53. Internationale PhysikOlympiade
Tokyo, Japan 2023

Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen
Tel.: 0431 / 880 - 5120
email: petersen@ipho.info

Dürken Quaas
Tel.: 0431 / 880 - 5387
email: quaas@ipho.info

Anschrift: IPN · Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
Olshausenstraße 62 · 24118 Kiel

web: **www.ipho.info**
instagram: @ipho_deutschland

Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 53. IPhO 2023

Nur für die Landesbeauftragten bestimmt!

Hinweise zur Bewertung für die Landesbeauftragten

Gemäß den Gepflogenheiten bei der Internationalen PhysikOlympiade sollte primär die Richtigkeit der Lösung bewertet werden und weniger die Sauberkeit der Ausarbeitung oder der sprachliche Ausdruck. Bei den Multiple-Choice Aufgaben sind alleine für die richtigen Antwortbuchstaben bereits jeweils 2 Punkte zu vergeben. Die in den Bewertungstabellen darüber hinaus angegebenen Punktzahlen beziehen sich jeweils auf den von uns ausgearbeiteten Lösungsweg. Bei anderen Lösungswegen muss die Bewertung sinngemäß abgeändert werden, wobei die Gesamtpunktzahl pro Aufgabenteil beizubehalten ist. Folgefehler werden in der Regel nicht bestraft. Die Verwendung eines falschen Zwischenergebnisses sollte, sofern sich dadurch keine starke Vereinfachung des Problems ergibt, also bei folgenden Fragen nicht zu Punktabzug führen. Dies bedeutet insbesondere, dass ein numerisches Ergebnis auch dann als korrekt gewertet werden sollte, wenn vorher eine falsche Formel abgeleitet, aber korrekt mit dieser Formel weitergerechnet wurde. Wenn bei einem Ergebnis jedoch die angegebene Einheit falsch ist, sollte dies zu Punktabzug führen.

Achten Sie bitte darauf, dass die Klausuren von den Teilnehmenden auf der Vorderseite unterschrieben sind!

Einen Bewertungsbogen zum Eintragen der Punktzahlen erhalten Sie von uns separat. Bitte geben Sie bei der Bewertung nicht nur die Gesamtpunktzahl pro Aufgabe an, sondern auch die Aufschlüsselung nach Teilleistungen gemäß der Bewertungstabelle. Tragen Sie bitte die Ergebnisse online ein und schicken Sie die korrigierten Arbeiten mit den Bewertungsbögen bis **spätestens zum 02. Dezember 2022** an die Wettbewerbsleitung der PhysikOlympiade. **Vielen Dank für Ihre Unterstützung!**

Multiple-Choice Aufgaben

Finde zu jeder der folgenden sieben Fragen den richtigen Lösungsbuchstaben und begründe physikalisch, warum dies die korrekte Lösung ist. Es ist jeweils nur eine Antwortmöglichkeit richtig. Nutze den Platz in der Box für Rechnungen sowie Begründungen und notiere deinen Antwortbuchstaben an der vorgesehenen Stelle am Ende jeder Box.

Aufgabe 1 Sinkender Körper (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Wenn ein fester Körper mit der Dichte $1{,}80\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ in zähem Öl der Dichte $0{,}90\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ mit konstanter Geschwindigkeit sinkt, so ...

A ... wirkt auf den Körper keine Gewichtskraft.

B ... ist die Masse des Körpers gleich der Masse der verdrängten Flüssigkeit.

C ... ist die Gewichtskraft des Körpers im Gleichgewicht mit der Reibungskraft.

D ... ist die Auftriebskraft auf den Körper gleich der Reibungskraft.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Auf den Körper wirken in der Flüssigkeit Gewichtskraft, Auftriebskraft und Reibungskraft. Beim Sinken mit konstanter Geschwindigkeit addieren sich diese Kräfte zu Null.

Antwort A ist falsch, da auch in der Flüssigkeit eine Gewichtskraft auf den Körper wirkt.

Antwort B ist falsch, da sich dann die nach unten gerichtete Gewichtskraft und die Auftriebskraft aufheben würden, so dass der Körper aufgrund der Reibung nicht sinken würde.

Antwort C ist falsch, da sich dann die nach unten gerichtete Gewichtskraft und die nach oben gerichtete Reibungskraft aufheben würden, so dass der Körper aufgrund der Auftriebskraft abbremsen und schließlich nach oben steigen würde.

Antwort D ist korrekt: Wenn die Dichte des Körpers doppelt so groß wie die Dichte der Flüssigkeit ist, entspricht die Auftriebskraft der Hälfte der Gewichtskraft. Um das für eine konstante Sinkgeschwindigkeit notwendige Kräftegleichgewicht herzustellen, muss die Reibungskraft dann die andere Hälfte der Gewichtskraft kompensieren und ebenso groß wie die Auftriebskraft sein.

Korrekte Antwort: *D*

Bewertung - Sinkender Körper (MC-Aufgabe)		Punkte
1	Verwenden der drei wirkenden Kräfte	1.0
	Erkennen des Kräftegleichgewichts bei konstanter Sinkgeschwindigkeit	1.0
	Korrektes Vergleichen der Kräfte in den Antwortmöglichkeiten	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 2 Induktion in Leiterschleifen (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Die vier in der Abbildung gezeigten Leiterschleifen (a bis d) besitzen jeweils Kantenlängen ℓ oder 2ℓ. Sie bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit v in eine scharf begrenzte Region mit einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte B, das in die Zeichenebene hinein orientiert ist.

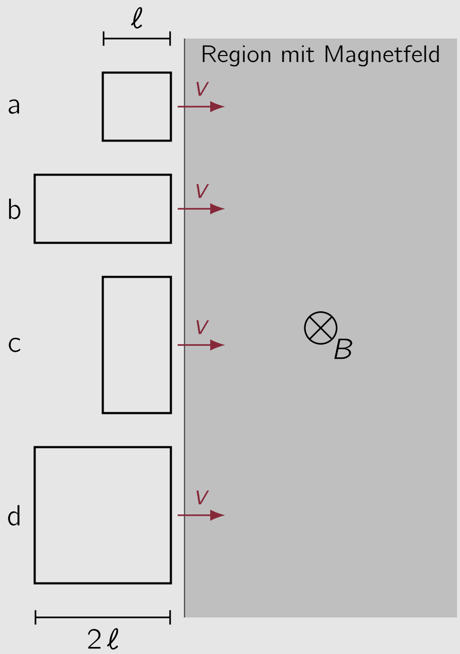
Wie verhalten sich die direkt bei Eintritt in die Region mit dem Magnetfeld in den Schleifen induzierten Spannungen U_a bis U_d zueinander?

A $|U_a| = |U_b| = |U_c| = |U_d|$

B $|U_a| < |U_b| < |U_c| < |U_d|$

C $|U_a| = |U_b| < |U_c| = |U_d|$

D $|U_a| < |U_b| = |U_c| < |U_d|$



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die induzierte Spannung ist proportional zur Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife. Da das Magnetfeld homogen ist, ist diese wiederum proportional zur Änderung der Fläche, die in der Region mit dem Magnetfeld ist. Direkt nach dem Eintreten in diese Region ist die induzierte Spannung daher proportional zur Höhe der Leiterschleife in der Zeichenebene und die Breite der Leiterschleife spielt keine Rolle. Daher sind die in den Schleifen a und b induzierten Spannungen gleich und betragsmäßig geringer als die in den Schleifen c und d induzierten Spannungen, die ebenfalls zueinander gleich sind.

Korrekte Antwort: *C*

Hinweis: Alternativ kann die Aufgabe auch durch Betrachtung der Lorentzkraft auf eine Ladung in der vorderen Leiterkante gelöst werden. Betrachte eine Ladung q, diesich mit der Leiterkante mit einer Geschwindigkeit v in die Region mit dem Magnetfeld hinein bewegt. Dort erfährt sie eine Lorentzkraft $F = q\,v\,B$ parallel zu der Leiterkante. Zwischen den beiden vorderen Ecken der Leiterschleife entsteht so eine Potentialdifferenz von $U = F\,\ell\,/\,q = v\,B\,\ell$ bzw. $U = F\,2\ell\,/\,q = 2\,v\,B\,\ell$, was zu der gleichen Antwortmöglichkeit führt.

Bewertung - Induktion in Leiterschleifen (MC-Aufgabe)		Punkte
2	Erkennen, dass induzierte Spannung proportional zur Flussänderung ist	1.0
	Erkennen, dass Flussänderung proportional zur Flächenänderung in Magnetfeldregion ist	1.0
	Erkennen, dass damit nur die Höhe der Schleife eine Rolle spielt	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 3 Widerstandserwärmung (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Bernd Schade & Stefan Petersen)

Zwei Widerstände gleicher Bauform werden parallel an eine Spannungsquelle mit einer Spannung von 2,6 V angeschlossen. Dabei fließt ein Gesamtstrom von 310 mA. Mit einer Infrarotkamera wird das nebenstehende Bild der Schaltung gemacht. Die Kamera kann nach einer Kalibrierung auch die Oberflächentemperaturen der beiden Widerstände ermitteln. Sie betragen 33 °C und 67 °C. Die Umgebungstemperatur ist dabei 21 °C.

Welche Werte besitzen die beiden Widerstände ungefähr?

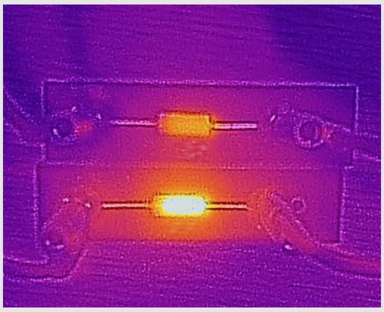


Abb. 1. *Infrarotaufnahme der Widerstände.*

A 1,7 Ω und 6,7 Ω   B 12 Ω und 30 Ω   C 10 Ω und 45 Ω   D 20 Ω und 80 Ω

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die an einem Widerstand mit Widerstandswert R umgesetzte elektrische Leistung P_{el} ergibt sich aus der über dem Widerstand abfallenden Spannung U und dem durch den Widerstand fließenden Strom I zu

$$P_{\text{el}} = U\,I = \frac{U^2}{R}\,. \tag{3.1}$$

Dabei wurde für die zweite Umformung das ohmsche Gesetz $R = U/I$ genutzt.

Die umgesetzte elektrische Leistung wird in Wärme umgewandelt, die der Widerstand an die Umgebung abgibt. Für nicht zu hohe Temperaturen ist die Wärmeabgabe an die Umgebung in guter Näherung proportional zur Temperaturdifferenz zur Umgebung[a]. Für die abgegebene Wärmeleistung P_{th} gilt also

$$P_{\text{th}} = \kappa\,(\vartheta - \vartheta_0) =: \kappa\,\Delta T\,, \tag{3.2}$$

wobei ϑ sowie ϑ_0 die Temperatur des Widerstandes bzw. der Umgebung angeben und κ eine Proportionalitätskonstante ist, die abhängig von der Geometrie des Widerstandes und dessen Ankopplung an die Umgebung ist. Da die untersuchten Widerstände eine gleiche Bauform besitzen, kann davon ausgegangen werden, dass die Proportionalitätskonstante für beide Widerstände identisch ist.

Durch Gleichsetzen von (3.1) und (3.2) ergibt sich

$$R\,\Delta T = \frac{U^2}{\kappa}\,. \tag{3.3}$$

Bezeichne mit R_1 und R_2 die gesuchten Widerstände und mit I_1 bzw. I_2 die Stromstärken der durch die Widerstände fließenden Ströme. Da die Widerstände parallel geschaltet sind, gilt für den Gesamtstrom I in der Schaltung

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\,. \tag{3.4}$$

Aus (3.3) ergibt sich $R_1\,\Delta T_1 = R_2\,\Delta T_2 = U^2/\kappa$, wobei ΔT_1 und ΔT_2 die Temperaturdifferenzen zur Umgebung der beiden Widerstände bezeichnen. Damit lässt sich (3.4) umformen zu

$$I = U\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{U}{R_1}\left(1+\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right) \qquad \text{und daraus} \qquad R_1 = \frac{U}{I}\left(1+\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right). \tag{3.5}$$

Analog erhält man einen Ausdruck für R_2 durch Vertauschen der beiden Temperaturdifferenzen. Mit den gegebenen Werten ergeben sich die Widerstandswerte zu

$$\boxed{R_1 = \frac{U}{I}\left(1+\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right) \approx 41\,\Omega} \qquad \text{und} \qquad \boxed{R_2 = \frac{U}{I}\left(1+\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right) \approx 11\,\Omega}. \tag{3.6}$$

Die Widerstandswerte entsprechen also am ehesten denen der Antwort C.

Korrekte Antwort: *C*

Bemerkung: Die Antwortoption A ergibt sich bei Annahme einer Reihenschaltung der beiden Widerstände. In diesem Fall gilt $R_1 = U/I\cdot(1+\Delta T_1/\Delta T_2)^{-1}$ und analog für R_2. In Antwortoption B sind die Widerstände so gewählt, dass sie etwa im Verhältnis der Temperaturen dimensioniert sind und der Gesamtwiderstand bei Parallelschaltung passend zu den gegebenen Werten von U und I ist. Auf die gleiche Antwortoption wird man ebenfalls geführt, wenn die Umgebungstemperatur nicht berücksichtigt und in (3.6) die Temperaturen in °C eingesetzt werden. In Antwortoption D ist die linke Seite von (3.3) für beide Widerstände etwa gleich, der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung passt aber nicht zu den gegebenen Werten.

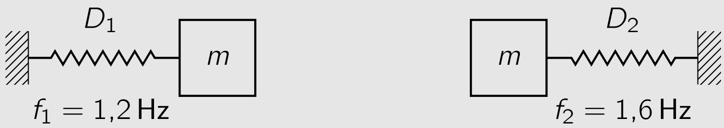
[a] Alternativ und ohne Näherung lässt sich auch das Stefan-Boltzmann-Gesetz anwenden, das dann an Stelle von (3.2) auf den Ausdruck $P_{\text{th}} = \kappa'\left(T^4 - T_0^4\right)$ führt. Statt der Temperaturdifferenzen sind dann in (3.6) die Differenzen der vierten Potenzen der Temperaturen (in Kelvin) zu verwenden und es ergeben sich $R_1 \approx 46\,\Omega$ sowie $R_2 \approx 10\,\Omega$. Die Antwort bleibt also die gleiche.

Bewertung - Widerstandserwärmung (MC-Aufgabe)		**Punkte**
3	Angeben eines Ausdrucks für die elektrische Leistung (3.1)	0.5
	Angeben eines Ausdrucks für die thermische Leistung (3.2) (oder mit Stefan-Boltzmann)	1.0
	Nutzen der Regeln für Ströme und Spannungen in Parallelschaltungen (3.4)	0.5
	Gleichsetzen der Leistungen und Angeben von Ausdrücken für Widerstände (3.6)	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

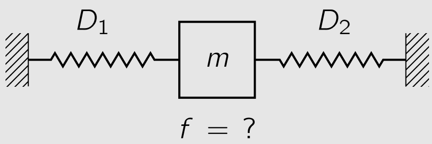
Aufgabe 4 Doppeltes Federpendel (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Thomas Hellerl)

In den beiden in der Abbildung gezeigten Federpendeln schwingt jeweils ein Körper der Masse m reibungsfrei. Die Federkonstanten D_1 und D_2 der beiden hookeschen Federn sind dabei jedoch unterschiedlich. Daher schwingen die Körper nach einer Auslenkung mit unterschiedlichen Frequenzen f_1 und f_2.



Wie groß ist die Schwingungsfrequenz (Eigenfrequenz) des unten gezeigten Systems, in dem die Federn gekoppelt sind?



A 1,4 Hz B 2,0 Hz C 2,4 Hz D 2,8 Hz

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

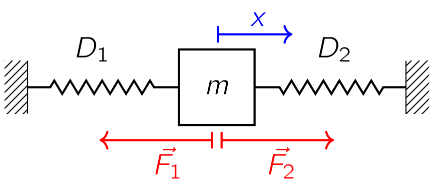
Die Eigenfrequenzen der oberen Oszillatoren sind gegeben durch

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D_i}{m}}\,. \tag{4.1}$$

Für die Federkonstanten D_i folgt demnach

$$D_i = 4\,\pi^2\, m\, f_i^2\,. \tag{4.2}$$

Die einzelnen Federkonstanten D_1 und D_2 des unteren Systems addieren sich zur neuen Federkonstante D aufgrund folgender Überlegung.



Im Gleichgewicht zieht jede Feder mit der Kraft F_0. Bei einer Auslenkung um x aus der Gleichgewichtslage üben die linke Feder den Kraftbetrag $F_1 = F_0 + D_1 x$ und die rechte Feder den Kraftbetrag $F_2 = F_0 - D_2 x$ auf m aus. Wir erhalten für die insgesamt auf die schwingende Masse m wirkende Kraft.

$$F(x) = -F_1 + F_2 = -(F_0 + D_1 x) + (F_0 - D_2 x) = -(D_1 + D_2)x \tag{4.3}$$

und damit ist für das System mit beiden Federn

$$D = D_1 + D_2 \tag{4.4}$$

Das neue System schwingt also mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D_1 + D_2}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{4\pi^2\, m\,(f_1^2 + f_2^2)}{m}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}\,. \tag{4.5}$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$\boxed{f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{1.2^2 + 1.6^2}\,\mathrm{Hz} \approx 2{,}0\,\mathrm{Hz}}\,. \tag{4.6}$$

Korrekte Antwort: *B*

Bewertung - Doppeltes Federpendel (MC-Aufgabe)		**Punkte**
4	Angabe des Zusammenhangs von Federkonstante, Frequenz und Masse	1.0
	Erkennen, dass sich die Federkonstanten addieren	1.0
	Bestimmen eines Ausdrucks für die neue Frequenz	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 5 Gezeitenheizung (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

(Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Tim Pokart)

Obwohl eine dicke Eisschicht einen Großteil des auf den Saturnmond Enceladus einfallenden Sonnenlichtes reflektiert, konnte die Raumsonde Cassini auf seiner Oberfläche mehrere hundert Kilometer hohe Wasserfontänen fotografieren. Der Mond bezieht die dafür notwendige Energie aus Gezeitenkräften die ihn bei der Umwandlung in Reibungsarbeit aufheizen.

Betrachte einen Himmelskörper mit Radius r, der um einen Planeten mit Masse M_{P} auf einer Bahn mit großer Halbachse a und Exzentrizität e kreist. Die Exzentrizität ist dabei für geschlossene Bahnen ein Wert mit $0 \leq e < 1$, der angibt, wie stark die Bahn von einer Kreisbahn abweicht.

Die Heizleistung, die der Körper erfährt, lässt sich ausdrücken durch

$$P \approx \frac{21}{100}\, r^5\, e^2\, G^{\alpha}\, M_{\mathrm{P}}^{\beta}\, a^{\gamma}.$$

Welche Werte haben die Exponenten α, β und γ?

A	$\alpha = -3/2,$	$\beta = 5/2$	und	$\gamma = -15/2.$
B	$\alpha = 3/2,$	$\beta = 5/2$	und	$\gamma = -15/2.$
C	$\alpha = 3/2,$	$\beta = -5/2$	und	$\gamma = 15/2.$
D	$\alpha = -3/2,$	$\beta = 5/2$	und	$\gamma = 15/2.$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Das Ergebnis lässt sich aus einer Dimensionsanalyse ableiten. Bezeichne mit M, L und T die Dimensionen Masse, Länge und Zeit. Dann besitzen die Größen in der Formel die folgenden Dimensionen:

$$[P] = ML^2T^{-3} \qquad [G] = L^3T^{-2}M^{-1} \qquad [M_{\mathrm{P}}] = M \qquad [r] = L \qquad [a] = L\,. \tag{5.1}$$

Entsprechend gilt für die Dimensionen in der gegebenen Formel

$$M\,L^2\,T^{-3} = L^5\,L^{3\alpha}\,T^{-2\alpha}\,M^{-\alpha}\,M^{\beta}\,L^{\gamma} = M^{\beta-\alpha}\,L^{5+3\alpha+\gamma}\,T^{-2\alpha}\,.$$

Für die Exponenten ergibt sich damit das Gleichungssystem

$$1 = \beta - \alpha \qquad 2 = 5 + 3\alpha + \gamma \qquad -3 = -2\alpha\,. \tag{5.2}$$

Dieses wird gelöst für

$$\boxed{\alpha = 3/2} \qquad \boxed{\beta = 5/2} \qquad \boxed{\gamma = -15/2}\,. \tag{5.3}$$

Korrekte Antwort: *B*

Bemerkung: Für eine alternative Lösung kann man das erwartete physikalische Verhalten der Formel für die Leistung nutzen. Die Heizleistung sollte mit größer werdender Planetenmasse bei ansonsten konstanten Parametern größer werden. Damit muss $\beta > 0$ sein. Umgekehrt sollte die Heizleistung bei größer werdender Halbachse kleiner werden, was $\gamma < 0$ bedingt. Die einzige Antwortoption, die diese beiden Bedingungen erfüllt ist B.

Bewertung - Gezeitenheizung (MC-Aufgabe)		**Punkte**
5	Angeben der relevanten Einheiten/Dimensionen	1.0
	Nutzen einer Dimensionsanalyse	1.0
	Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems (5.2)	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 6 Koaxialkabel (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

(Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Arne Wolf)

Ein Koaxialkabel besteht, wie nebenstehend im linken Querschnitt abgebildet, aus einem langen schmalen Zylinder mit spezifischem Widerstand ρ_1 ummantelt von einem Hohlzylinder mit spezifischem Widerstand $\rho_2 > \rho_1$, Durch das Kabel fließt ein Strom der Stärke I.

Ein zweites, rechts abgebildetes Koaxialkabel sieht von außen aus wie das erste, besteht im Inneren aber nur aus einem Material. Der spezifische Widerstand dieses Materials ist ρ und die Stromstärke in dem zweiten Kabel beträgt ebenfalls I.

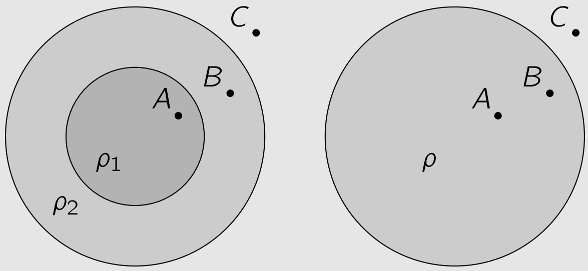


Abb. 2. *Querschnitt des ersten (links) und zweiten (rechts) Koaxialkabels.*

An wie vielen der gekennzeichneten Punkte A, B und C unterscheiden sich die durch das jeweilige Kabel hervorgerufenen Magnetfelder?

A 0 B 1 C 2 D 3

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Da die Gesamtstromstärke in beiden Kabeln gleich ist und der spezifische Widerstand des Kerns im ersten Kabel kleiner ist als in dessen Mantel, fließt im ersten Kabel im Kern mehr Strom als im zweiten. Nach dem Ampèreschen Gesetz ist das von einem geraden Draht erzeugte Magnetfeld in Abstand r zur Drahtachse proportional zum Strom, der in Abstand kleiner oder gleich r zur Drahtachse fließt.

Da dieser Strom für die Punkte A und B im ersten Kabel erhöht ist und an Punkt C für beide Kabel gleich, unterscheidet sich das Magnetfeld an den Punkten A und B. Damit ist C die richtige Antwort.

Korrekte Antwort: *C*

Bewertung - Koaxialkabel (MC-Aufgabe)		Punkte
6	Erkennen, wo mehr Strom fließt	1.5
	Verwenden des Ampèreschen Gesetzes	1.5
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 7 Glasquader (5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Thomas Hellerl & Titus Bornträger)

Ein in der Zeichenebene verlaufender Laserstrahl trifft von links unter dem Einfallswinkel $\alpha = 30°$ auf einen Glasquader (Brechungsindex $n = 1,5$) mit den Seitenlängen a und $4a$. Wie in der nicht maßstabsgetreuen Skizze in Abbildung 3 angedeutet, trifft er im Glasquader schließlich genau auf die rechte untere Ecke.

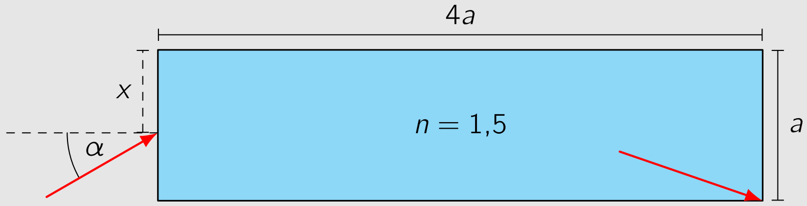


Abb. 3. *Nicht maßstabsgetreue Skizze des Laserstrahls im Glasquader in der Seitenansicht.*

Wie groß ist der Abstand x der Eintrittsstelle von der oberen Begrenzungsfläche des Quaders?

A $a \cdot (\sqrt{2} - 1)$ B $a \cdot (2 - \sqrt{3})$ C $a \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ D $a \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

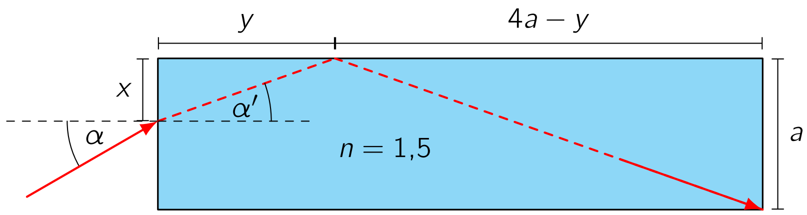


Abb. 4. *Vollständige Skizze des Strahlenverlaufs im Glasquader in der Seitenansicht*

Nach dem Brechungsgesetz gilt:

$$\sin\alpha = n \cdot \sin\alpha' . \tag{7.1}$$

Der im Glas verlaufende Strahl wird an der oberen Seite im Inneren total reflektiert. Im linken und im rechten Dreieck findet man aufgrund der Ähnlichkeit

$$\frac{a}{4a - y} = \frac{x}{y} = \tan\alpha' . \tag{7.2}$$

Der Wert von $\tan\alpha'$ lässt sich direkt bestimmen mittels

$$\tan\alpha' = \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sin\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{1,5} \cdot \sin 30°}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 30°}{1,5^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} . \tag{7.3}$$

Dabei wurde $\sin\alpha = \sin 30° = 0,5$ genutzt. Es folgt unmittelbar aus (7.2):

$$y = 2\sqrt{2}\, x . \tag{7.4}$$

Einsetzen in Gleichung (7.2) und auflösen nach x ergibt:

$$\frac{a}{4a-2\sqrt{2}x}=\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \text{bzw.} \qquad 2\sqrt{2}a=4a-2\sqrt{2}x \tag{7.5}$$

und damit

$$\boxed{x=\frac{2}{\sqrt{2}}a-a=a\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}. \tag{7.6}$$

Korrekte Antwort: *A*

Bewertung - Glasquader		**Punkte**
7	Nutzen der Ähnlichkeit der Dreiecke (7.2)	1.0
	Verwenden des korrekten Wertes für $\tan\alpha'$ mit (7.3)	1.0
	Herleiten des Ergebnisses für x aus (7.2)	1.0
	Angabe der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Langaufgaben

Bearbeite die folgenden drei Aufgaben ebenfalls in den dafür vorgesehenen Boxen. Anders als bei den Multiple-Choice Aufgaben sind keine Lösungsmöglichkeiten gegeben. Beschreibe deinen Lösungsweg so, dass er gut nachvollziehbar aber nicht unnötig lang ist. Wenn du also zum Beispiel den Energieerhaltungssatz verwendest, schreibe dies kurz hin.

Aufgabe 8 Laserentfernungmesser (15 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Bernd Schade & Jörg Steiper)

Für die Vermessung von Räumen kommen oft Laserentfernungsmesser zum Einsatz. Im Baumarkt erhältliche Laserentfernungsmesser können in der Regel Entfernungen im Bereich von wenigen Zentimetern bis zu etwa 50 m mit einer Genauigkeit von einigen Millimetern bestimmen. Zur Entfernungsmessung sendet das Gerät einen Laserstrahl aus und empfängt den von einem Objekt reflektierten Strahl.

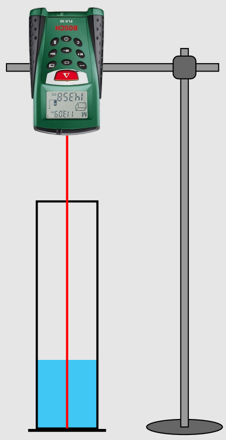
8.a) Berechne die Laufzeit von Laserlicht bei einem Messabstand von 50,0 cm. Bestimme, wie genau diese Laufzeitmessung erfolgen müsste, um eine Messgenauigkeit von ± 2 mm zu erreichen. *(4.0 Pkt.)*

Eine solche hohe Zeitauflösung wird von üblichen Laserentfernungsmessern nicht erreicht. Stattdessen wird die Entfernung über die Phasenverschiebung des ausgesendeten und empfangenen Signals bestimmt. Dies ist für die folgenden Aufgaben jedoch nicht relevant.

Die Genauigkeit der Messung wird allerdings auch davon beeinflusst, was sich auf dem Lichtweg befindet.

8.b) Du möchtest die Länge eines dünnwandigen, mit Wasser gefüllten Aquariums ausmessen. Erläutere qualitativ, warum eine Messung durch das Aquarium hindurch andere Werte ergibt als eine Messung mit einem Lineal. *(2.0 Pkt.)*

Dieser Effekt kann genutzt werden, um mit einem Laserentfernungsmesser den Brechungsindex eines transparenten Materials zu bestimmen.



In dem nebenstehend skizzierten Experiment wird mit einem fest montierten Laserentfernungsmesser der Abstand zum Boden eines teilweise mit einer Flüssigkeit gefüllten Glaszylinders gemessen. Die vom Laserentfernungsmesser angezeigten Messwerte des Abstandes für verschiedene Flüssigkeitsvolumina sind in der Tabelle unten dargestellt. Der Innendurchmesser des Glaszylinders beträgt 8,00 cm.

8.c) Bestimme mit Hilfe der Messreihe den Brechungsindex n der Flüssigkeit. Erstelle dazu einen geeigneten Graphen. *(9.0 Pkt.)*

Messwerte des vom Laserentfernungsmesser gemessenen Abstandes ℓ als Funktion des in dem Zylinder befindlichen Flüssigkeitsvolumens V

V / L	ℓ / m	V / L	ℓ / m
0,00	0,602	0,95	0,668
0,07	0,607	1,22	0,687
0,15	0,611	1,42	0,697
0,27	0,619	1,56	0,705
0,37	0,622	1,64	0,709
0,51	0,636	1,76	0,718
0,67	0,647	1,85	0,727
0,77	0,657	1,93	0,733

Lösung

8.a) Rechnungen und Erläuterungen

Da das Licht den zu vermessenden Abstand zwei Mal zurücklegt, beträgt die vom Licht durchlaufende Distanz $d = 100{,}0\,\mathrm{cm}$. Die Lichtgeschwindigkeit in Luft entspricht mit $c \approx 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ungefähr dem Wert in Vakuum. Daher benötigt das Licht zum Zurücklegen der Distanz d die Zeit

$$\boxed{t = \frac{d}{c} = \frac{1{,}00\,\mathrm{m}}{3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \approx 3{,}33 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}}\,. \tag{8.1}$$

Das Licht benötigt damit nur einige Nanosekunden zum Zurücklegen der Strecke.

Wenn die Messgenauigkeit der Entfernungsmessung $2\,\mathrm{mm}$ betragen soll, muss der Laserentfernungsmesser eine Distanz von $\Delta d = 4\,\mathrm{mm}$ zeitlich differenzieren können. Er muss daher eine Zeitdifferenz Δt mit

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta d}{c} = \frac{0{,}004\,\mathrm{m}}{3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \approx 1 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}}\,, \tag{8.2}$$

also im Bereich von zehn Pikosekunden auflösen können.

8.b) Rechnungen und Erläuterungen

Für die Ausbreitung des Laserstrahls muss das durchlaufende Medium mit betrachtet werden. Da der Brechungsindex von Wasser ($n_{\mathrm{Wasser}} \approx 1{,}3$) ein anderer ist als der von Luft ($n_{\mathrm{Luft}} \approx 1{,}0$), unterscheidet sich auch die Lichtgeschwindigkeit in den beiden Medien. Dadurch benötigt das Licht für die gleiche Strecke in den Medien unterschiedliche Laufzeiten und der Laserentfernungsmesser misst unterschiedliche Abstände.

8.c) Rechnungen und Erläuterungen

Der vermessene Abstand setzt sich zusammen aus einer Strecke der Länge ℓ_{Luft} in Luft und einer in der Flüssigkeit zurückgelegten Strecke der Länge ℓ_{Fl}, die sich aus dem Flüssigkeitsvolumen V und dem Innenradius $r = 4{,}00\,\mathrm{cm}$ des Zylinders berechnen lässt zu

$$\ell_{\mathrm{Fl}} = \frac{V}{\pi\, r^2}\,. \tag{8.3}$$

In der Flüssigkeit breitet sich das Licht mit der Geschwindigkeit c/n aus, wobei n den Brechungsindex der Flüssigkeit angibt. Dadurch benötigt das Licht für den Durchgang durch die Flüssigkeit n mal so lange wie an Luft. Entsprechend erhöht sich die von dem Laserentfernungsmesser für die Teilstrecke in der Flüssigkeit gemessene Länge um genau diesen Faktor. Die insgesamt von dem Laserentfernungsmesser gemessene Strecke ℓ ist damit gegeben durch

$$\boxed{\ell = \ell_{\text{Luft}} + n\,\ell_{\text{Fl}} = \ell_{\text{ges}} + (n-1)\,\ell_{\text{Fl}} = \ell_{\text{ges}} + \frac{n-1}{\pi\, r^2} V}\,. \tag{8.4}$$

Dabei bezeichnet $\ell_{\text{ges}} = \ell_{\text{Luft}} + \ell_{\text{Fl}}$ den konstanten Abstand zwischen Laserentfernungsmesser und Boden des Glaszylinders.

Gleichung (8.4) beschreibt einen (affin) linearen Zusammenhang zwischen dem Flüssigkeitsvolumen V und dem gemessenen Abstand ℓ. Trägt man daher in einem Graphen ℓ als Funktion von V auf, muss sich als Ausgleichskurve eine Gerade der Steigung $b = \frac{n-1}{\pi\, r^2}$ ergeben. Aus der Steigung lässt sich dann der Brechungsindex der Flüssigkeit mittels

$$\boxed{n = 1 + \pi\, r^2\, b} \tag{8.5}$$

bestimmen. In Abbildung 5 sind die in der Aufgabe gegebenen Daten entsprechend dargestellt.

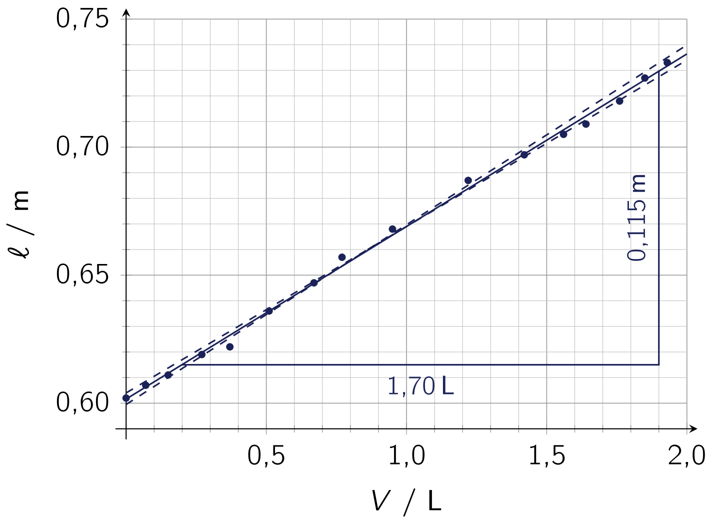


Abb. 5. *Graph des vom Laserentfernungsmesser gemessenen Abstandes ℓ in Abhängigkeit von dem Flüssigkeitsvolumen V im Zylinder mit Ausgleichsgerade.*

Aus der Ausgleichsgeraden in dem Graphen ergibt sich

$$b = \frac{0{,}115\,\text{m}}{1{,}70\,\text{L}} = 67{,}6\,\text{m}^{-2} \qquad \text{mit Unsicherheit} \qquad \Delta b = 2{,}6\,\text{m}^{-2}\,. \tag{8.6}$$

Daraus ergibt sich für den Brechungsindex der Flüssigkeit

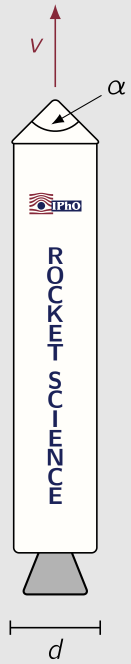
$$\boxed{n = 1 + \pi\, r^2\, b = 1{,}34 \pm 0{,}02}\,. \tag{8.7}$$

Bei der Flüssigkeit könnte es sich also um Wasser handeln.

Bewertung - Laserentfernungmesser		**Punkte**
8.a)	Verwenden von Zeit ist gleich Strecke durch Geschwindigkeit	0.5
	Berücksichtigen des doppelten Abstandes für Lichtweg	0.5
	Berechnen der Zeit (8.1)	1.0
	Erkennen des Zusammenhanges zwischen Genauigkeit und Zeitdifferenz	0.5
	Berücksichtigen des doppelten Abstandes für Lichtweg	0.5
	Berechnen der Zeitdifferenz (8.2)	1.0
8.b)	Nennen der unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten	1.0
	Angeben, dass unterschiedliche Laufzeiten zu anderen Messergebnissen führen	1.0
8.c)	Zerlegen des Abstandes in einen Teil an Luft und einen in der Flüssigkeit	1.0
	Ausdrücken der Strecke in der Flüssigkeit durch Volumen (8.3)	1.0
	Erkennen, dass optische Weglänge in Flüssigkeit um Faktor n länger	1.0
	Aufstellen eines linearen Zusammenhanges (8.4)	1.0
	Erstellen eines geeigneten Graphen aus Messwerten	2.0
	Auswerten der Steigung	1.0
	Ergebnis für Brechungsindex mit $1{,}32 \leq n \leq 1{,}36$	2.0
		15.0

Aufgabe 9 Raketenstarts und Satelliten (20 Pkt.)

Die Zahl der Raketenstarts hat in den letzten Jahren stark zugenommen - 2021 gab es mehr als 140 Starts, die eine Erdumlaufbahn erreichen wollten. Während der Startphase sind die Raketen und deren Nutzlasten enormen Belastungen ausgesetzt. Dabei spielt die aerodynamische Belastung durch Reibung in der Atmosphäre eine wesentliche Rolle.



Betrachte als einfaches Modell eine Rakete mit einer kegelförmigen Spitze, die einen Durchmesser d und einen Öffnungswinkel von α an der Kegelspitze besitzt. Die Rakete fliegt mit einer Geschwindigkeit v durch die Atmosphäre, die in der momentanen Höhe eine Dichte von ρ_{atm} besitzt. Du kannst annehmen, dass die Bewegung der Luftmoleküle in der Atmosphäre verglichen mit der Raketengeschwindigkeit vernachlässigbar ist. Durch vereinfachend als elastisch betrachtete Stöße der Raketenspitze mit den Luftmolekülen erfährt die Rakete eine Reibungskraft.

9.a) Leite einen Ausdruck für die auf die Rakete wirkende Reibungskraft in Abhängigkeit von den Parametern d, α, v und ρ_{atm} her. Bestimme die Größe der Reibungskraft für die Werte $d = 3{,}7\,\text{m}$, $\alpha = 90°$, $v = 2{,}0\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$ und $\rho_{\text{atm}} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$. *(4.0 Pkt.)*

Die auf eine Rakete wirkende Reibungskraft ändert sich während des Raketenfluges. Die folgenden Abbildungen zeigen die Geschwindigkeit einer Rakete nach dem Start in Abhängigkeit von der Flughöhe (links) sowie den Atmosphärendruck in Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden (rechts). Es wird vereinfachend angenommen, dass die Temperatur der Atmosphäre konstant ist.

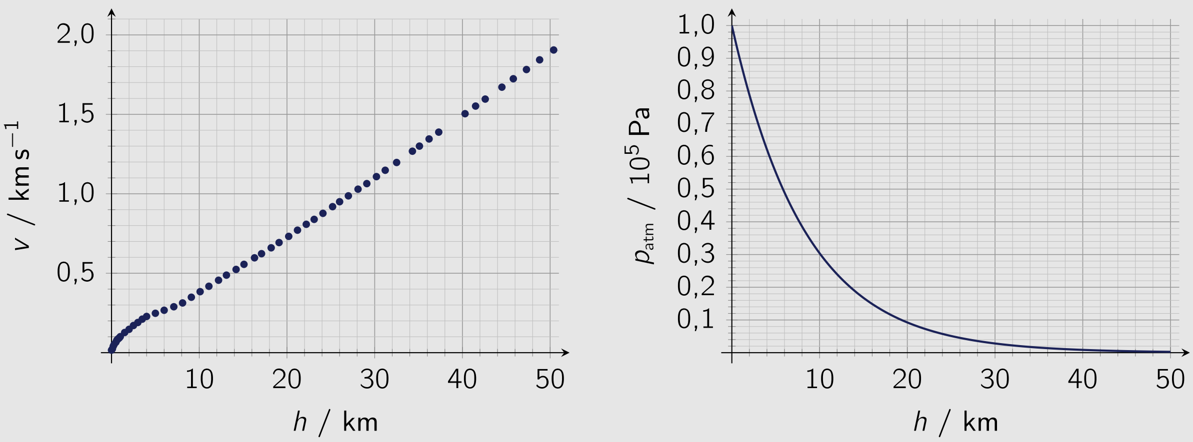


Abb. 6. *Geschwindigkeit v der Rakete (links) sowie Luftdruck p_{atm} der Atmosphäre (rechts) in Abhängigkeit von der Höhe h über dem Erdboden.*

9.b) Schätze mithilfe der Daten aus den Graphen die Höhe über dem Erdboden ab, bei der die Reibungskraft auf die Rakete maximal ist. *(6.0 Pkt.)*

Dieser bei einem Start kritische Punkt wird Max Q genannt und bezeichnet den Ort und Zeitpunkt größter aerodynamischer Belastung der Rakete.

Um Satelliten in eine Erdumlaufbahn zu bringen, muss die Rakete weiter beschleunigen. Bezeichne mit $m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ die Masse der Erde und mit $R_E = 6{,}37 \cdot 10^{6}\,\text{m}$ den Erdradius.

9.c) Bestimme die Geschwindigkeit, auf die die Rakete vor Ausschalten der Triebwerke beschleunigen muss, um in einer erdnahen Umlaufbahn außerhalb der Atmosphäre die Erde umkreisen zu können, ohne auf die Erde zu stürzen. Gib auch die Umlaufzeit auf der Bahn an. *(3.0 Pkt.)*

9.d) Bestimme ebenfalls die Geschwindigkeit, auf die die Rakete vor Ausschalten der Triebwerke mindestens beschleunigen muss, um dem Einfluss der Erde vollständig zu entkommen. Gib das Verhältnis dieser Geschwindigkeit zu der im vorigen Aufgabenteil bestimmten an. *(3.0 Pkt.)*

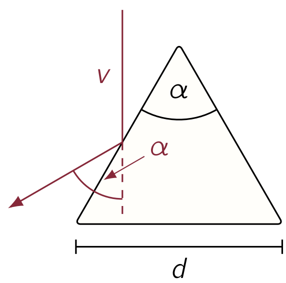
Nimm nun an, dass ein Satellit die Sonne auf einer Bahn umkreist, deren Radius dem mittleren Erdbahnradius um die Sonne von etwa $1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ entspricht. Der Satellit sei weit weg von der Erde und allen anderen Himmelskörpern. Die Masse der Sonne beträgt etwa $m_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ und der Radius der Sonne kann als sehr klein im Vergleich zum Erdbahnradius angenommen werden. Plötzlich stoppt der Satellit relativ zur Sonne vollständig ab.

9.e) Schätze ab, wie lange es dauert, bis der Satellit in die Sonne stürzt. Je nach Lösungsansatz können die Keplerschen Gesetze dafür hilfreich sein. *(4.0 Pkt.)*

Lösung

9.a) Rechnungen und Erläuterungen

Im System der Rakete treffen die Luftmoleküle frontal mit der Geschwindigkeit v auf die Spitze der Rakete. Bei dem als elastisch angenommenen Stoß mit der Raketenspitze werden sie, wie nebenstehend skizziert, um einen Winkel α gegenüber ihrer ursprünglichen Bewegungsrichtung abgelenkt, behalten aber ihre Geschwindigkeit betragsmäßig bei. Der dabei durch ein Luftmolekül der Masse $m_{\text{Molekül}}$ auf die Rakete in Richtung der ursprünglichen Bewegungsrichtung des Moleküls übertragene Impuls $\Delta p_{\text{Molekül}}$ beträgt



$$\Delta p_{\text{Molekül}} = m_{\text{Molekül}}\, v\,(1-\cos\alpha)\ . \tag{9.1}$$

Während einer kleinen Zeitspanne Δt treffen

$$\Delta n = A\, v\, \Delta t\, \frac{\rho_{\text{atm}}}{m_{\text{Molekül}}} = \frac{\pi\, d^2\, v\, \rho_{\text{atm}}}{4\, m_{\text{Molekül}}}\, \Delta t \tag{9.2}$$

Luftmoleküle auf die Rakete. Dabei bezeichnet $A = \pi\, d^2/4$ die Querschnittsfläche der Rakete. Damit ist der pro Zeit insgesamt durch die Luftmoleküle auf die Rakete übertragene Impuls

$$\boxed{F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta n\, \Delta p_{\text{Molekül}}}{\Delta t} = \frac{\pi}{4}\, d^2\, v^2\, \rho_{\text{atm}}\,(1-\cos\alpha)}\ . \tag{9.3}$$

Die Impulsänderung pro Zeit entspricht nach dem 2. Newtonschen Gesetz dabei genau der gesuchten Reibungskraft F auf die Rakete. Mit den gegebenen Werten $d = 3{,}7\,\mathrm{m}$, $\alpha = 90°$, $v = 2{,}0\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ und $\rho_{\text{atm}} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ergibt sich der Wert der Reibungskraft zu

$$\boxed{F \approx 4{,}3 \cdot 10^4\,\mathrm{N}}\ . \tag{9.4}$$

9.b)

Rechnungen und Erläuterungen

Nach (9.3) ist die Reibungskraft proportional zum Quadrat der Raketengeschwindigkeit und zur Dichte der Luft. Wenn die Temperatur der Atmosphäre konstant ist, ist die Dichte der Luft nach der Zustandsgleichung idealer Gase proportional zum Druck der Luft. Damit ist die Reibungskraft auf die Rakete proportional zum Produkt $v^2 \cdot p_{\text{atm}}$. Alle anderen Abhängigkeiten in (9.3) sind durch die Geometrie der Rakete festgelegt und ändern sich während des Fluges nicht.

Um zu bestimmen, wann die Reibungskraft auf die Rakete maximal wird, ist es also ausreichend das Maximum von $v^2 \cdot p_{\text{atm}}$ als Funktion der Höhe h zu finden. Mit Hilfe der Daten aus dem Graphen kann dies z. B. graphisch erfolgen, wie nebenstehend gezeigt.

Aus dem Graphen ergibt sich die Höhe, bei der die maximale Reibungskraft auf die Rakete wirkt, zu etwa

$$\boxed{h_{\text{Max Q}} \approx (15 \pm 1)\,\text{km}}\,. \tag{9.5}$$

Hinweis: Für die Abschätzung in der Klausur ist es ausreichend, die Daten punktweise auszuwerten und daraus die Höhe näherungsweise zu bestimmen.

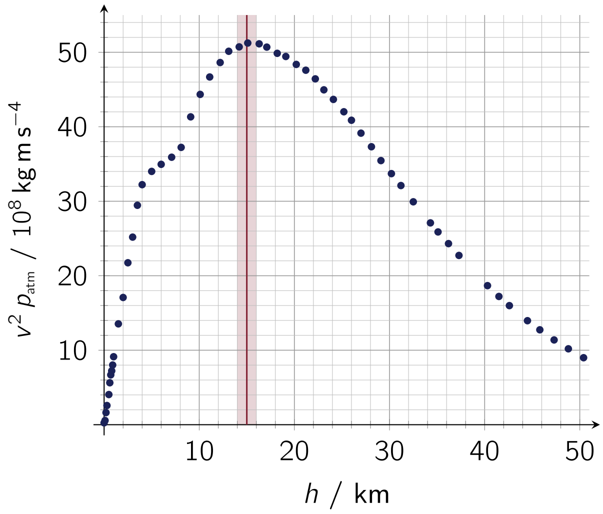


Abb. 7. *Produkt $v^2 \cdot p_{atm}$ beim Raketenstart in Abhängigkeit von der Höhe h über dem Erdboden.*

Alternativ kann die Höhe auch durch folgende Überlegung abgeschätzt werden: Die Geschwindigkeit v ist mit Ausnahme der ersten etwa 7 km in guter Näherung proportional zur Höhe h. Damit ist die Reibungskraft näherungsweise proportional zu $h^2\,\mathrm{e}^{-h/h_{\text{scale}}}$ mit einer aus dem Druckgraphen bestimmbaren Skalenhöhe h_{scale} von 8,4 km. Durch Nullsetzen der Ableitung dieser Funktion lässt sich die Höhe für die maximale Belastung durch Reibungskraft zur doppelten Skalenhöhe, also auf etwa 16,8 km, abschätzen.

9.c)

Rechnungen und Erläuterungen

Um außerhalb der Atmosphäre und damit nahezu reibungsfrei die Erde mit der Geschwindigkeit v zu umkreisen, muss die auf die Rakete wirkende Zentripetalkraft durch die Gravitationskraft aufgebracht werden. Wenn m die Masse der Rakete und R den Radius der Kreisbahn bezeichnen, muss daher gelten:

$$F_{\text{Zentripetal}} = \frac{m\,v^2}{R} = G\,\frac{m\,m_{\text{E}}}{R^2} = F_{\text{Gravitation}}\,. \tag{9.6}$$

Dabei sind $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}$ die Gravitationskonstante und $m_{\text{E}} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ die Masse der Erde.

Die Erdatmosphäre ist verglichen mit dem Durchmesser der Erde sehr dünn (vgl. dazu auch den Graphen für den Atmosphärendrucks in der Aufgabenstellung). Daher kann für eine erdnahe Umlaufbahn der Bahnradius etwa zu $R_{\text{E}} = 6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}$ angenommen werden. Durch

Umstellen von (9.6) lässt sich damit die für die Kreisbahn notwendige Geschwindigkeit v_1 bestimmen zu

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{G\,m_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}}} = 7{,}91\,\mathrm{km\,s^{-1}}}\,. \tag{9.7}$$

Diese Geschwindigkeit wird auch als 1. kosmische Geschwindigkeit bezeichnet. Für etwas größere angenommene Radien wird der Wert etwas kleiner. Die dazugehörige Umlaufzeit beträgt

$$\boxed{T_1 = \frac{2\,\pi\,R_\mathrm{E}}{v_1} = 2\,\pi\,R_\mathrm{E}\sqrt{\frac{R_\mathrm{E}}{G\,m_\mathrm{E}}} = 5{,}06\cdot 10^3\,\mathrm{s} \approx 84{,}3\,\mathrm{min}}\,. \tag{9.8}$$

9.d) Rechnungen und Erläuterungen

Um dem Einfluss der Erde und damit ihrem Gravitationsfeld zu entkommen, muss die Geschwindigkeit der Rakete in großer Entfernung von der Erde mindestens Null sein. Ansonsten würde die Rakete wieder auf die Erde stürzen.

Da die Summe aus kinetischer und potentieller Energie der Rakete bei der Bewegung außerhalb der Atmosphäre erhalten bleibt und die potentielle Energie weit weg von der Erde gegen Null geht, muss für das Fliehen von der Erde damit die kinetische Energie der Rakete nahe an der Erde gleich der potentiellen Energie im Gravitationsfeld der Erde sein. Es muss mit den Bezeichnungen aus dem vorigen Aufgabenteil also gelten:

$$0 = E_\mathrm{kin}(R_\mathrm{E}) + E_\mathrm{pot}(R_\mathrm{E}) = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - G\,\frac{m\,m_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}}\,. \tag{9.9}$$

Umgestellt nach der Geschwindigkeit ergibt sich die so genannte 2. kosmische Geschwindigkeit zu

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2\,G\,m_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}}} = \sqrt{2}\,v_1 = 11{,}1\,\mathrm{km\,s^{-1}}}\,. \tag{9.10}$$

Die Geschwindigkeit ist also um eine Faktor $\sqrt{2}$ größer als die zum Erreichen einer Kreisbahn notwendige.

9.e) Rechnungen und Erläuterungen

Lösungsvariante 1 - Nach dem 3. Keplerschen Gesetz ist der Quotient aus dem Quadrat der Umlaufdauer und der dritten Potenz der großen Halbachse für alle Körper, die die Sonne auf einer elliptischen Bahn umlaufen, konstant. Es gilt also

$$\frac{T^2}{a^3} = \mathrm{const.} = \frac{T_\mathrm{E}^2}{r_\mathrm{E}^3}\,, \tag{9.11}$$

wobei $T_\mathrm{E} = 1{,}0\,\mathrm{a}$ die Umlaufdauer der Erde um die Sonne und $r_\mathrm{E} = 1{,}5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ den Abstand der Erde zur Sonne auf ihrer kreisförmig angenommenen Umlaufbahn angeben. Der Satellit stürzt nach dem Abbremsen radial in die Sonne. Seine Bahn kann als eine Ellipse mit vernachlässigbar kleiner Halbachse aufgefasst werden. Für diese fällt der Brennpunkt, also das Zentrum der Sonne, mit dem sonnennähsten Punkt auf der Bahn zusammen. Daher beträgt die große Halbachse a_Satellit der Bahn gerade die Hälfte des Abstandes Erde-Sonne.

Mit (9.11) ergibt sich daraus für die Zeit t, bis der Satellit in die Sonne stürzt

$$\boxed{t = \frac{T_{\text{Satellit}}}{2} = \frac{T_{\text{E}}}{2}\left(\frac{a_{\text{Satellit}}}{r_{\text{E}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{T_{\text{E}}}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}177\,\text{a} \approx 65\,\text{Tage}}\,. \tag{9.12}$$

Lösungsvarianten 2 & 3 - Ausgehend von dem Energieerhaltungssatz[a] lässt sich für jeden Abstand r des Satelliten von der Sonne während des Falls seine Geschwindigkeit v bestimmen. Es gilt in zu (9.9) analoger Weise

$$\frac{1}{2}\,m_{\text{Satellit}}\,v^2 - G\,\frac{m_{\text{Satellit}}\,m_{\text{S}}}{r} = -G\,\frac{m_{\text{Satellit}}\,m_{\text{S}}}{r_{\text{E}}}\,. \tag{9.13}$$

Dabei bezeichnet m_{Satellit} die Masse des Satelliten und m_{S} die der Sonne. Für die Fallgeschwindigkeit ergibt sich daraus

$$v = -\dot{r} = \sqrt{\frac{2\,G\,m_{\text{S}}}{r_{\text{E}}}}\,\sqrt{\frac{r_{\text{E}} - r}{r}}\,. \tag{9.14}$$

Diese Differentialgleichung kann integriert werden, was am Ende auch auf das Ergebnis (9.12) führt[b]

Alternativ kann die Fallzeit mit Hilfe von (9.14) auch numerisch abgeschätzt werden. Hierzu wird für bestimmte Abstände die Fallgeschwindigkeit berechnet und diese als mittlere Geschwindigkeit für einen Abschnitt des Falls verwendet. Bei einer Unterteilung des anfänglichen Abstandes des Satelliten von der Sonne in zehn gleich große Teilstücke ergibt sich daraus z. B. eine Abschätzung der Fallzeit zu etwa 57 Tagen.

Hinweis: Dieser Teil der Aufgabe ist als Aufgabe auch zu finden in dem Buch: Geckeler, C. & Lind, G. (2002). *Physik zum Nachdenken: 100 Olympiade-Aufgaben mit Lösungen* (2. Aufl.). Aulis-Verlag, Köln.

---

[a] Alternativ lässt sich auch von der Kraftgleichung im Gravitationsfeld der Sonne ausgehen. Dann muss die Bewegungsgleichung aber bereits einmal integriert werden, um auf den Energiesatz zu kommen.

[b] Da die Integration nicht trivial ist, ist es eher unwahrscheinlich, dass dieser Lösungsweg in der Klausur vollständig durchgeführt wird. Der Vollständigkeit halber: Aus (9.14) folgt durch Trennung der Variablen

$$-\sqrt{\frac{r}{r_{\text{E}} - r}}\,\mathrm{d}r = \sqrt{\frac{2\,G\,m_{\text{S}}}{r_{\text{E}}}}\,\mathrm{d}t \quad \text{bzw. integriert} \quad -\int_{r_{\text{E}}}^{0}\mathrm{d}r\,\sqrt{\frac{r}{r_{\text{E}} - r}} = \sqrt{\frac{2\,G\,m_{\text{S}}}{r_{\text{E}}}}\,t\,.$$

Das bestimmte Integral auf der linken Seite lässt sich durch Substitution umformen. Es ist

$$\int_0^{r_{\text{E}}}\mathrm{d}r\,\sqrt{\frac{r}{r_{\text{E}} - r}} \overset{x:=r_{\text{E}}-r}{=} \int_0^{r_{\text{E}}}\mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{r_{\text{E}}}{x} - 1} \overset{y:=\sqrt{\frac{r_{\text{E}}}{x}-1}}{=} \int_0^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{2\,r_{\text{E}}\,y}{(1+y^2)^2}\,y\,.$$

Das so entstandene Integral ist durch partielle Integration lösbar:

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{2\,r_{\text{E}}\,y}{(1+y^2)^2}\,y = \left[-\frac{r_{\text{E}}}{1+y^2}\,y\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{r_{\text{E}}}{1+y^2} = 0 + r_{\text{E}}\,[\arctan y]_0^{\infty} = r_{\text{E}}\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Für die Erde folgt aus $\frac{4\,\pi^2}{T_{\text{E}}^2}\,r_{\text{E}} = \frac{G\,m_{\text{S}}}{r_{\text{E}}^2}$ für die Umlaufzeit der Erde $T_{\text{E}} = \frac{2\,\pi\,r_{\text{E}}^{2/3}}{\sqrt{G\,m_{\text{S}}}}$. Damit ergibt sich für die Fallzeit des Satelliten das gleiche Ergebnis wie in (9.12)

$$t = \frac{\pi\,r_{\text{E}}^{2/3}}{2\,\sqrt{2\,G\,m_{\text{S}}}} = \frac{T_{\text{E}}}{4\,\sqrt{2}} \approx 0{,}177\,\text{a} \approx 65\,\text{Tage}\,.$$

Bewertung - Raketenstarts und Satelliten		Punkte
9.a)	Erkennen der Ablenkung der Luftmoleküle um Winkel α bei Stoß	0.5
	Bestimmen des Impulsübertrags durch ein Luftmolekül auf Rakete (9.1)	1.0
	Bestimmen der Anzahl der pro Zeit auf Rakete treffenden Luftmoleküle (9.2)	0.5
	Erkennen, dass Impulsübertrag pro Zeit der Reibungskraft entspricht und Angeben eines Ausdrucks für die Reibungskraft (9.3)	1.0
	Berechnen des Wertes für die Reibungskraft (9.4)	1.0
9.b)	Nutzen der Proportionalität der Reibungskraft zu $v^2 \cdot \rho_{\text{atm}}$	1.0
	Erkennen, dass Dichte proportional zum Druck angenommen werden kann	1.0
	Formulieren einer Idee zur Bestimmung der Höhe bei maximaler Reibungskraft	1.0
	Auswerten der Daten zur Bestimmung der Höhe bei maximaler Reibungskraft	2.0
	Bestimmen der Höhe mit $14\,\mathbf{km} \leq h_{\text{Max Q}} \leq 18\,\mathbf{km}$ (9.5)	1.0
9.c)	Gleichsetzen von Zentripetal und Gravitationskraft (9.6)	1.0
	Umformen der Kraftgleichung zur Geschwindigkeit (9.7)	0.5
	Verwenden eines Radius nah am Radius der Erde	0.5
	Berechnen des Wertes der Geschwindigkeit in (9.7)	0.5
	Berechnen des Wertes der Umlaufzeit in (9.8)	0.5
9.d)	Verwenden und Angeben des Energiesatzes (9.9)	1.0
	Umformen des Energiesatzes zur Geschwindigkeit (9.10)	0.5
	Berechnen des Wertes der Geschwindigkeit in (9.10)	1.0
	Bestimmen des Verhältnisses der beiden Geschwindigkeiten	0.5
9.e)	Erkennen, dass Bahn beim Fall als entartete Ellipse betrachtet werden kann	1.0
	Nutzen des 3. Keplerschen Gesetzes (9.11)	1.0
	Verwenden der korrekten großen Halbachse $a_{\text{Satellit}} = r_{\text{E}}/2$	0.5
	Erkennen, dass Fallzeit der halben Umlaufzeit entspricht	0.5
	Berechnen der Fallzeit (9.12)	1.0
		20.0

Bemerkung zum letzten Aufgabenteil - Wenn die Lösung über den Energieerhaltungssatz erfolgt, werden die Punkte wie folgt vergeben: 1.0 P. für die korrekte Formulierung des Energiesatzes, 0.5 P. für das Umstellen zur Geschwindigkeit (9.14), 0.5 P. für eine Idee zur Auswertung, 1.0 P. für die Auswertung, 1.0 P. für das (näherungsweise) Berechnen der Fallzeit, wobei alle plausiblen Werte bepunktet werden sollten.

Aufgabe 10 Goethebarometer (15 Pkt.)

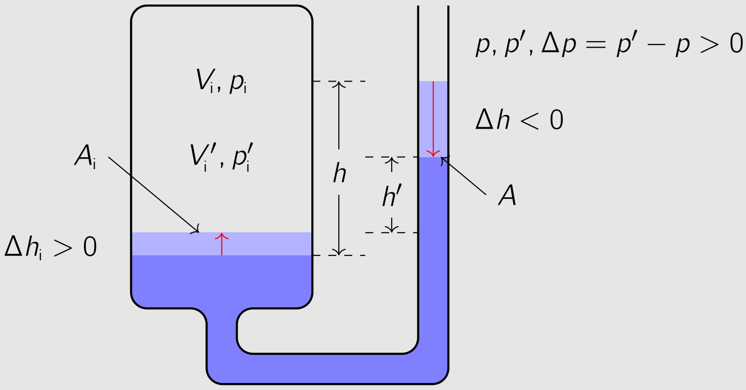
(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Thomas Hellerl)

Mit einem Goethebarometer lassen sich Luftdruckänderungen messen. Es besteht aus einem oben geschlossenen Gefäß, das im oberen Teil mit Luft und im unteren Teil mit Wasser gefüllt ist. Dieser untere Teil ist über ein senkrechtes und nach oben offenes Steigrohr mit der Atmosphäre verbunden. Durch Änderungen des äußeren Luftdrucks sinkt bzw. steigt der Wasserspiegel im „Schnabel“ des Barometers. Bei konstanter Umgebungstemperatur ist die Luftdruckänderung Δp alleinige Ursache einer Wasserspiegeländerung Δh im Steigrohr.

Betrachte ein einfaches Goethebarometer, wie in der Skizze gezeigt. Die Querschnittflächen des Steigrohres und des Gefäßes betragen $A = 0{,}30\,\mathrm{cm}^2$ bzw. $A_i = 20\,\mathrm{cm}^2$. Bei einem Luftdruck von $p = 1000\,\mathrm{hPa}$ beträgt die Differenz zwischen den Wasserspiegeln im Steigrohr sowie dem Gefäß $h = 3{,}0\,\mathrm{cm}$, und das im Gefäß bei dem Druck p_i eingeschlossene Luftvolumen ist $V_i = 100\,\mathrm{cm}^3$. Der Dampfdruck des Wassers soll dabei nicht berücksichtigt werden.

Wenn sich der Luftdruck um Δp erhöht, sinkt der Wasserspiegel im Steigrohr. Bezeichne mit p', V_i', p_i' und h' die sich bei dem geänderten Luftdruck einstellenden Größen entsprechend der Abbildung.

(a) *Foto eines Goethebarometers, CC BY-SA 3.0)*



(b) *Einfaches Goethebarometer mit konstanten Querschnitten. Die roten Pfeile deuten die Verschiebung bei Druckerhöhung an.*

Abb. 8. *Wetterglas oder Goethebarometer*

10.a) Leite einen Zusammenhang zwischen der Luftdruckänderung Δp und der zugehörigen Wasserspiegeländerung Δh im Steigrohr her. Berechne den Wert der Luftdruckänderung, wenn der Wasserspiegel im Steigrohr um $1{,}0\,\mathrm{cm}$ sinkt. Verwende dabei für die Dichte von Wasser $\rho = 1{,}00 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ und für die Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. *(11.0 Pkt.)*

10.b) Bestimme näherungsweise, wie groß die Wasserspiegeländerung im Steigrohr bei der gleichen Druckänderung bei einem im Maßstab 1:2 verkleinerten Goethebarometer wäre. *(4.0 Pkt.)*

Hinweis: Du kannst für $x \ll 1$ die Näherung $(1 - x)^n \approx 1 - n\,x$ verwenden.

Lösung

10.a) Rechnungen und Erläuterungen

Für das eingeschlossene Gasvolumen gilt das Gesetz von Boyle und Mariotte, da die Temperatur des Systems als konstant vorausgesetzt wird.

$$p_\mathrm{i} \cdot V_\mathrm{i} = p_\mathrm{i}' \cdot V_\mathrm{i}' \,. \tag{10.1}$$

Der Druck des inneren Luftvolumens setzt sich immer aus dem Luftdruck und dem zusätzlichen hydrostatischen Druck der Wassersäule über dem inneren Wasserspiegel zusammen.

$$(p + \rho g h)\, V_\mathrm{i} = (p + \Delta p + \rho g (h + \Delta h - \Delta h_\mathrm{i}))\, V_\mathrm{i}' \,. \tag{10.2}$$

Dabei sind bei einer Luftdruckerhöhung mit $\Delta p > 0$ die Höhenänderungen $\Delta h < 0$ und $\Delta h_\mathrm{i} > 0$. Das innere Volumen wird genau durch das Volumen der Wasserstandsabnahme im Steigrohr verringert.

$$(p + \rho g h)\, V_\mathrm{i} = (p + \Delta p + \rho g (h + \Delta h - \Delta h_\mathrm{i}))\, (V_\mathrm{i} + A \Delta h) \,. \tag{10.3}$$

Mit der Volumenerhaltung des inkompressiblen Wassers folgt

$$-\Delta h_\mathrm{i} = \frac{A}{A_\mathrm{i}} \Delta h \,. \tag{10.4}$$

In (10.3) eingesetzt ergibt sich

$$(p + \rho g h)\, V_\mathrm{i} = \left(p + \Delta p + \rho g \left(h + \Delta h + \frac{A}{A_\mathrm{i}} \Delta h\right)\right) (V_\mathrm{i} + A \Delta h) \,. \tag{10.5}$$

Auflösen nach Δp liefert schließlich

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{(p + \rho g h)\, V_\mathrm{i}}{V_\mathrm{i} + A \Delta h} - \left(p + \rho g h + \rho g \Delta h \left(1 + \frac{A}{A_\mathrm{i}}\right)\right) \\ &= (p + \rho g h) \left(\frac{1}{1 + \frac{A}{V_\mathrm{i}} \Delta h} - 1\right) - \rho g \Delta h \left(1 + \frac{A}{A_\mathrm{i}}\right) . \end{aligned} \tag{10.6}$$

Mit der Näherung $\frac{A}{A_\mathrm{i}} = 0{,}015 \ll 1$ und $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ für $x \ll 1$ ergibt sich

$$\boxed{\Delta p \approx -(p + \rho g h) \frac{A}{V_\mathrm{i}} \Delta h - \rho g \Delta h \approx -\left(p \cdot \frac{A}{V_\mathrm{i}} + \rho g\right) \Delta h} \,. \tag{10.7}$$

Dabei wurde im zweiten Schritt zusätzlich die Näherung $p \gg \rho g h$ verwendet. Mit (10.6) oder (10.7) lässt sich der Wert für die Druckdifferenz bestimmen zu

$$\boxed{\Delta p \approx 4{,}0\,\mathrm{hPa}} \,. \tag{10.8}$$

10.b)

Rechnungen und Erläuterungen

In dem näherungsweisen Ausdruck (10.7) ist der Quotient $\frac{A}{V_i}$ der einzig verbleibende Gefäßparameter, der den Zusammenhang von Druck- und Höhenänderung beeinflusst. Bei einer um einen Faktor 2 verkleinerten Version des Goethebarometers beträgt A nur noch $\frac{1}{4}$ des ursprünglichen Wertes und V_i nur noch $\frac{1}{8}$. Damit ist der Quotient $\frac{A}{V_i}$ dann doppelt so groß.

Damit ergibt sich für die Höhenänderung Δh_{skal} in dem skalierten Goethebarometer mit Hilfe von (10.7)

$$\boxed{\Delta h_{\text{skal}} \approx -\frac{\Delta p}{2\,p\,\frac{A}{V_i} + \rho g} \approx -0{,}57\,\text{cm}}\,. \tag{10.9}$$

Bewertung - Goethebarometer		Punkte
10.a)	Verwenden der Gasgleichung (Gesetz von Boyle und Mariotte) (10.1)	1.0
	Berücksichtigen des hydrostatischen Drucks	1.0
	Formulieren der Zustandsänderung (10.3) mit korrekten Vorzeichen	3.0
	Berücksichtigen der Volumenerhaltung (10.5)	1.0
	Einsetzen und Auflösen nach Δp (10.6)	3.0
	Berechnen des Ergebnisses (10.8) (exakt oder näherungsweise)	2.0
10.b)	Erkennen, dass $\frac{A}{V_i}$ einzig relevanter Gefäßparameter ist	1.0
	Korrektes Skalieren der geometrischen Größen	2.0
	Berechnen der Steighöhe im skalierten Thermometer (10.9)	1.0
		15.0