2} = \frac{\Delta p \left(\frac{L}{2} - x\right)}{I_S} \frac{L}{2} \quad (3.15)$$

ist. Aus dieser Bedingung ergibt sich mit (3.14) das gesuchte Verhältnis der Position des Anstoßens zur Gesamtlänge L zu

$$\boxed{\frac{x}{L} = \frac{1}{3}}. \quad (3.16)$$

Der experimentell ermittelte Wert weicht, auch aufgrund der nicht homogenen Massenverteilung entlang des Stabes, geringfügig von dem theoretischen Ergebnis ab.

3.g) Theoretische Betrachtung der schwach gedämpften Schwingung

Die exponentielle Dämpfung der Amplitude kann man z. B. mit folgender Betrachtung begründen: Die Abbremsung erfolgt aufgrund einer Verringerung der kinetischen Energie durch Wärme, die von Wirbelströmen in der Platte hervorgerufen wird. Die Wirbelströme wiederum resultieren aus einer in der Platte induzierten Spannung. Diese schließlich wird durch eine zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Plattenoberfläche bedingt.

Nimmt man an, dass die magnetische Flussdichte B des Magneten nur auf einem räumlich begrenzten Gebiet in der Nähe der Zylinderachse des Magneten von Null verschieden ist⁸ und dass der Magnet sich gänzlich über der Platte befindet, so bestimmt sich der magnetische Fluss durch die Platte in der Ruhelage des Magneten aus der Integration der Flussdichte über eine Fläche F der Platte. In der nebenstehenden Abbildung 13 ist diese Fläche so groß wie die Grundfläche des schwingenden Magneten eingezeichnet. Ist der schwingende Magnet um einen kleinen Winkel φ aus der Ruhelage ausgelenkt, so gehen die Magnetfeldlinien durch eine Plattenfläche $\frac{F}{\cos\varphi}$. Gleichzeitig sind die Magnetfeldlinien aber um den gleichen Winkel verkippt, so dass die auf die Flächennormale projizierte Flussdichte nur noch $B \cos\varphi$ beträgt. Wenn die Änderung des Abstandes zwischen Magnet und Platte außer acht gelassen wird, bleibt daher der magnetische Fluss durch die Platte beim Schwingen konstant.

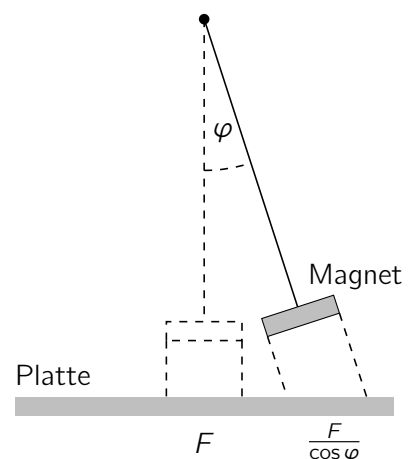


Abbildung 13: Skizze zur Wirbelstromdämpfung.

Für die Änderung des magnetischen Flusses und damit das Induzieren einer Spannung in der Platte müssen daher der geänderte Abstand und die Abstandsabhängigkeit der magnetischen Flussdichte

⁸Da die magnetische Flussdichte jenseits der Zylinderachse des Magneten schnell abfällt, ist diese Annahme einigermaßen naheliegend. Darüber hinaus wird bei der Betrachtung vereinfachend davon ausgegangen, dass die Flussdichte senkrecht zur Oberfläche des Magneten orientiert ist.

des Magneten verantwortlich sein. Für kleine Änderungen des Abstandes zwischen Plattenoberfläche und Magnet, ändert sich die Kraft in erster Näherung linear mit der Abstandsänderung. Die Abstandsänderung ist aber bei der Schwingung proportional zu $\sin \varphi$. Daher gilt für den magnetischen Fluss Φ durch die Platte bei der Schwingung des Magneten

$$\Phi = \Phi_0 \sin \varphi \approx \Phi_0 \frac{A}{\ell} \sin \omega t. \quad (3.17)$$

Dabei bezeichnet Φ_0 den Fluss in der Ruhelage des Magneten. Die Größen A und ω sind die Amplitude bzw. die Winkelfrequenz der als harmonisch angenommenen Schwingung, und ℓ gibt den Abstand vom Aufhängepunkt zum Magneten an.

Damit ergibt sich aus der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses für die in der Platte induzierte Spannung

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} \approx -\frac{A\omega}{\ell} \Phi_0 \cos \omega t. \quad (3.18)$$

Die Amplitude der Schwingung wurde dabei als annähernd konstant angenommen. Die Änderung der Energie E der Schwingung, also der Summe aus kinetischer und potentieller Energie des Pendels, wird durch die ohmsche Leistung in der Platte hervorgerufen. Es ist

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{U^2}{R} = -\text{const.} \frac{A^2}{\rho} \cos^2 \omega t, \quad (3.19)$$

wobei die hier nicht relevanten (geometrischen) Konstanten zusammengefasst worden sind. Integriert man diesen Ausdruck über eine Periode der Schwingung, so gilt für den Energieverlust ΔE in dieser Zeit die Proportionalität

$$\Delta E \sim -\frac{A^2}{\rho} \sim -\frac{E}{\rho}. \quad (3.20)$$

Da die Änderung der Energie somit proportional zur Energie selbst ist, nimmt die Energie der Bewegung also exponentiell mit der Zeit ab. Da die Energie proportional zum Quadrat der Amplitude der Schwingung ist, gilt dieses exponentiell abklingende Verhalten auch für die Amplitude - was zu zeigen war. Die Abklingkonstante der Schwingung ist dabei von dem spezifischen Widerstand des Plattenmaterials abhängig.

3.h) Schwache Dämpfung

Mit Hilfe der Videos lassen sich die Periodendauern für das Schwingen über einer Metallplatte mit denen für das Schwingen ohne eine Metallplatte vergleichen. Es werden für jedes der drei Videos jeweils die Dauer für zehn Perioden gemessen und daraus die Schwingungsperiode bestimmt.

$$\begin{aligned} T_{\text{ohne}} &= \frac{(10,91 \pm 0,10) \text{ s}}{10} = (1,09 \pm 0,01) \text{ s} \\ T_{\text{Al}} &= \frac{(10,94 \pm 0,10) \text{ s}}{10} = (1,09 \pm 0,01) \text{ s} \\ T_{\text{Cu}} &= \frac{(10,90 \pm 0,10) \text{ s}}{10} = (1,09 \pm 0,01) \text{ s}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die Periodendauern für die Schwingungen über den Metallplatten weichen im Rahmen der Messgenauigkeit also nicht von der Periodendauer ohne Wirbelstromdämpfung ab. Die Näherung einer schwach gedämpften Schwingung erscheint damit gerechtfertigt.

3.i) **Bestimmung des spezifischen Widerstandes**
Theoretische Betrachtung

Gemäß der Aufgabenstellung folgt das Abklingen der Amplitude einem exponentiellen Verlauf. Daher gilt für den Logarithmus der Amplitude in Abhängigkeit von der Anzahl n der Perioden

$$\ln \frac{A}{A_0} = -\frac{\kappa T}{\rho} n. \quad (3.22)$$

Trägt man also für beide schwach gedämpften Schwingungen $\ln A/A_0$ über der Anzahl der Perioden auf, so ergibt sich jeweils ein linearer Zusammenhang. Die Steigung b der resultierenden Ausgleichsgeraden ist proportional zu $\frac{1}{\rho}$. Die Faktoren κ und T sind für die Schwingungen über den beiden Metallplatten identisch. Da der spezifische Widerstand von Kupfer gegeben ist, kann daher der spezifische Widerstand aus dem Verhältnis der Steigungen ermittelt werden zu

$$\rho_{\text{Al}} = \rho_{\text{Cu}} \frac{b_{\text{Cu}}}{b_{\text{Al}}}. \quad (3.23)$$

Auswertung und Ergebnisse

Zur Ermittlung der Amplituden für die Schwingungen wurden die Videos mit einem Videoabspielprogramm analysiert, das ein Abspielen in einzelnen Frames erlaubt. Es wurde jeweils die maximale Auslenkung als Funktion der Anzahl der Schwingungsperioden mit einem Lineal am Bildschirm gemessen. Da in die Formel (3.22) nur ein Amplitudenverhältnis eingeht, ist es unerheblich, dass der Maßstab des Bildschirms in der Regel nicht mit den tatsächlichen Längen übereinstimmt. Tabelle 2 stellt die gemessenen Werte für die beiden Schwingungen dar.

Tabelle 2: Messwerte für die am Bildschirm bestimmten Amplituden A der Schwingung des Magneten als Funktion der Anzahl n der absolvierten Amplituden.

n	Aluminiumplättchen				Kupferplättchen			
	A/cm	$\Delta A/\text{cm}$	$\ln(A/A_0)$	$\Delta \ln(A/A_0)$	A/cm	$\Delta A/\text{cm}$	$\ln(A/A_0)$	$\Delta \ln(A/A_0)$
0	3,60	0,10	0,00	0,06	3,65	0,10	0,00	0,05
1	3,40	0,10	-0,06	0,06	3,25	0,10	-0,12	0,06
2	3,15	0,10	-0,13	0,06	2,90	0,10	-0,23	0,06
3	3,10	0,10	-0,15	0,06	2,50	0,10	-0,38	0,07
4	2,90	0,10	-0,22	0,06	2,25	0,10	-0,48	0,07
5	2,75	0,10	-0,27	0,06	2,10	0,10	-0,55	0,08
6	2,60	0,10	-0,33	0,07	1,75	0,10	-0,74	0,08
7	2,35	0,10	-0,43	0,07	1,55	0,10	-0,86	0,09
8	2,20	0,10	-0,49	0,07	1,40	0,10	-0,96	0,10
9	2,10	0,10	-0,54	0,08	1,25	0,10	-1,07	0,11
10	1,90	0,10	-0,64	0,08	1,10	0,10	-1,20	0,12
11	1,80	0,10	-0,69	0,08	0,85	0,10	-1,46	0,15
12	1,65	0,10	-0,78	0,09	0,75	0,10	-1,58	0,16
13	1,55	0,10	-0,84	0,09	0,70	0,10	-1,65	0,17
14	1,40	0,10	-0,94	0,10	0,65	0,10	-1,73	0,18
15	1,35	0,10	-0,98	0,10	0,50	0,10	-1,99	0,23
16	1,25	0,10	-1,06	0,11				
17	1,20	0,10	-1,10	0,11				
18	1,15	0,10	-1,14	0,11				

Die Fehler für die Bestimmung der einzelnen Amplituden am Bildschirm wurden zu 0,1 cm abgeschätzt. In den logarithmischen Ausdruck geht sowohl die Unsicherheit der aktuellen als auch die

der anfänglichen Amplitude gemäß

$$\Delta \ln \frac{A}{A_0} = \frac{\Delta A_0}{A_0} + \frac{\Delta A}{A} \quad (3.24)$$

ein.

Abbildung 14 zeigt einen Graphen der logarithmierten relativen Amplituden $\ln(A/A_0)$ der Schwingungen als Funktion der Anzahl n der Perioden.

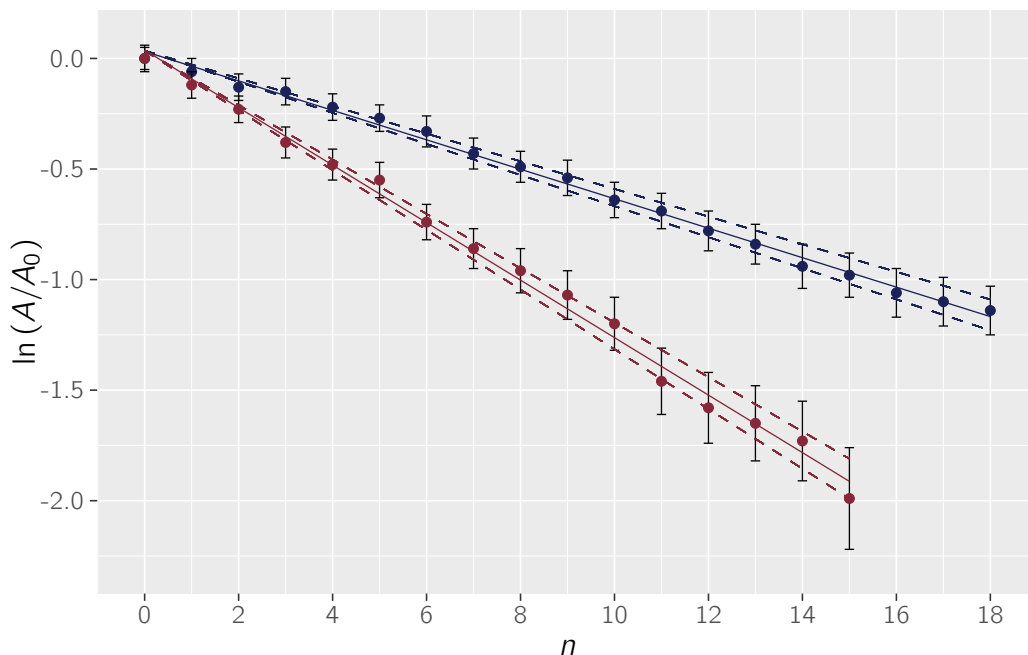


Abbildung 14: Graph der logarithmierten relativen Amplituden $\ln(A/A_0)$ der Schwingungen als Funktion der Anzahl n der Perioden für die Bewegung über der Aluminiumplatte (obere Kurve, blau) und über der Kupferplatte (untere Kurve, rot). Die gestrichelten Linien geben mit den Unsicherheiten verträgliche Ausgleichsgeraden minimaler und maximaler Steigung an.

Aus dem Graphen lassen sich die Steigungen der Geraden ablesen zu

$$b_{\text{Al}} = 0,067 \pm 0,004 \quad \text{und} \quad b_{\text{Cu}} = 0,130 \pm 0,007. \quad (3.25)$$

Damit ergibt sich der spezifische Widerstand von Aluminium aus den Messungen zu

$$\rho_{\text{Al}} = \rho_{\text{Cu}} \frac{b_{\text{Cu}}}{b_{\text{Al}}} = (3,3 \pm 0,4) \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}. \quad (3.26)$$

Der ermittelte Wert liegt etwas oberhalb des z. B. bei Wikipedia angegebenen Wertes von etwa $2,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$. Da die gewählte Methode aber einige Näherungen beinhaltet, liegt der Wert in einem akzeptablen Bereich.

Bewertung - Experimentelle Aufgabe - Schwingende Stäbchen		Punkte
3.a)	Beschreibung des Versuchsaufbaus und der Messwertaufnahme	1
	Aufnahme einer geeigneten Anzahl von Messwerten (≥ 10 Messwerte (1 P), gute Abdeckung des Messbereiches (1 P), Messung ≥ 5 Perioden (1 P), Wiederholungsmessung (1 P))	4
	Erstellung eines Graphen	2
	Fehlerbetrachtung für Messwerte	1
3.b)	Angabe einer Idee und theoretische Betrachtung	1
	Auswertung der Messwerte	1
	Angabe eines sinnvollen Ergebnisses ($8,3 \text{ m s}^{-2} \leq g \leq 11,3 \text{ m s}^{-2}$)	1
	Fehlerbetrachtung für Ergebnis	1
3.c)	Angabe einer Idee und theoretische Betrachtung (pro Methode 1 P)	2
	Auswertung der Messwerte (pro Methode 1 P)	2
	Angabe eines sinnvollen Ergebnisses (pro Methode 1 P)	2
	Fehlerbetrachtung und Vergleich der Ergebnisse	1
3.d)	Beschreibung und Angabe eines sinnvollen Ergebnisses	0,5
	Fehlerbetrachtung und Vergleich mit vorherigen Ergebnissen	0,5
3.e)	Beschreibung der Durchführung und Beobachtung	2
	Angabe des Verhältnisses mit Unsicherheit ($0,25 \leq \text{Verhältnis} \leq 0,40$)	1
3.f)	Formulierung einer sinnvollen Idee (z. B. Betrachtung von Translations- und Rotationsbewegung)	1
	Bestimmung der Translationsgeschwindigkeit nach Stoß	0,5
	Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit des Endpunktes nach Stoß	1
	Ableitung des Ergebnisses	0,5
3.g)	Formulierung einer Idee und getroffener Annahmen	1
	Theoretische Betrachtung und Ableitung des exponentiellen Abfalls der Amplitude	2
3.h)	Formulierung einer Idee zur Überprüfung auf schwache Dämpfung	1
	Auswertung der Videodaten und Ergebnisse für Periodendauern	1
	Begründung für schwache Dämpfung	1
3.i)	Formulierung einer Idee zur Bestimmung der Leitfähigkeit und Theorie	1,5
	Aufnahme geeigneter Messwerte aus Videos (≥ 7 Messwerte pro Platte (1 P), gute Abdeckung des Messbereiches (1 P))	2
	Auswertung der Messwerte (z. B. graphisch)	2
	Angabe eines sinnvollen Ergebnisses ($2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m} \leq \rho_{\text{Al}} \leq 3,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$)	1
	Fehlerbetrachtung für Ergebnis	1
	Vergleich mit Literaturwert	0,5
		40