

49. Internationale PhysikOlympiade Lissabon, Portugal 2018



Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen
Tel.: 0431 / 880 - 5120
email: petersen@ipho.info

Sekretariat

Sabrina Borchert
Tel.: 0431 / 880 - 5387
email: borchert@ipho.info

Anschrift: IPN an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62, 24118 Kiel

Fax: 0431 / 880 - 3148

Webseite: www.ipho.info

Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 49. IPhO 2018

Diese Musterlösungen und Bepunktungsrichtlinien waren die Grundlage der Bewertung der Arbeiten der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur Internationalen PhysikOlympiade 2018. Bei abweichenden Lösungswegen wurden die Bewertungen entsprechend angepasst.

Die Lösungen enthalten möglicherweise noch Fehler. Für Hinweise und Verbesserungsvorschläge unter petersen@ipho.info sind wir sehr dankbar.

Naturkonstanten und gebräuchliche Größen

Konstante	gebräuchliche Formelzeichen	Wert
Absoluter Nullpunkt	T_0	$0 \text{ K} = -273,15 \text{ °C}$
Atomare Masseneinheit	u	$1,660\,539 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6,022\,136\,7 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1,380\,658 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Elementarladung	e	$1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$
Fallbeschleunigung auf der Erde	g	$9,806\,65 \text{ m s}^{-2}$
Gravitationskonstante	γ, G	$6,672\,59 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c_0	$2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$1,256\,637\,061\,4 \cdot 10^{-6} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Normdruck, Atmosphärendruck	p_n	$101\,325 \text{ N m}^{-2}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6,626\,075\,5 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9,109\,389\,7 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1,674\,928\,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	$1,672\,623\,1 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$1,097\,373\,153\,4 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	α, σ	$5,670\,32 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Universelle Gaskonstante	R	$8,314\,510 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Elektronenvolt	eV	$1 \text{ eV} = 1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

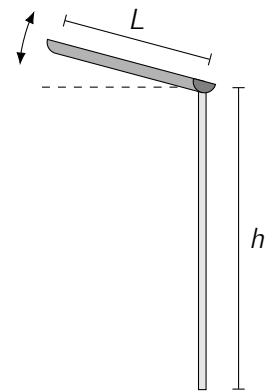
Aufgabe 1 Mechanische Spielereien

(10+10 Pkt.)

Zeit für physikalische Spielereien! In einer offensichtlich speziell für physikbegeisterte Menschen eingerichteten Mitmachausstellung gibt es allerlei zu entdecken. Schau dir zwei mechanische Exponate genauer an und überzeuge dich selbst.

1.1 Wasserspiel

An einer der ersten Stationen kannst du Wasser am oberen Ende in eine Rinne der Länge $L = 100$ cm gießen, das an dem unteren Ende aus der Rinne herausläuft. Die Rinne ist, wie nebenstehend abgebildet, an dem unteren Ende in einer Höhe $h = 200$ cm über dem Erdboden fixiert. Das obere Ende der Rinne kannst du aber in der Höhe variieren. Die Höhe des oberen Endes beeinflusst offensichtlich, wie weit ein Wasserstrahl kommt, bevor er auf den Boden trifft.



- 1.a) Bestimme näherungsweise die maximale horizontale Weite, gemessen vom unteren Ende der Rinne, die du mit dem Wasserstrahl erreichen kannst und welchen Winkel die Rinne dazu mit der Horizontalen einschließen muss. (10 Pkt.)

Du kannst dabei annehmen, dass sich das Wasser reibungsfrei bewegt und dass es mit einer vernachlässigbaren Geschwindigkeit in die Rinne gegossen wird.

Abbildung 1: Aufbau des Wasserspiels.

1.2 Luftkissenbahn und Reibung an einer Wand

(Idee: Lucas Rettenmeier)

Ein weiteres Highlight der Ausstellung ist die Luftkissenbahn, auf der sich ein kleiner, flacher Quader der Masse m , wie in der nebenstehenden Abbildung skizziert, reibungsfrei bewegt. Die Luftkissenbahn wird auf zwei Seiten durch feste Wände mit einem Abstand b voneinander begrenzt.

Betrachte den Fall, bei dem du den Quader von der linken Wand mit einer Geschwindigkeit v_0 in einem Winkel von $\alpha = 45^\circ$ zur Wand startest.

Bei jedem Stoß mit einer Wand nimmt die Geschwindigkeit des Quaders entlang der Wände ab, obwohl die dabei auftretenden Verformungen als elastisch angenommen werden können. Nach dem fünften Stoß besitzt der Quader so gut wie keine Geschwindigkeit mehr entlang der Wände und bewegt sich nur noch senkrecht zwischen den Wänden hin und her.

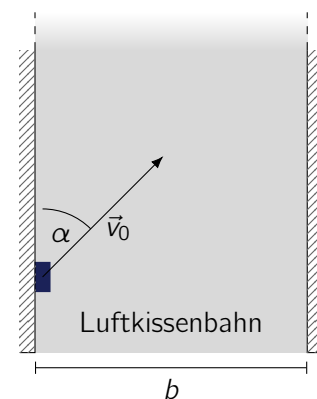


Abbildung 2: Aufsicht auf die Luftkissenbahn beim Start des Quaders.

- 1.b) Bestimme den Gleitreibungskoeffizienten zwischen Wand und Quader und gib einen Ausdruck für die von dem Quader entlang der Wände (in der Skizze nach oben) insgesamt zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von den gegebenen Größen an. (10 Pkt.)

Nimm zur Lösung an, dass sich der Quader während der Bewegung nicht dreht.

Lösung

1.1 Wasserspiel

- 1.a) Da keine Reibung wirkt, lässt sich die Geschwindigkeit v des Wassers am Ende der Rinne aus der Energieerhaltung berechnen. Es gilt:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \rho g L \sin \alpha \quad \text{und damit} \quad v = \sqrt{2 g L \sin \alpha}. \quad (1.1)$$

Dabei bezeichnen α den Kippwinkel der Rinne zur Horizontalen, g die Schwerebeschleunigung auf der Erde und ρ die Dichte von Wasser. Nach dem Verlassen der Rinne fällt das Wasser frei. Die anfängliche Geschwindigkeit in vertikale Richtung beträgt dabei $v \sin \alpha$, so dass das Wasser zur Zeit t nach dem Verlassen der Rinne eine Fallstrecke

$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v \sin \alpha t \quad (1.2)$$

zurückgelegt hat. Es erreicht den Boden, wenn $y(t_{\text{Boden}}) = h$ gilt. Einsetzen der Geschwindigkeit aus (1.1) ergibt eine quadratische Gleichung für t_{Boden} , die nur eine positive Lösung besitzt. Damit trifft das Wasser nach einer Fallzeit

$$t_{\text{Boden}} = \sqrt{\frac{2L}{g}} \left(\sqrt{\sin^3 \alpha + \frac{h}{L}} - \sin^{3/2} \alpha \right) \quad (1.3)$$

auf den Boden. Für die horizontale Strecke x , die das Wasser bis zum Auftreffen auf den Boden zurücklegt, gilt demnach

$$x = v \cos \alpha t_{\text{Boden}} = 2L \sqrt{\sin \alpha} \cos \alpha \left(\sqrt{\sin^3 \alpha + \frac{h}{L}} - \sin^{3/2} \alpha \right). \quad (1.4)$$

Es ist bemerkenswert, dass das Ergebnis unabhängig von der Schwerebeschleunigung g ist.

Um das Maximum der Weite x zu bestimmen, kann man, wie in Abbildung 3, x als Funktion von α auftragen und das Maximum graphisch bestimmen.

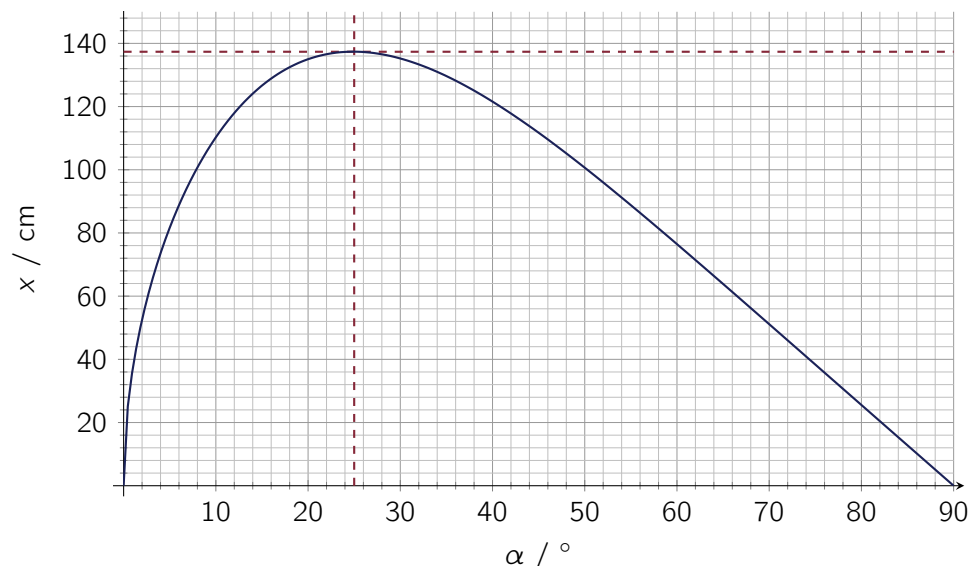


Abbildung 3: Horizontaler Abstand x von dem unteren Ende der Rinne in dem der Wasserstrahl auf den Boden trifft als Funktion des Winkels α , den die Rinne mit der Horizontalen einschließt.

Aus dem Graphen ergibt sich für die maximale Weite x_{max} näherungsweise

$$x_{\text{max}} = (137 \pm 1) \text{ cm} \quad \text{bei dem Winkel} \quad \alpha = (25 \pm 1)^\circ. \quad (1.5)$$

1.2 Luftkissenbahn und Reibung an einer Wand

- 1.b) Wir bezeichnen die Richtung quer zur Wand als x -Richtung (positiv nach rechts) und die Richtung entlang der Wand als y -Richtung (positiv nach oben). Betrachte den ersten Stoß des Quaders mit der rechten Wand. Da in x -Richtung nur elastische Verformungskräfte wirken, kann hier keine Bewegungsenergie verloren gehen. Damit entspricht die x -Komponente der Quadergeschwindigkeit nach dem Stoß gerade dem ursprünglichen Wert aber mit verändertem Vorzeichen. Die Wand bewirkt also einen Kraftstoß auf den Quader, der gerade der Impulsänderung Δp_x in x -Richtung entspricht:

$$\int dt F_x = \Delta p_x = -m v_x - (m v_x) = -2 m v_x = -2 m v_0 \cos \alpha. \quad (1.6)$$

In y -Richtung wirkt während des Stoßes eine (Gleit-)Reibungskraft F_R , die zum Abbremsen der Bewegung in y -Richtung führt und damit eine Impulsänderung Δp_y mit

$$\Delta p_y = - \int dt F_R = - \int dt \mu F_N = \mu \int dt F_x = \mu \Delta p_x = -2 \mu m v_0 \cos \alpha \quad (1.7)$$

bewirkt. Dabei wurde verwendet, dass die Reibungskraft ausgedrückt werden kann als das Produkt aus Normalkraft F_N auf die Wand und dem Gleitreibungskoeffizienten μ . Da der Kraftstoß in x -Richtung bei jedem Stoß betragsmäßig gleich groß ist, ist auch die Impulsänderung in y -Richtung bei jedem der Stöße gleich groß und es gilt

$$|\Delta p_y| = | -2 \mu m v_0 \cos \alpha | = 2 \mu m v_0 \sin \alpha = 2 \mu p_y^{(0)}. \quad (1.8)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass für $\alpha = 45^\circ$ die Werte von $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ gleich sind. Damit wird bei jedem der Wandstöße der Impuls in y -Richtung um einen Anteil 2μ des ursprünglichen Impulses $p_y^{(0)}$ in diese Richtung verringert.

Nach $N = 5$ Stößen mit der Wand hat der Quader seinen kompletten Impuls in y -Richtung verloren¹. Damit muss für den Gleitreibungskoeffizienten

$$1 = N \cdot 2 \mu \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\mu = \frac{1}{2N} = 0,1} \quad (1.9)$$

gelten.

Die Geschwindigkeit des kleinen Quaders in x -Richtung ändert sich während der Bewegung betragsmäßig nicht, so dass er für das Zurücklegen der Strecke von einer zur anderen Wand immer eine Zeit b/v_x benötigt. Der Impuls in y -Richtung beträgt nach dem i -ten Stoß mit $0 \leq i < 5$ noch $p_y^{(0)}(1 - 2i\mu)$. Der Quader legt daher zwischen dem i -ten und dem $i + 1$ -ten Stoß mit der Wand eine Strecke

$$y^{(i)} = \frac{p_y^{(0)}}{m} (1 - 2i\mu) \frac{b}{v_x} = b \frac{p_y^{(0)}}{p_x} \left(1 - \frac{i}{N}\right) = b \left(1 - \frac{i}{N}\right) \quad (1.10)$$

in y -Richtung zurück. Im letzten Schritt wurde dabei verwendet, dass für $\alpha = 45^\circ$ die anfänglichen Impulskomponenten in x - und y -Richtung gleich sind.

Die Strecke y , die der Quader bis zu dem N -ten Stoß in y -Richtung insgesamt zurücklegt, ist damit

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} y^{(i)} = b \sum_{i=0}^{N-1} \left(1 - \frac{i}{N}\right) = b \left(N - \frac{(N-1)N}{2N}\right) = \frac{N+1}{2} b \stackrel{N=5}{=} 3b. \quad (1.11)$$

¹Die Aufgabenstellung legt nahe, dass der komplette fünfte Stoß zum Abbremsen benötigt wird. Man könnte auch argumentieren, dass der Restimpuls in y -Richtung kleiner ist und ein Teil des Stoßes ausreicht. Auf jeden Fall muss $0,1 \leq \mu < 0,125$ gelten, da der vierte Stoß zum Abbremsen noch nicht ausgereicht hat.

Bewertung - Mechanische Spielereien		Punkte
1.a)	Bestimmen der Wassergeschwindigkeit am Ende der Rinne (1.1)	2
	Annehmen eines freien Falls außerhalb der Rinne	1
	Bestimmen der Fallzeit des Wassers (1.3)	2
	Ableiten der beim Fallen zurückgelegten horizontalen Strecke (1.4)	1
	Formulieren eines sinnvollen Ansatzes zur Bestimmung des Maximums (graphisch, numerisch, ...)	2
	Bestimmen eines Wertes für die Weite mit $135 \text{ cm} \leq x_{\text{max}} \leq 139 \text{ cm}$	1
	Bestimmen eines Wertes für den Winkel mit $23^\circ \leq \alpha \leq 27^\circ$	1
1.b)	Erkennen, dass der Betrag des Impulses in x -Richtung erhalten bleibt	2
	Bestimmen der Größe des Kraftstoßes (1.6)	1
	Ableiten eines Ausdruckes für Impulsänderung in y -Richtung bei Stoß (1.7)	2
	Erkennen, dass Impulsänderung $ \Delta p_y $ bei jedem Stoß konstant ist (1.8)	2
	Berechnen des Gleitreibungskoeffizienten (1.9)	1
	Angabe eines Ausdruckes für die in y -Richtung zurückgelegte Strecke (1.11)	1
	Berechnen des Endergebnisses für y in (1.11)	1
		20

Aufgabe 2 Quanteneffekte von Elektronen in Magnetfeldern (23+17 Pkt.)

(Idee: Academic Committee der 47. Internationalen PhysikOlympiade 2016 in Zürich)

Das Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelte Bohrsche Atommodell erlaubte erstmalig eine theoretische Erklärung der Größe von Atomen sowie von Spektrallinien im Wasserstoffatom. Auch wenn das Modell auf Postulaten basiert, die im Widerspruch zum Beispiel zur klassischen Mechanik und zur Elektrodynamik stehen, und genauere Experimente Unzulänglichkeiten des Modells aufdeckten, war es außerordentlich erfolgreich. Auch heute noch finden sich in vielen Darstellungen von Atomen die für das Bohrsche Atommodell typischen Bahnen der Elektronen um den Atomkern.

Die Grundannahme des Bohrschen Atommodells ist, dass sich die Elektronen eines Atoms ohne Energieverlust in Kreisbahnen um den Atomkern bewegen. Dabei sind nur solche Kreisbahnen erlaubt, für die der Bahndrehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches des reduzierten Planckschen Wirkungsquantums $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ mit $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js ist. Diese Bedingung lässt sich über den Impuls p des Elektrons entlang der Kreisbahn und deren Radius r ausdrücken durch

$$p = \frac{\hbar n}{r},$$

mit einer beliebigen ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$, die das Quantenniveau kennzeichnet².

Wenn sich ein Atom in einem externen Magnetfeld befindet, muss diese Quantisierungsbedingung modifiziert werden. Für ein Elektron der Ladung $-e$, das sich auf einer Kreisbahn bewegt, die senkrecht zur Richtung eines homogenen und konstanten Magnetfeldes orientiert ist, deren magnetische Flussdichte den Betrag B besitzt, lautet die Quantisierungsbedingung³

$$\frac{r p}{\hbar} - \frac{e r^2 B}{2 \hbar} = n.$$

Mit Hilfe dieser Quantisierungsbedingung lassen sich eine Reihe spannender Quantenphänomene erklären. Genau das sollst du im Folgenden nachvollziehen.

Nimm dazu in dieser Aufgabe an, dass sich die Elektronen als nichtrelativistische Teilchen betrachten lassen und vernachlässige das magnetische Moment des Elektrons aufgrund seines Spins⁴. Nach dem Pauliprinzip kann sich dann in jedem Quantenzustand nur ein Elektron befinden.

2.1 Unerwartete Ströme

Klassisch fließt durch ein an eine Spannungsquelle angeschlossenes Stück Metall ein Strom, der proportional zur Spannung über dem Material ist. In einem sehr kleinen und dünnen Metallring kann bei tiefen Temperaturen aber auch ganz ohne eine externe Spannungsquelle ein Strom fließen.

Betrachte zur Erklärung dieses Stromes einen Ring mit Radius r , in dem sich eine große Anzahl N Leitungselektronen der Masse m befindet. Nimm an, dass sich die Elektronen nur entlang des Ringes bewegen können und damit auf eine eindimensionale Bewegung eingeschränkt sind.

2.a) Berechne die gemäß der Bohrschen Quantisierung möglichen Energieniveaus E_n mit $n \in \mathbb{Z}$ der Elektronen unter dem Einfluß eines senkrecht zur Bewegung orientierten magnetischen Feldes der Flussdichte B . Zeige, dass für $B \neq 0$ die Energieniveaus E_n und E_{-n} verschieden sind. (4 Pkt.)

²In vielen Darstellungen des Bohrschen Atommodells werden nur positive Werte für n betrachtet. Die negativen Werte tragen den beiden möglichen Umlaufsinnen des Elektrons Rechnung und die Hinzunahme des Wertes $n = 0$ erlaubt auch den quantenmechanisch möglichen Zustand mit verschwindendem Bahndrehimpuls.

³vgl. z. B. Canuto & Kelly (1972). Hydrogen atom in intense magnetic field. *Astrophysics and Space Science*, 17(2), 277-291.

⁴Für Elektronen in starken Magnetfeldern ist das eine passende Annahme, da sich ihr Spin in dem Magnetfeld ausrichtet.

Wenn die Stärke des Magnetfeldes erhöht wird, ändern sich auch die möglichen Energieniveaus der Elektronen. Für bestimmte Werte ΔB der Änderung der magnetischen Flussdichte wird das Spektrum der Energieniveaus aber auf sich selbst abgebildet.

- 2.b) Bestimme den kleinsten von Null verschiedenen Wert für ΔB , bei dem das Spektrum der Energieniveaus unverändert bleibt. (3 Pkt.)
- 2.c) Gib einen Ausdruck für die Stromstärke I_n in dem Ring an, die von einem Elektron in dem n -ten Quantenniveau hervorgerufen wird. (2 Pkt.)

Elektronen sind Fermionen. Nach dem Pauliprinzip kann daher jeder Quantenzustand durch maximal ein Elektron besetzt sein. Bei sehr niedrigen Temperaturen besetzen die Elektronen in dem Ring die Zustände mit den niedrigsten möglichen Energien.

- 2.d) Leite einen Ausdruck für die bei sehr tiefen Temperaturen und gegebener Elektronenanzahl N insgesamt durch den Ring fließende Stromstärke $I(B)$ als Funktion der magnetischen Flussdichte ab und skizziere qualitativ den Verlauf von $I(B)$. Die magnetische Flussdichte soll dabei in einem Bereich von einigen ΔB um $B = 0$ variieren. (8 Pkt.)
- 2.e) Berechne die maximale Stromstärke I_{\max} , die durch diesen Effekt in einem Aluminiumring mit einem Radius von $r = 300 \text{ nm}$ und einer Elektronendichte entlang des Ringes von $\lambda = 2,0 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$ hervorgerufen wird. Die Größe λ gibt dabei die Anzahl der Elektronen pro Ringlänge an. Vergleiche den Wert für die maximale Stromstärke mit der Abschätzung $I_{\max} = \frac{e v_F}{2 \pi r}$. Hierbei ist v_F die so genannte Fermigeschwindigkeit eines Elektrons, die sich ergibt, wenn man die kinetische Energie des Elektrons mit der Fermienergie $E_F = 11,64 \text{ eV}$ von Aluminium gleichsetzt. (3 Pkt.)

Bei höheren Temperaturen besetzen die Elektronen nicht nur die tiefsten Energieniveaus, sondern auch Zustände höherer Energien. Der untersuchte Effekt verschwindet dann.

- 2.f) Schätze für den Ring aus dem letzten Aufgabenteil grob ab, ab welcher Temperatur der Effekt nicht mehr auftritt. (3 Pkt.)

2.2 Der Quanten-Hall-Effekt

Mit Hilfe der Bohrschen Quantisierung lässt sich auch der Quanten-Hall-Effekt an einem Modellsystem erklären.

Betrachte dazu ein System von Elektronen bei tiefen Temperaturen, die sich ausschließlich in einer Ebene bewegen können. Die Elektronen befinden sich in einem starken Magnetfeld der konstanten Flussdichte B , das senkrecht zu der Ebene orientiert ist. Wenn eine Spannung U entlang einer Richtung in der Ebene angelegt wird, führt dies zu einem Stromfluss der Stromstärke $I_H \sim U$ in der Ebene, aber senkrecht zu der Spannung. Anders als beim klassischen Hall-Effekt ist der Hall-Strom I_H beim Quanten-Hall-Effekt keine lineare Funktion der Magnetfeldstärke, sondern kann nur die Werte $I_H = \frac{k}{R_K} U$ mit $k \in \mathbb{N}$ annehmen. Die Größe R_K wird Klitzing-Konstante genannt.

- 2.g) Die Klitzing-Konstante R_K ist eine aus fundamentalen Naturkonstanten zusammengesetzte Größe. Bestimme einen Ausdruck für R_K , in dem nur die Planck-Konstante h , die Elementarladung e und die Lichtgeschwindigkeit c vorkommen. Mögliche numerische Faktoren können dabei zu 1 gesetzt werden. (3 Pkt.)

Die nächsten Aufgabenteile sollen den Mechanismus, der zu dem Quanten-Hall-Effekt führt, mit Hilfe der Bohrschen Quantisierungsbedingung veranschaulichen.

- 2.h) Unter dem Einfluss des Magnetfeldes bewegen sich die Elektronen in der Ebene auf Kreisbahnen, den so genannten Zyklotronorbits. Verwende die Bohrsche Quantisierungsbedingung und bestimme die Radien r_n der quantisierten Zyklotronorbits sowie deren Energieniveaus E_n . (3 Pkt.)

Betrachte nun ein zusätzliches, schwaches elektrisches Feld der konstanten Feldstärke E , das in der Ebene angelegt wird.

- 2.i) Zeige ohne Berücksichtigung von Quanteneffekten, dass die Zyklotronorbits der Elektronen unter dem Einfluss des elektrischen und magnetischen Feldes eine Driftbewegung senkrecht zum elektrischen und magnetischen Feld mit einer Driftgeschwindigkeit des Betrages $v_D = \frac{E}{B}$ ausführen. (5 Pkt.)

Im Folgenden soll die in Abbildung 4 gezeigte Situation untersucht werden. Die Elektronen bewegen sich in einem Kreisring mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2 mit $R_2 - R_1 \ll R_1$. Zwischen innerem und äußerem Radius ist eine Spannung U angelegt. Nimm an, dass die Spannung zu einem radialen elektrischen Feld mit konstanter Feldstärke E in dem Kreisring führt. Senkrecht zu dem Kreisring verläuft ein magnetisches Feld der konstanten Flussdichte B . Die Elektronen bewegen sich aufgrund des Magnetfeldes auf quantisierten Zyklotronorbits, deren Radius als sehr viel kleiner als der Abstand $R_2 - R_1$ angenommen werden kann.

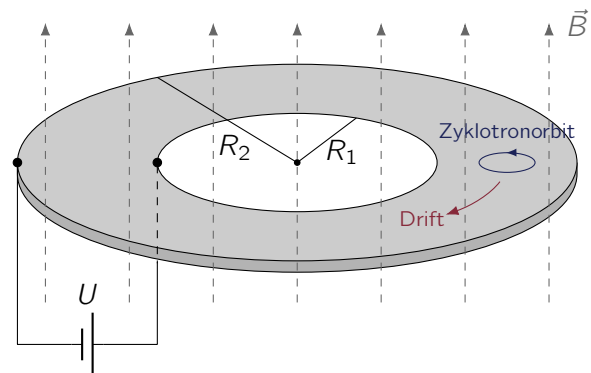


Abbildung 4: Nicht maßstabsgerechte Skizze des betrachteten Kreisringes, in dem sich die Elektronen bewegen.

Die Zyklotronorbits können nun selbst als Teilchen der Ladung $-e$ (Elektronenladung) und Masse m (Elektronenmasse) aufgefasst werden. Aufgrund des Drifts in den Feldern bewegen sie sich entlang des Kreisringes auf so genannten Driftorbits. Auch diese Orbits lassen sich quantisieren.

- 2.j) Nutze die Bohrsche Quantisierungsbedingung und zeige, dass für sehr schwache elektrische Felder die zulässigen Radien R_ℓ mit $\ell \in \mathbb{N}$ der Driftorbits gegeben sind durch $R_\ell = \sqrt{\frac{h\ell}{\pi e B}}$. (2 Pkt.)
- 2.k) Nimm an, dass die Elektronen nur das niedrigste, von Null verschiedene Energieniveau der Zyklotronorbits besetzen und dass alle in dem Kreisring möglichen Driftorbits gefüllt sind. Auf jedem Driftorbit befindet sich dann genau ein Elektron. Bestimme die Stromstärke I_H des entlang des Kreisringes fließenden Stromes als Funktion der Spannung U . Vernachlässige dabei die Bewegung der Elektronen in Richtung des elektrischen Feldes. Bestimme daraus die Klitzing-Konstante R_K und vergleiche dein Ergebnis mit dem ersten Aufgabenteil. (4 Pkt.)

Lösung

2.1 Unerwartete Ströme

2.a) Die gegebene Quantisierungsbedingung führt für den Impuls p_n im n -ten Quantenniveau auf

$$p_n(B) = \frac{\hbar}{r} \left(n + \frac{e r^2}{2 \hbar} B \right) \quad (2.1)$$

und damit für die Energie auf

$$E_n(B) = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m r^2} \left(n + \frac{e r^2}{2 \hbar} B \right)^2. \quad (2.2)$$

Für die Differenz der Energieniveaus mit positiver und negativer Quantenzahl gilt

$$E_n(B) - E_{-n}(B) = \frac{\hbar^2}{2m r^2} \left\{ \left(n + \frac{e r^2}{2 \hbar} B \right)^2 - \left(-n + \frac{e r^2}{2 \hbar} B \right)^2 \right\} = \frac{\hbar e n}{m} B. \quad (2.3)$$

Das Magnetfeld bricht also die Symmetrie zwischen den Umlaufsinnen der Elektronen.

2.b) Das Energiespektrum wird durch eine Erhöhung der magnetischen Flussdichte B um ΔB auf sich selbst abgebildet, wenn für alle $n \in \mathbb{Z}$ simultan

$$E_n(B + \Delta B) = E_{n+k}(B) \quad (2.4)$$

mit einer natürlichen Zahl k ist. Nach Gleichung (2.2) muss für ΔB also gelten:

$$n + \frac{e r^2}{2 \hbar} (B + \Delta B) = n + k + \frac{e r^2}{2 \hbar} B \quad \text{bzw.} \quad \Delta B = \frac{2 \hbar}{e r^2} k. \quad (2.5)$$

Der kleinste Wert von ΔB ergibt sich für $k = 1$ zu

$$\Delta B = \frac{2 \hbar}{e r^2}. \quad (2.6)$$

Durch eine Erhöhung der magnetischen Flussdichte um diesen Wert von ΔB wird das Energieniveau E_n auf das Niveau mit Energie E_{n+1} abgebildet. Auf gleiche Art und Weise wird bei einer Änderung der magnetischen Flussdichte um $-\Delta B$ das Energieniveau mit E_n auf das Niveau mit Energie E_{n-1} abgebildet.

2.c) Für den Strom I_n , der von einem Elektron im n -ten Quantenzustand hervorgerufen wird, gilt

$$I_n(B) = -\frac{e v_n(B)}{2 \pi r}. \quad (2.7)$$

Dabei bezeichnet v_n die Geschwindigkeit des Elektrons, die sich mit $p_n = m v_n$ aus dem Impuls ergibt. Mit Hilfe von (2.1) folgt daraus für den Strom

$$I_n(B) = -\frac{e p_n}{2 \pi r m} = -\frac{e \hbar}{2 \pi r^2 m} \left(n + \frac{e r^2}{2 \hbar} B \right) = -\frac{e \hbar}{2 \pi r^2 m} \left(n + \frac{B}{\Delta B} \right), \quad (2.8)$$

wobei die Größe $\Delta B = \frac{2 \hbar}{e r^2}$ aus dem vorigen Aufgabenteil verwendet wurde.

2.d) Wir betrachten getrennt die Fälle einer ungeraden und einer geraden Anzahl an Elektronen.

Ungerade Elektronenanzahl

Eine ungerade Anzahl N an Elektronen lässt sich schreiben als $N = 2M + 1$ mit $M \in \mathbb{N}$. Für $B = 0$ sind die Energiezustände symmetrisch um $n = 0$, so dass bei tiefen Temperaturen alle Energieniveaus mit $-M \leq n \leq M$ gefüllt sind. Auch für kleine Magnetfeldstärken ändert sich an der Besetzung nichts, so dass sich der Gesamtstrom $I(B)$ in diesem Fall ergibt zu:

$$I(B) = \sum_{n=-M}^M -\frac{e\hbar}{2\pi r^2 m} \left(n + \frac{B}{\Delta B} \right) = -\frac{e\hbar N}{2\pi r^2 m} \frac{B}{\Delta B} =: -2I_0 \frac{B}{\Delta B}. \quad (2.9)$$

Diese Formulierung ist gültig im Bereich $-\Delta B/2 \leq B < \Delta B/2$, wie im Folgenden gezeigt wird.

Wird die Stärke des Magnetfeldes erhöht, so verschieben sich die Energieniveaus gemäß (2.2). Für $B = \Delta B/2$ ist die Energie des Zustandes mit $n = -(M+1)$ gleich der Energie des Zustandes mit $n = M$, denn

$$E_{-(M+1)}(\Delta B/2) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(-M - 1 + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(M + \frac{1}{2} \right)^2 = E_M(\Delta B/2). \quad (2.10)$$

Bei einer weiteren Erhöhung der magnetischen Flussdichte steigt die Energie des Niveaus M an, während die Energie des Niveaus $-(M+1)$ geringer wird. Da die Gesamtenergie der Elektronen minimal sein soll, wird daher nun nicht mehr der Zustand des Quantenniveaus M sondern der mit $-(M+1)$ besetzt. Für die Stromstärke bedeutet dies nach (2.8) eine Differenz von

$$I_{-(M+1)} - I_M = -\frac{e\hbar}{2\pi r^2 m} (-M - 1 - M) = \frac{e\hbar N}{2\pi r^2 m} = 2I_0. \quad (2.11)$$

Die Stromstärke springt bei der magnetischen Flussdichte von $\Delta B/2$ also von dem Wert $-I_0$ auf den Wert I_0 und fällt bei einer weiteren Erhöhung der Flussdichte erneut linear ab. Diese Sprünge treten mit der Periodizität ΔB auf, nämlich immer dann, wenn die Energie des obersten unbesetzten Zustandes mit negativer Quantenzahl gleich der Energie des obersten besetzten Quantenzustandes ist. Dann findet eine Besetzungsänderung der Elektronenzustände statt. In gleicher Weise lässt sich bei einer Verringerung der Flussdichte argumentieren. Eine kompakte Darstellung für die Stromstärke im allgemeinen Fall ist weiter unten mit Gleichung (2.15) angegeben.

Gerade Elektronenanzahl

Eine gerade Anzahl N an Elektronen lässt sich schreiben als $N = 2M$ mit $M \in \mathbb{N}$. Für sehr kleine positive magnetische Flussdichten B besitzen die Niveaus mit positiven Quantenzahlen n nach (2.3) eine höhere Energie als die dazugehörigen Niveaus mit negativen Quantenzahlen $-n$. Daher sind bei tiefen Temperaturen alle Energieniveaus mit $-M \leq n \leq M-1$ gefüllt und es gilt für den Gesamtstrom in diesem Fall

$$I(B) = \sum_{n=-M}^{M-1} -\frac{e\hbar}{2\pi r^2 m} \left(n + \frac{B}{\Delta B} \right) = 2I_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{B}{\Delta B} \right). \quad (2.12)$$

Dieser Ausdruck gilt für $0 \leq B < \Delta B$. Für $B = \Delta B$ findet auch hier eine Besetzungsänderung der Zustände statt, da der Zustand mit Quantenzahl $-(M+1)$ dann die gleiche Energie besitzt wie der Zustand mit Quantenzahl $M-1$, denn

$$E_{-(M+1)}(\Delta B) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} (-M - 1 + 1)^2 = \frac{\hbar^2}{2mr^2} (M - 1 + 1)^2 = E_{M-1}(\Delta B). \quad (2.13)$$

Für die Stromstärke bedeutet dies nach (2.8) erneut eine Differenz von

$$I_{-(M+1)} - I_{M-1} = -\frac{e\hbar}{2\pi r^2 m} (-M-1 - M+1) = \frac{e\hbar N}{2\pi r^2 m} = 2I_0. \quad (2.14)$$

Die Stromstärke springt bei der magnetischen Flussdichte von ΔB also von dem Wert $-I_0$ auf den Wert I_0 und fällt bei einer weiteren Erhöhung der Flussdichte erneut linear ab. Diese Sprünge treten mit der Periodizität ΔB auf, nämlich immer dann, wenn die Energie des obersten unbesetzten Zustandes mit negativer Quantenzahl gleich der Energie des obersten besetzten Quantenzustandes ist. Dann findet eine Besetzungsänderung der Elektronenzustände statt. In gleicher Weise lässt sich, ausgehend von $B = 0$ die Verringerung der Flussdichte behandeln, so dass sich dieses periodische Verhalten auch für negative Werte von B fortsetzt. Eine kompakte Darstellung für die Stromstärke im allgemeinen Fall ist in Gleichung (2.15) angegeben.

Zusammenfassung

Die Stromstärke $I(B)$ in dem Ring lässt sich zusammenfassend darstellen als

$$I(B) = \begin{cases} -2I_0 \left(\frac{B}{\Delta B} - \lfloor \frac{B}{\Delta B} + \frac{1}{2} \rfloor \right), & \text{für } N \text{ ungerade} \\ I_0 - 2I_0 \left(\frac{B}{\Delta B} - \lfloor \frac{B}{\Delta B} \rfloor \right), & \text{für } N \text{ gerade} \end{cases} \quad (2.15)$$

mit $I_0 = \frac{e\hbar N}{4\pi r^2 m}$ und $\Delta B = \frac{2\hbar}{e r^2}$. Die Gaußklammer $\lfloor A \rfloor$ gibt dabei die größte ganze Zahl an, die kleiner oder gleich A ist. So sind $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$ und $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$.

In Abbildung 5 ist der Verlauf der Stromstärke skizziert.

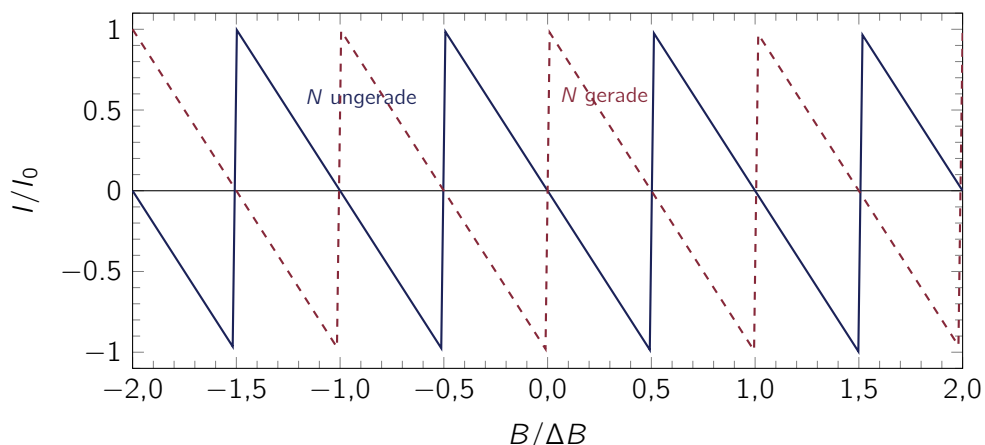


Abbildung 5: Qualitativer Verlauf der Stromstärke I im Ring in Abhängigkeit von der magnetischen Flussdichte B für eine ungerade Anzahl an Elektronen (blau) und eine gerade Anzahl an Elektronen (rot, gestrichelt).

Sowohl die maximale Stromstärke als auch die Periodizität des Verlaufes ist unabhängig davon, ob sich eine gerade oder ungerade Anzahl an Elektronen in dem Ring befindet.

- 2.e) Die maximale Stromstärke entspricht der bereits eingeführten Größe I_0 . Mit den gegebenen Werte ist

$$I_{\max} = \frac{e\hbar N}{4\pi r^2 m} = \frac{e\hbar \lambda}{2 r m} \approx 6,2 \cdot 10^{-8} \text{ A}. \quad (2.16)$$

Die Abschätzung mit Hilfe der Idee, dass der Strom durch ein einzelnes Elektron verursacht wird, welches sich mit der Fermigeschwindigkeit auf der Kreisbahn bewegt, ergibt

$$\tilde{I}_{\max} = \frac{e v_F}{2\pi r} = \frac{e \sqrt{2 E_F / m}}{2\pi r} \approx 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ A}. \quad (2.17)$$

Die beiden Werte weichen um etwa einen Faktor drei voneinander ab und liegen damit in der gleichen Größenordnung.

- 2.f) Der Effekt sollte verschwinden, wenn die thermische Energie $k_B T$ in der gleichen Größenordnung liegt, wie der Abstand der Energieniveaus der Quantenzustände. Betrachte für eine Abschätzung daher bei einer ungeraden Anzahl $N = 2M + 1$ Elektronen und $B = 0$

$$E_{M+1} - E_M = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left\{ (M+1)^2 - M^2 \right\} = \frac{\hbar^2 N}{2mr^2} = \frac{\pi \hbar^2 \lambda}{mr}. \quad (2.18)$$

Gleichsetzen mit der thermischen Energie liefert als Abschätzung für die maximale Temperatur

$$T_{\max} = \frac{\pi \hbar^2 \lambda}{k_B m r} \approx 19 \text{ K}. \quad (2.19)$$

Oberhalb von etwa 20 K sollte der Effekt also nicht mehr beobachtbar sein. Tatsächlich wurde er bisher nur bei noch niedrigeren Temperaturen beobachtet (s. Literaturhinweise in den Fußnoten).

Bemerkung: Das in dieser Aufgabe betrachtete Phänomen der so genannten *persistent currents* wurde bereits in den 80er Jahren des 20. Jahrhunderts theoretisch vorausgesagt⁵. Ein schlüssiger experimenteller Nachweis gelang allerdings erst in den letzten zehn Jahren⁶.

2.2 Der Quanten-Hall-Effekt

- 2.g) Gemäß der Aufgabenstellung lässt sich die Klitzing-Konstante schreiben als

$$R_K = h^\alpha e^\beta c^\gamma \quad (2.20)$$

mit reellen Konstanten α , β und γ . Ein Vergleich der physikalischen Dimensionen der Größen ergibt

$$[R_K] = \text{VA}^{-1} = [h]^\alpha [e]^\beta [c]^\gamma = \text{V}^\alpha \text{A}^{\alpha+\beta} \text{s}^{2\alpha+\beta-\gamma} \text{m}^\gamma. \quad (2.21)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich der Werte folgen daraus $\alpha = 1$, $\beta = -2$ und $\gamma = 0$. Damit ergibt sich aus dieser Dimensionsbetrachtung

$$R_K = \frac{h}{e^2}. \quad (2.22)$$

- 2.h) Im magnetischen Feld bewirkt die Lorentzkraft die für eine Kreisbahn notwendige Zentripetalkraft auf die Elektronen. Für den Radius r einer Elektronenkreisbahn und die dazugehörige Kreisfrequenz ω gilt daher

$$m\omega^2 r = e\omega r B \quad \text{und damit} \quad \omega = \frac{eB}{m}. \quad (2.23)$$

Die Zyklotronfrequenz ω ist also unabhängig von dem Radius der Kreisbahn. Für die Quantisierung ist zu beachten, dass es in diesem Fall nur einen möglichen Umlaufsinn für die Elektronen gibt, die durch das Kraftgesetz für die Lorentzkraft festgelegt ist. Die Quantenzahl n kann daher keine negativen Werte und auch nicht Null annehmen.

⁵vgl. z. B. Büttiker, Imry & Landauer (1983). Josephson behavior in small normal one-dimensional rings. *Physics letters a*, 96(7), 365-367 und Cheung, Gefen, Riedel & Shih (1988). Persistent currents in small one-dimensional metal rings. *Physical Review B*, 37(11), 6050.

⁶vgl. z. B. Blaszynski-Jayich, Shanks, Paudccerf, Ginossar, von Oppen, Glazman & Harris (2009). Persistent currents in normal metal rings: comparing high-precision experiment with theory. *Science*, 326(5950), 272-275 und Bluhm, H., Koshnick, N. C., Bert, J. A., Huber, M. E., & Moler, K. A. (2009). Persistent currents in normal metal rings. *Physical review letters*, 102(13), 136802.

Die Bohrsche Quantisierungsbedingung liefert für den Fall der Zyklotronbahnen mit $n \in \mathbb{N}$

$$n = \frac{r_n p_n}{\hbar} = \frac{e r_n^2 B}{2 \hbar} = \frac{m \omega r_n^2}{\hbar} = \frac{e r_n^2 B}{2 \hbar} = \frac{e r_n^2 B}{2 \hbar} \quad (2.24)$$

und damit

$$r_n = \sqrt{\frac{2 n \hbar}{e B}}. \quad (2.25)$$

Die Energieniveaus dieser quantisierten Kreisbahnen sind

$$E_n = \frac{m \omega^2 r_n^2}{2} = \frac{\hbar e B}{m} n = \hbar \omega n. \quad (2.26)$$

Hinweis: Bei einer vollständig quantenmechanischen Betrachtung ergibt sich für die Energien dieser so genannten Landau-Niveaus $E_n = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$ mit $n \in \mathbb{N}$.

- 2.i) Wähle das Koordinatensystem so, dass sich die Elektronen in der x - y -Ebene bewegen können und das elektrische Feld entlang der x -Achse orientiert ist. Die magnetische Flussdichte zeigt dann entlang der z -Achse.

Auf ein Elektron mit Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, 0)$ wirken die Kraft durch das elektrische Feld sowie die durch das Magnetfeld vermittelte Lorentzkraft. Es ergibt sich damit für die Bewegungsgleichung des Elektrons:

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} = -e \left(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right) = -e \left(\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \right) = -e \begin{pmatrix} E + \dot{y} B \\ -\dot{x} B \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Aufintegrieren über die Zeit t ergibt

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{e}{m} \begin{pmatrix} E t + (y - y_0) B \\ -(x - x_0) B \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\vec{r}}_0. \quad (2.28)$$

Dabei sind \vec{r}_0 und $\dot{\vec{r}}_0$ die Anfangsposition bzw. -geschwindigkeit des Elektrons. Wechselseitiges Einsetzen von (2.28) in die Bewegungsgleichung (2.27) führt auf

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= -\frac{e}{m} \begin{pmatrix} E + \frac{e}{m} B^2 (x - x_0) + \dot{y}_0 B \\ \frac{e}{m} B^2 (\frac{E}{B} t + y - y_0) - \dot{x}_0 B \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{e}{m} \vec{E} - \frac{e}{m} \dot{\vec{r}}_0 \times \vec{B} - \frac{e^2 B^2}{m^2} \left[\vec{r} - \vec{r}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{B} t \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dieser Ausdruck für die Beschleunigung lässt sich wie folgt interpretieren: Der erste Summand ist die Beschleunigung der Elektronen aufgrund des elektrischen Feldes. Der zweite Summand spiegelt die Lorentzkraft aufgrund der anfänglichen Geschwindigkeit des Elektrons wieder. Der dritte Term entspricht einer zweidimensionalen harmonischen Bewegung um die Koordinate $\vec{r}_0 - (0, \frac{E}{B} t, 0)$. Die Ruhelage der Schwingung bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $|v_D| = \frac{E}{B}$ in y -Richtung. Das ist die gesuchte Drift des Zyklotronorbits.

2.j) Analog zur Quantisierung der Zyklotronorbits ergibt sich für die Quantisierung der Driftorbits

$$\frac{R_\ell m v_D}{\hbar} - \frac{e R_\ell^2 B}{2 \hbar} = -\ell. \quad (2.30)$$

Der erste Summand ist wegen $v_D = \frac{E}{B}$ proportional zu E , während der zweite nicht von E abhängt. Für genügend kleine elektrische Felder kann der erste Term daher vernachlässigt werden. Damit ergibt sich für die zulässigen Radien der Driftorbits

$$R_\ell = \sqrt{\frac{2 \hbar \ell}{e B}} = \sqrt{\frac{h \ell}{\pi e B}}. \quad (2.31)$$

Das nach der oberen Gleichung eigentlich auftretende Minuszeichen wurde dabei in die Quantenzahl ℓ aufgenommen, die so alle natürlichen Zahlen annehmen kann.

2.k) Die Stromstärke, die durch den ℓ -ten Driftorbit hervorgerufen wird beträgt

$$I_\ell = \frac{e v_D}{2 \pi R_\ell} = \frac{e E}{2 \pi B} \sqrt{\frac{\pi e B}{h \ell}}. \quad (2.32)$$

Die insgesamt durch die Drift der Elektronen verursachte Stromstärke I_H ergibt sich durch Aufsummieren der Strombeiträge aller Driftorbits mit Radien zwischen R_1 und R_2 . Die entsprechenden Grenzen für die Quantenzahl ℓ ergeben sich mit (2.31) zu

$$\ell_{1,2} = \frac{\pi e B R_{1,2}^2}{h}. \quad (2.33)$$

Die Summe über die einzelnen Beiträge lässt sich durch ein Integral annähern und ergibt

$$I_H = \sum_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} I_\ell \approx \frac{e E}{2 \pi} \sqrt{\frac{\pi e}{h B}} \int_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} d\ell \frac{1}{\sqrt{\ell}} = \frac{e E}{\pi} \sqrt{\frac{\pi e}{h B}} (\sqrt{\ell_2} - \sqrt{\ell_1}), \quad (2.34)$$

was durch Einsetzen der Quantenzahlen auf das Ergebnis

$$I_H = \frac{e^2 E}{h} (R_2 - R_1) = \frac{e^2}{h} U \quad (2.35)$$

und damit in Übereinstimmung mit dem ersten Aufgabenteil auf die Klitzing-Konstante $R_K = \frac{h}{e^2}$ führt.

Bewertung - Quanteneffekte von Elektronen in Magnetfeldern		Punkte
2.a)	Verwenden des quantisierten Impulses (2.1)	1
	Angeben der Energie (2.2)	2
	Berechnen der Energiedifferenz (2.3)	1
2.b)	Aufstellen einer Bedingung für die Energien (2.4)	1
	Bestimmen des minimalen Wertes für ΔB (2.6)	2
2.c)	Ausdrücken des Stromes durch Ladung, Geschwindigkeit und Umfang (2.7)	1
	Angeben der Stromstärke (2.8)	1
2.d)	Verwenden einer Fallunterscheidung für gerade und ungerade N	1
	Berechnen der Ströme in der Nähe von $B = 0$ (2.9) und (2.12)	1
	Ausnutzen der Periodizität des Spektrums mit ΔB und berücksichtigen der Besetzungsänderung	2
	Ableiten der Sprünge in I durch Besetzungsänderung	1
	Angeben eines allgemeinen Ausdruckes für Stromstärke (2.15)	1
	Skizzieren des Verlaufes der Stromstärke für gerades und ungerades N	2
2.e)	Berechnen der maximalen Stromstärke (2.16)	1
	Ableiten eines Ausdruckes für die Stromstärke durch Fermielektronen (2.17)	1
	Bestimmen des numerischen Wertes in (2.17) und Vergleich der Stromstärken	1
2.f)	Formulieren einer Idee für die Abschätzung der Temperatur	2
	Bestimmen der Temperatur (2.19) mit $1 \text{ K} \lesssim T_{\max} \lesssim 50 \text{ K}$	1
2.g)	Verwenden der Idee einer Dimensionsanalyse	1
	Aufstellen einer Gleichung für die Dimensionsanalyse (2.21)	1
	Angeben der Klitzing-Konstante (2.22)	1
2.h)	Bestimmen der Zyklotronfrequenz (2.23)	1
	Bestimmen der quantisierten Zyklotronradien (2.25)	1
	Bestimmen der quantisierten Energieniveaus (2.26)	1
2.i)	Aufstellen der Bewegungsgleichungen im E - B -Feld (2.27)	1
	Entkoppeln der Bewegungsgleichungen (2.29)	2
	Interpretation und erkennen der Driftbewegung	2
2.j)	Angeben einer passenden Quantisierungsbedingung für Driftorbits (2.30)	1
	Verwenden der Näherung kleiner E -Felder und bestimmen der Radien (2.31)	1
2.k)	Angeben der Stromstärke eines einzelnen Driftorbits (2.32)	1
	Berechnen der Quantenzahlen für inneren und äußeren Radius (2.33)	1
	Bestimmen des Gesamtstromes durch Driftorbits (2.35)	1
	Angeben der Klitzing-Konstante und vergleichen mit vorherigem Wert	1
		40

Aufgabe 3 Experimentelle Aufgabe - Nichts als Luft

(20+20 Pkt.)

Für ein ideales Gas⁷ stellt die auch als allgemeine Gasgleichung bezeichnete Zustandsgleichung

$$pV = nRT$$

einen Zusammenhang zwischen dem Druck p , dem Volumen V , der Stoffmenge n und der Temperatur T des Gases her. Die Größe $R \approx 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ bezeichnet dabei die universelle Gaskonstante. Luft kann in guter Näherung als ideales Gas betrachtet werden. In dieser Aufgabe sollst du zwei Experimente mit Luft durchführen und so den thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten von Luft sowie den Luftdruck bestimmen.

Die Experimente sind als Hausexperimente gedacht. Du solltest daher nicht auf die komplette Ausstattung der Schulsammlung zurückgreifen, sondern dir selbst einen geeigneten Versuchsaufbau überlegen. Neben Luft kannst du dafür die folgenden Materialien für die Experimente verwenden: Thermometer, verschiedene Gefäße, Schläuche, Stopfenmaterial zum Verschließen der Schläuche, Lineal, Zollstock bzw. Gliedermaßstab, Klebeband, warmes und kaltes Wasser sowie andere, haushaltstypische Gegenstände. Verwende bitte nur die angegebenen Materialien. Andernfalls kann es zu einem Punktabzug kommen.

Allgemeine Hinweise zur experimentellen Aufgabe

- Führe alle Versuche so durch, dass die Ergebnisse so genau wie möglich sind. Beachte, dass die Ergebnisse in der Regel genauer werden, wenn du deine Ergebnisse aus Messreihen anstatt von Einzelmessungen bestimmst.
- Beschreibe und dokumentiere dein Vorgehen so ausführlich, dass jeder Schritt gut nachvollziehbar ist. Skizziere insbesondere deine Versuchsaufbauten.
- Schätze außerdem die Fehler aller Ergebnisse sinnvoll ab.

3.1 Volumenausdehnung

Wird ein Gas erwärmt, so dehnt es sich aus. Für Änderungen ΔT der Temperatur, die klein gegen die Ausgangstemperatur T sind, ist die Änderung ΔV des Gasvolumens bei konstantem Druck ungefähr proportional zu ΔT und zum Gasvolumen V bei der Temperatur T . Es gilt also:

$$\Delta V \approx \gamma V \Delta T.$$

Die Größe γ ist der thermische Volumenausdehnungskoeffizient, den du für diese Aufgabe im Bereich von $\pm 20^\circ\text{C}$ um die Zimmertemperatur als konstant annehmen kannst.

- 3.a) Bestimme experimentell den thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten von Luft bei Zimmertemperatur. Leite einen Ausdruck für den theoretisch bei einem idealen Gas zu erwartenden Wert ab und vergleiche ihn mit deinem Ergebnis. (20 Pkt.)

3.2 Luftdruck

- 3.b) Bestimme experimentell den Luftdruck und vergleiche deinen Wert mit dem aktuellen Luftdruck am Versuchsort. Letzteren kannst du entweder im Internet recherchieren oder mit Hilfe eines weiteren Luftdruckmessers bestimmen. (20 Pkt.)

Du kannst für die Schwerebeschleunigung auf der Erde den Wert $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ und für die Dichte von Wasser $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ verwenden.

⁷Ein ideales Gas bezeichnet eine idealisierte Modellvorstellung eines Gases, bei der die Gasteilchen als punktförmig angenommen werden und sich, abgesehen von Stößen, frei bewegen können. Viele Gase verhalten sich in guter Näherung wie ideale Gase.

Lösung

3.1 Volumenausdehnung

3.a) Theoretische Betrachtung

Gemäß der gegebenen Formel sollte die bei einer Temperaturänderung ΔT zu beobachtende Volumenänderung $\Delta V = V - V_0$ proportional zu $\Delta T = T - T_0$ sein. Dabei bezeichnet, anders als in der Aufgabenstellung, V_0 das Gasvolumen bei der Ausgangstemperatur T_0 . Wenn man daher die Änderung eines Luftvolumens als Funktion der Temperaturänderung aufträgt, entspricht die Steigung α der Ausgleichsgeraden dem Produkt $V_0 \gamma$. Der thermische Volumenausdehnungskoeffizient γ lässt sich damit bestimmen aus

$$\gamma = \frac{\alpha}{V_0}. \quad (3.1)$$

Die Steigung α lässt sich auch bestimmen, indem man statt der Änderungen direkt das Volumen V über der Temperatur T aufträgt, da die Verschiebungen nicht zu einer Änderung der Steigung führen. Zur Bestimmung des Volumenausdehnungskoeffizienten wird daher V über T aufgetragen.

Versuchsbeschreibung und Messwerte

In dem in Abbildung 6 gezeigten Aufbau wird ein Luftvolumen in einem Messzylinder eingeschlossen, der kopfüber in ein Wasserbad mit warmem Wasser gestellt wird. Der Messzylinder wird mit einem Gewicht beschwert, damit er nicht aufschwimmt und die Luft nicht entweichen kann.

Es wird angenommen, dass das gesamte Luftvolumen eine Temperatur besitzt, die der momentanen Wassertemperatur entspricht. Da die Temperaturänderungen langsam erfolgt und das Glas des Messzylinders thermisch gut isolierend wirkt, erscheint diese Annahme gerechtfertigt. Die Differenz des Wasserspiegels im Wasserbad und im Zylinder beträgt weniger als 10 cm, so dass der zusätzliche Druck im Luftvolumen durch die Wassersäule weniger als 1 % des Atmosphärendruckes von etwa 10^5 Pa entspricht. Es kann also auch angenommen werden, dass der Druck in dem Messzylinder dem Atmosphärendruck entspricht.

Zur Messung der Temperatur wird ein Flüssigkeitsthermometer verwendet.

Das Volumen der eingeschlossenen Luft kann in diesem Fall direkt an der Skala des Messzylinders abgelesen werden. Bei Verwendung eines anderen Gefäßes ohne Volumenskala kann die Höhe mit Hilfe eines Lineals gemessen und mit der Querschnittfläche zu einem Volumen umgerechnet werden. Für die Bestimmung der Steigung kann auch direkt die Höhe des Luftvolumens bzw. dessen Änderung über der Temperatur aufgetragen werden. Aus der entsprechenden Steigung lässt sich γ ebenfalls berechnen.

In der folgenden Tabelle ist das Luftvolumen V in dem Zylinder in Abhängigkeit von der Wassertemperatur T aufgeführt.



Abbildung 6: Versuchsaufbau zur Messung der Luftvolumenänderung als Funktion der Temperaturänderung.

Tabelle 1: Messwerte für das in dem Messzylinder eingeschlossene Luftvolumen V in Abhängigkeit von der Wassertemperatur T . Als Referenzwerte bei Zimmertemperatur wurden $T_0 = (21,0 \pm 0,5)^\circ\text{C}$ und $V_0 = (88,2 \pm 0,3) \text{ mL}$ verwendet.

$T / ^\circ\text{C}$	45,0	42,5	41,0	39,0	38,0	36,0	34,5	33,0
V / mL	96,2	95,4	94,8	94,2	93,8	93,3	92,9	92,1
$T / ^\circ\text{C}$	31,0	30,0	28,5	28,0	27,0	25,5	23,5	21,0
V / mL	91,5	91,0	90,4	90,2	89,9	89,4	88,9	88,2

Der Fehler beim Ablesen der Temperaturskala wird zu $\delta T = \pm 0,5 \text{ K}$ geschätzt. Etwaige konstante systematische Fehler des Thermometers sind für die Steigung nicht relevant, da diese in den Temperaturdifferenzen herausfallen. Der Fehler beim Ablesen der Volumenskala wird zu $\delta V = \pm 0,3 \text{ mL}$ geschätzt. Das ist auch etwa der Fehler, den man durch Ablesen der Füllhöhe mit einem Lineal und Bestimmung des Volumens durch Multiplikation mit dem Zylinderquerschnitt erhalten würde.

Auswertung und Fehlerbetrachtung

Der Graph in Abbildung 7 zeigt das Luftvolumen V als Funktion der Temperatur T in $^\circ\text{C}$. Die Unsicherheiten in den Messgrößen sind als Fehlerbalken eingetragen.

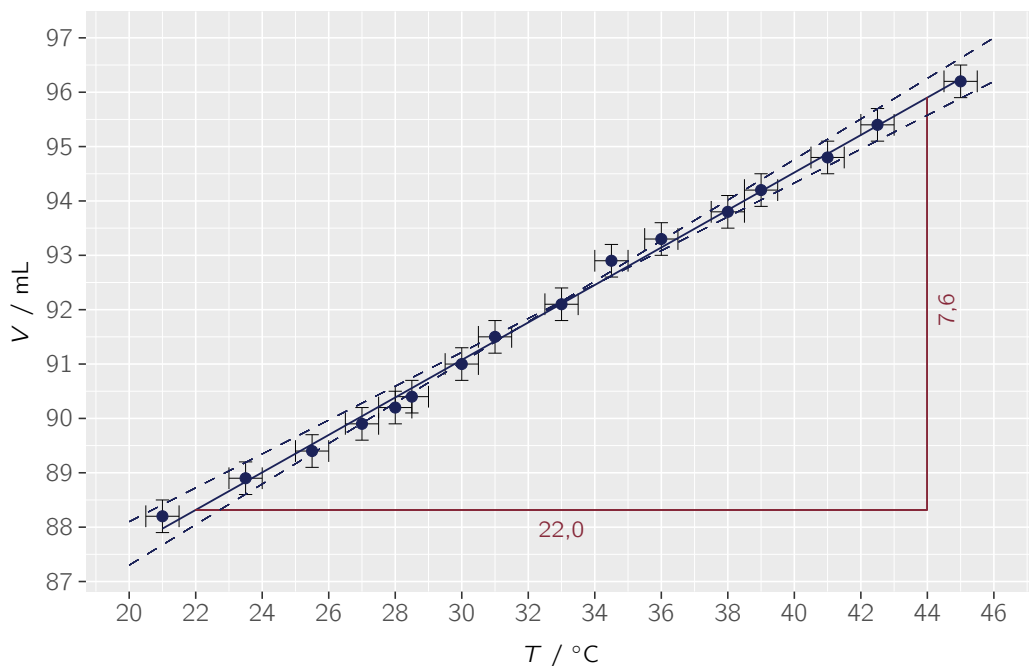


Abbildung 7: Graph des Luftvolumens V im Messzylinder als Funktion der Temperatur T . Die gestrichelten Linien geben mit den Unsicherheiten verträgliche Ausgleichsgeraden minimaler und maximaler Steigung an.

Aus dem Steigungsdreieck im Graphen lässt sich die Steigung der Ausgleichsgeraden bestimmen zu

$$\alpha = (0,34 \pm 0,03) \text{ mL K}^{-1}. \quad (3.2)$$

Dabei wurde die Mitte des Bereiches genommen, der sich durch die Betrachtung der alternativen Ausgleichsgeraden ergibt. Mit Hilfe von (3.1) und dem Ausgangsluftvolumen $V_0 = (88,2 \pm 0,3) \text{ mL}$

bei Zimmertemperatur ergibt sich so für den Volumenausdehnungskoeffizienten von Luft

$$\gamma = \frac{\alpha}{V_0} = \frac{(0,34 \pm 0,03) \text{ mL K}^{-1}}{(88,2 \pm 0,3) \text{ mL}} = (3,9 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}. \quad (3.3)$$

Der relative Gesamtfehler wurde dabei aus den quadratischen relativen Fehlern der beiden eingehenden Größen abgeschätzt.

Nach dem Gasgesetz gilt für die Volumenänderung

$$\Delta V = \frac{nR}{p} \Delta T = \frac{nR}{V_0 p} V_0 \Delta T = \frac{1}{T_0} V_0 \Delta T \stackrel{!}{=} \gamma V_0 \Delta T. \quad (3.4)$$

Damit ist der theoretisch bei einem idealen Gas zu erwartende Wert

$$\gamma = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{(273,15 + 21 \pm 2) \text{ K}} = (3,40 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}. \quad (3.5)$$

Dabei wurde der Fehler bei der Temperaturmessung großzügiger abgeschätzt, um einen möglichen Offset des Thermometers zu berücksichtigen.

Der experimentell ermittelte Wert liegt deutlich oberhalb des für ein ideales Gas zu erwartenden Wertes, passt im Rahmen der Fehlergrenzen aber einigermaßen zu dem theoretisch bestimmten⁸.

3.2 Luftdruck

3.b) Theoretische Betrachtung

Die Gasgleichung sagt für eine konstante Temperatur und Stoffmenge voraus, dass das Produkt pV konstant ist. Dieser auch als Gesetz von Boyle-Mariotte bekannte Zusammenhang lässt sich umschreiben zu

$$V = nRT \frac{1}{p}. \quad (3.6)$$

wird nun der Druck von dem Atmosphärendruck p_0 auf einen Wert $p = p_0 + \Delta p$ mit $|\Delta p| \ll p_0$ verändert, so ändert sich das Volumen näherungsweise um den Wert

$$\Delta V = V - V_0 = nRT \left(\frac{1}{p_0 + \Delta p} - \frac{1}{p_0} \right) \approx -\frac{nRT}{p_0^2} \Delta p = -\frac{V_0}{p_0} \Delta p. \quad (3.7)$$

Die Volumenänderung ΔV eines Gases bei konstanter Temperatur und mit konstanter Stoffmenge sollte bei Variation des Druckes also proportional zur Druckänderung Δp sein.

⁸Für den zu großen Wert könnte der in dem Luftvolumen enthaltene Wasserdampf verantwortlich sein. Führt man das Experiment langsam durch, sollte der Partialdruck von Wasserdampf immer gleich dem Dampfdruck des Wassers sein. Dieser ist abhängig von der Temperatur und größer für höhere Temperaturen. Unter Annahme der Sättigung würde das nicht berücksichtigte (variable) Volumen des Wasserdampfes in dem eingeschlossenen Volumen somit zu einem steileren Anstieg des Graphen führen. Schränkt man die Daten auf einen niedrigeren Temperaturbereich ein, so erhält man in der Tat eine geringere Steigung und kommt auf einen Wert für den Volumenausdehnungskoeffizienten, der in der Nähe des theoretisch vorhergesagten liegt. Allerdings wird der Fehler des Ergebnisses dann auch größer. Um dies zu umgehen, könnte man den untersuchten Temperaturbereich durch Abkühlen des Wassers nach unten erweitern.

Betrachte die in der nebenstehenden Abbildung 8 skizzierte Situation. In einem zum Teil mit Wasser gefüllten Schlauch oder Rohr mit konstanter Querschnittsfläche A befindet sich auf der linken Seite ein mit einem Stopfen abgeschlossenes Luftvolumen $V = Az$. Das rechte Schlauch- bzw. Rohrende ist offen. Wird die Höhe h des Wasserspiegels in dem rechten Teil zum Beispiel durch Anheben des Schlauchendes verändert, so ändert sich aufgrund des Schweredruckes des Wassers im Schlauch auch der Druck in dem eingeschlossenen Luftvolumen und damit auch die Höhe z des eingeschlossenen Volumens. Die Koordinaten werden so gewählt, dass die Höhe h nach oben und die Höhe z nach unten positiv gezählt werden. Für $h = h_0$ wird die dazugehörige Höhe des auf der linken Seite eingeschlossenen Volumens mit $z_0 = z(h_0)$ bezeichnet. Damit ist das anfängliche Volumen bei Atmosphärendruck $V_0 = Az_0$.

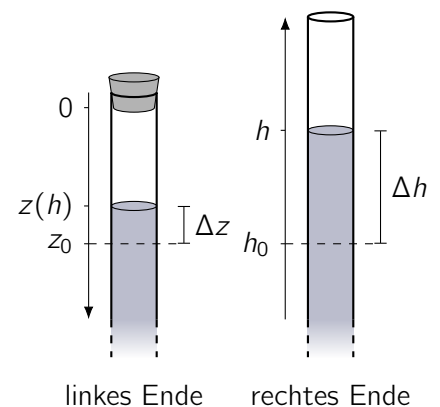


Abbildung 8: Skizze zur Bestimmung des Luftdrucks.

Der Zusammenhang (3.7) lässt sich mit den eingeführten Bezeichnungen schreiben als

$$\Delta z = z(h) - z_0 \approx -\frac{z_0 \rho g}{p_0} (\Delta h + \Delta z) \quad \text{und damit} \quad \boxed{\Delta z \approx -\frac{1}{\frac{p_0}{z_0 \rho g} + 1} \Delta h}. \quad (3.8)$$

Dabei wurde der Druck Δp durch den Schweredruck $\rho g (h - h_0 + z - z_0)$ des im rechten Teil über dem Wasserspiegel des linken Teil stehenden Wassers ersetzt. Der Bruch in dem Ausdruck für Δz kann durch $\frac{z_0 \rho g}{p_0}$ approximiert werden, wenn man erneut ausnutzt, dass der Atmosphärendruck sehr viel größer als der Schweredruck der Wassersäule ist. Im Folgenden wird aber ohne diese Näherung gerechnet.

Damit ist die Änderung Δz näherungsweise eine lineare Funktion der Höhenänderung Δh des Wassers im rechten Teil. Aus der Steigung β der Funktion lässt sich der Atmosphärendruck p_0 bestimmen gemäß

$$\beta = -\frac{1}{\frac{p_0}{z_0 \rho g} + 1} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{p_0 = -z_0 \rho g \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right)}. \quad (3.9)$$

Versuchsbeschreibung und Messwerte

Für den Versuch wurde, wie nebenstehend in Abbildung 9 gezeigt, ein transparenter Plastikschlauch mit einem Durchmesser von $d = (1,10 \pm 0,05)$ cm verwendet, der nahezu vollständig mit Wasser gefüllt wurde. Dabei wurden Luftblasen in dem Schlauch durch Drehen und Klopfen entfernt.

Auf der in der Abbildung linken Seite wurde der Schlauch mit einer Stiftunterseite luftdicht abgedichtet und die Position z_0 des Wasserspiegels bei gleich hohem Wasserstand in beiden Schlauchteilen mit einem Stift markiert. Die Höhe des offenen, rechten Schlauchendes wurde variiert, der Schlauch mit Klebeband an einen Schrank geklebt und die Höhe h mit einem Gliedermaßstab vom Boden aus gemessen. Es wurden Höhendifferenzen von etwa 2 m aufgenommen. Dies ist im Vergleich zum Atmosphärendruck, der etwa einer Wassersäule von 10 m entspricht immer noch relativ klein. Die Änderung des Wasserspiegels in dem linken Schlauchteil wurde mit einem Lineal gemessen.

Die Höhe z_0 des eingeschlossenen Luftvolumens bei Atmosphärendruck betrug $z_0 = (107 \pm 1)$ mm und damit das eingeschlossene Luftvolumen selbst $V_0 = \frac{\pi}{4} d^2 z_0 = (10 \pm 1)$ cm³. Die Höhe h_0 wurde zu $(41,1 \pm 0,1)$ cm gemessen.

In Tabelle 2 sind die Messwerte des Experimentes aufgeführt. Zu jeder Höhe h des Wasserspiegels in dem rechten Schlauchteil sind die Änderung Δz der Höhe des in dem Schlauch eingeschlossene Luftvolumens sowie die Höhenänderung Δh angegeben.

Tabelle 2: Messwerte für die Höhe h des Wasserspiegels im rechten Schlauchteil und die dazugehörigen Änderungen Δh sowie Δz .

h / cm	20,0	40,0	41,1	60,0	80,0	100,0	120,0	140,0	160,0	180,0	200,0
Δh / cm	-21,1	-1,1	0,0	18,9	38,9	58,9	78,9	98,9	118,9	138,9	158,9
Δz / mm	3,0	0,5	0,0	-2,0	-4,0	-6,5	-8,0	-10,0	-12,0	-13,5	-15,0

Der Fehler beim Ablesen der Längen auf dem Gliedermaßstab wird zu $\delta h = \pm 0,1$ cm geschätzt. Für die Höhendifferenz Δh müsste dazu noch der Fehler beim Ablesen der Referenzhöhe h_0 hinzuaddiert werden. Da für die Auswertung aber nur die Steigung der Ausgleichsgeraden in Abbildung 10 relevant ist und sich diese durch eine Verschiebung aller Werte nicht ändern würde, ist dieser Fehler im Folgenden nicht relevant. Der Fehler beim Ablesen der Höhendifferenz Δz wird zu $\delta(\Delta z) = \pm 0,5$ mm geschätzt.

Auswertung und Fehlerbetrachtung

Der Graph in Abbildung 10 zeigt die Höhenänderung δz des eingeschlossenen Luftvolumens als Funktion der Höhenänderung Δh der Wassersäule. Die Unsicherheiten in den Messgrößen sind als Fehlerbalken eingetragen.



Abbildung 9: Versuchsaufbau zur Messung der Luftvolumenänderung als Funktion der Druckänderung.

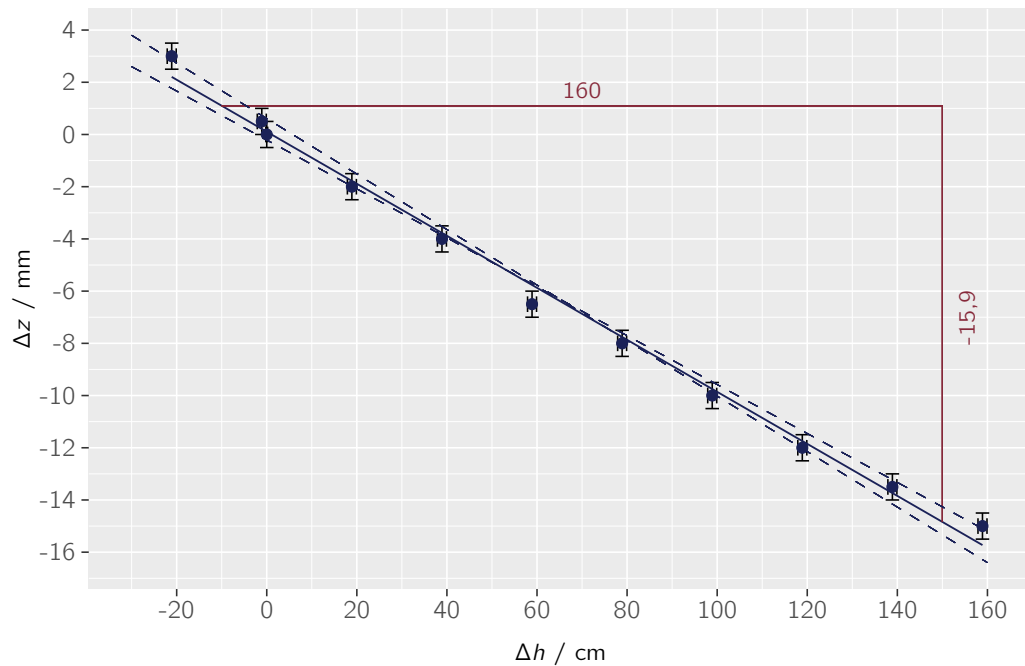


Abbildung 10: Graph der Änderung Δz der Höhe des in dem linken Schlauchteil eingeschlossenen Luftvolumens als Funktion der Differenz der Wasserhöhe in dem rechten Schlauchteilen als Maß für den Druck in dem eingeschlossenen Luftvolumen. Die gestrichelten Linien geben mit den Unsicherheiten verträgliche Ausgleichsgeraden minimaler und maximaler Steigung an.

Aus dem Steigungsdreieck im Graphen lässt sich die Steigung der Ausgleichsgeraden bestimmen zu

$$\beta = -(1,00 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}. \quad (3.10)$$

Mit Hilfe von (3.9) und der Höhe $z_0 = (0,107 \pm 0,001) \text{ m}$ des Ausgangsluftvolumens bei Atmosphärendruck ergibt sich für den Atmosphärendruck von Luft

$$p_0 = -z_0 \rho g \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right) = (1,06 \pm 0,06) \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (3.11)$$

Der relative Gesamtfehler wurde dabei aus den quadratischen relativen Fehlern der beiden eingehenden Größen abgeschätzt.

Der mit einem Smartphoneluftdrucksensor gemessene Wert für den Atmosphärendruck lag zum Versuchszeitpunkt bei $p_0 = 1,021 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ (ohne Fehlerangabe). Der experimentell bestimmte Wert weist damit eine gute Übereinstimmung auf. Allerdings ist der Fehler der Messung relativ groß, so dass sich die Methode zur genauen Bestimmung des Atmosphärendruckes kaum eignet.

Hinweis: Die Herausforderung bei dieser Aufgabe liegt zu einem großen Teil darin, die Messungen sensibel genug für die Bestimmung der gesuchten Größen durchzuführen. Daher sollte bei der Bewertung besonderes Augenmerk auf die Auswahl und Beschreibung eines passenden Versuchsaufbaus und einer sinnvollen -durchführung gelegt werden.

Bewertung - Experimentelle Aufgabe - Nichts als Luft		Punkte
3.a)	Formulieren einer Idee zur Bestimmung der Volumenausdehnung und theoretische Betrachtung	2
	Verwenden eines geeigneten Versuchsaufbaus für das Experiment	2
	Genaues Beschreiben des Aufbaus und der Versuchsdurchführung	2
	Aufnehmen einer geeigneten Anzahl von Messwerten ($\gtrsim 10$ Messwerte (3 P), gute Abdeckung des Messbereiches (1 P))	4
	Fehlerbetrachtung für Messwerte	1
	Auswerten der Messwerte (z.B. graphisch)	4
	Angeben eines sinnvollen Ergebnisses ($3,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \leq \gamma \leq 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$)	2
	Bestimmen des theoretisch zu erwartenden Wertes aus Gasgleichung	1
	Fehlerabschätzung für Ergebnis und Vergleich mit Referenzwert	2
3.b)	Formulieren einer Idee zur Bestimmung des Luftdruckes und theoretische Betrachtung	3
	Verwenden eines geeigneten Versuchsaufbaus für das Experiment	2
	Genaues Beschreiben des Aufbaus und der Versuchsdurchführung	2
	Aufnehmen einer geeigneten Anzahl von Messwerten ($\gtrsim 10$ Messwerte (3 P), gute Abdeckung des Messbereiches (1 P))	4
	Fehlerbetrachtung für Messwerte	1
	Auswerten der Messwerte (z.B. graphisch)	4
	Angeben eines sinnvollen Ergebnisses ($0,9 \cdot 10^5 \text{ Pa} \leq p_0 \leq 1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$)	2
	Fehlerabschätzung für Ergebnis und Vergleich mit Referenzwert	2
		40