54. Internationale PhysikOlympiade Isfahan, Iran 2024*

Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen
Tel.: 0431 / 880 - 5120
email: petersen@ipho.info

Dürken Quaas
Tel.: 0431 / 880 - 5387
email: quaas@ipho.info

Anschrift: IPN · Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
Olshausenstraße 62 · 24118 Kiel

web: **www.ipho.info**

Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 54. IPhO 2024

Hinweise

Die 2. Runde des Auswahlwettbewerbs zur Internationalen PhysikOlympiade 2024 wurde als Klausurrunde durchgeführt. Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler hatten für die Bearbeitung der Aufgaben drei Zeitstunden zur Verfügung und haben die Klausur in der Regel an ihrer Schule absolviert. Neben Hinweisen zur Klausur sind nachfolgend die Aufgaben mit einem Lösungsvorschlag zu finden.

Die Korrektur der Klausur der 2. Runde erfolgt auf Grundlage dieser Musterlösung. Gemäß den Gepflogenheiten bei der Internationalen PhysikOlympiade wird dabei primär die Richtigkeit der Lösung bewertet und weniger die Sauberkeit der Ausarbeitung oder der sprachliche Ausdruck.

Im Korrekturprozess kann noch eine Anpassung der Bewertungsvorschläge notwendig werden.

Bei den Multiple-Choice Aufgaben werden alleine für die richtigen Antwortbuchstaben bereits jeweils 2 Punkte vergeben. Die in den Bewertungstabellen darüber hinaus angegebenen Punktzahlen beziehen sich jeweils auf den von uns ausgearbeiteten Lösungsweg. Bei anderen Lösungswegen wird die Bewertung sinngemäß abgeändert, wobei die Gesamtpunktzahl pro Aufgabenteil beibehalten wird. Folgefehler werden in der Regel nicht bestraft. Die Verwendung eines falschen Zwischenergebnisses sollte, sofern sich dadurch keine starke Vereinfachung des Problems ergibt, also bei folgenden Fragen nicht zu Punktabzug führen. Dies bedeutet insbesondere, dass ein numerisches Ergebnis auch dann als korrekt gewertet wird, wenn vorher eine falsche Formel abgeleitet, aber korrekt mit dieser Formel weitergerechnet wurde. Wenn bei einem Ergebnis jedoch die resultierende Einheit falsch ist, führt dies in jedem Fall zu Punktabzug.

Bei Fragen oder Anmerkungen freuen wir uns über eine Nachricht an ipho@ipho.info.

*Für die Ausrichtung der 54. IPhO im Juli 2024 ist entsprechend eines Beschlusses des International Board der IPhO aus 2011 der Iran vorgesehen. Eine Entscheidung über die Entsendung eines deutschen Teams ist noch nicht gefallen und wird unter Berücksichtigung der politischen Lage sowie der logistischen Gegebenheiten getroffen.

Multiple-Choice Aufgaben

Finde zu jeder der folgenden sieben Fragen den richtigen Lösungsbuchstaben und begründe physikalisch, warum dies die korrekte Lösung ist. Es ist jeweils nur eine Antwortmöglichkeit richtig. Nutze den Platz in der Box für Rechnungen sowie Begründungen und notiere deinen Antwortbuchstaben an der vorgesehenen Stelle am Ende jeder Box.

Aufgabe 1 Wasserstrahl (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Die Unterseite eines mit Wasser gefüllten Behälters befindet sich, wie nebenstehend gezeigt, auf einer Höhe von $H_{\text{unten}} = 15\,\text{cm}$ über dem Boden. Die Wasserhöhe im Behälter beträgt $H = 50\,\text{cm}$.

In den Behälter wird nun auf einer Höhe h über der Unterseite ein kleines Loch gebohrt, so dass sich ein Wasserstrahl aus dem Behälter ergießt, der anfänglich in einer Entfernung x auf den Boden trifft.

Welcher der Graphen gibt die Entfernung x des Auftreffpunktes in Abhängigkeit von der Höhe h, in der das Loch gebohrt wird, korrekt wieder?

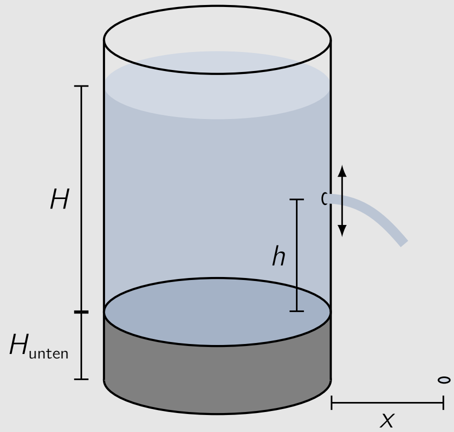
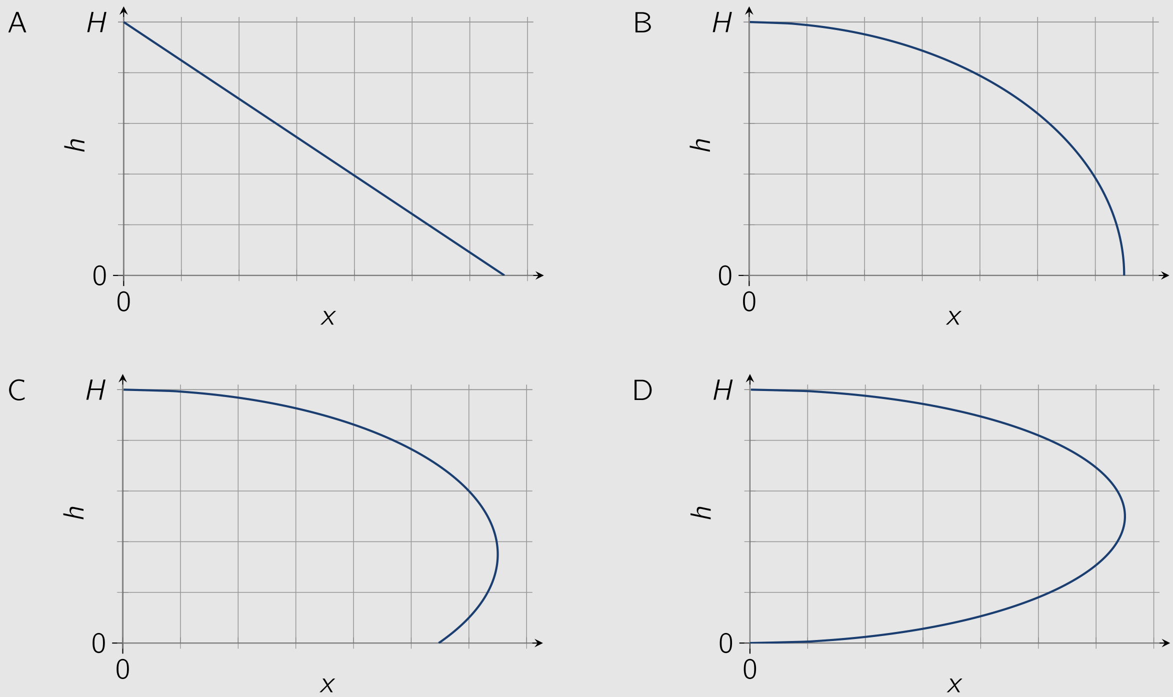


Abb. 1. *Skizze zum Wasserstrahl.*



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Der Wasserstrahl tritt stets waagerecht aus dem Loch aus. Die Austrittsgeschwindigkeit v des Wasserstrahl ist dabei von der über dem Loch befindlichen Wasserhöhe abhängig. Bezeichne mit ρ

die Dichte des Wassers. Dann gilt mit der Bernoulli-Gleichung

$$\rho\, g\, (H - h) = \frac{1}{2}\, \rho\, v^2 \qquad \text{bzw.} \qquad v = \sqrt{2\, g\, (H - h)}\,. \tag{1.1}$$

Der Wasserstrahl trifft in einer Entfernung $x = v\,t$ auf den Boden, wobei t die Zeit für den freien Fall aus der Höhe $H_{\text{unten}} + h$ angibt. Für diese gilt

$$H_{\text{unten}} + h = \frac{1}{2}\, g\, t^2 \qquad \text{bzw.} \qquad t = \sqrt{\frac{2\,(H_{\text{unten}} + h)}{g}}\,. \tag{1.2}$$

Daraus ergibt sich schließlich für die Entfernung x des Auftreffpunktes

$$\boxed{x = v\,t = 2\,\sqrt{(H - h)\,(H_{\text{unten}} + h)}}\,. \tag{1.3}$$

Mit $h' := h + H_{\text{unten}}$ lässt sich dieser Ausdruck umschreiben zu

$$\boxed{x = 2\,\sqrt{(H + H_{\text{unten}} - h')\, h'} = 2\,\sqrt{\frac{(H + H_{\text{unten}})^2}{4} - \left(\frac{H + H_{\text{unten}}}{2} - h'\right)^2}}\,. \tag{1.4}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist eine quadratische Funktion in h', der für $h' = \frac{H+H_{\text{unten}}}{2}$ maximal wird. Die maximale Reichweite des Wasserstrahls wird also erreicht, wenn sich das Loch auf der Hälfte der Gesamthöhe $H + H_{\text{unten}}$, also bei etwa $h = H/3$ befindet. Dies ist nur bei Graph C der Fall.

Korrekte Antwort: *C*

Bemerkung: Die Antwortoptionen B und D ergeben sich aus den abgeleiteten Gleichungen für die speziellen Fälle $H_{\text{unten}} = H$ bzw. $H_{\text{unten}} = 0$. Antwortoption A stellt keine physikalische Lösung dar.

Bewertung - Wasserstrahl (MC-Aufgabe)		**Punkte**
1	Erkennen, dass die Austrittsgeschwindigkeit von Wasserhöhe über dem Loch abhängt und Angeben eines Ausdruckes für die Geschwindigkeit	1.0
	Untersuchen des freien Falls und Angeben der Fallzeit	1.0
	Ableiten eines Ausdrucks für die Entfernung des Auftreffpunktes	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 2 Zwei Bilder (MC-Aufgabe)

Mit einer Handykamera wird ein Foto einer wunderschönen Trinkflasche aufgenommen, die sich in einer Entfernung von etwa 35 cm von der Kamera befindet. Auf dem Foto erscheint der etwa 5,8 m entfernte Hintergrund unscharf. Wird nun eine Linse direkt vor der Kamera positioniert, so erscheint der Hintergrund durch die Linse auf dem Foto scharf.

Abb. 2. *Fotos der Trinkflasche ohne (links) und mit (rechts) Linse. Die Linse ist an dem Rand zu erkennen und befindet sich im linken Teil des rechten Fotos.*

Wie groß ist die Brennweite der Linse?

Hinweis: Positive Brennweiten kennzeichnen Sammellinsen und negative Zerstreuungslinsen.

A etwa -35 cm B etwa -18 cm C etwa 35 cm D etwa 58 cm

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Auf beiden Bildern ist die Schrift auf der Flasche scharf zu erkennen. Die Kamera ist also in beiden Fällen auf diese und damit auf eine Entfernung von etwa 35 cm fokussiert.

Für die Abbildung der Flasche gilt unter der Annahme einer dünnen Kameralinse die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}, \tag{2.1}$$

wobei f die Brennweite der Kameralinse, b die unbekannte Bildweite der Abbildung mit der Kamera und $g = 35\,\mathrm{cm}$ den Abstand der Flasche von der Kamera angeben.

Bezeichne die Brennweite der zusätzlichen Linse mit f'. Wenn die Linse direkt vor die Kamera gestellt wird, addieren sich in guter Näherung die Brechkräfte der Linsen und die Gesamtbrennweite der beiden Linsen zusammen beträgt $(\frac{1}{f} + \frac{1}{f'})^{-1}$. Für die Abbildung mit der Linse gilt daher mit der

Entfernung $g' = 5{,}8\,\mathrm{m}$ zum Hintergrund die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}}} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g'} \,. \tag{2.2}$$

Entscheidend ist hier, dass die Bildweite aufgrund des unveränderten Fokus der Kamera die gleiche wie im Fall ohne Linse ist. Auflösen von (2.1) nach $1/b$ und Einsetzen in obige Gleichung ergibt für die gesuchte Brennweite der Linse

$$\boxed{f' = \frac{g\,g'}{g - g'} \approx -37\,\mathrm{cm}} \,. \tag{2.3}$$

Damit kommt nur Antwort A in Frage.

Alternativ lässt sich die Brennweite auch ohne Rechnung durch folgende Überlegung bestimmen:

Wenn der Hintergrund durch die Linse scharf zu erkennen ist, muss dieser durch die Linse für die Kamera in dem gleichen Abstand erscheinen, wie die Flasche. Die Kamera sieht also ein (virtuelles) Bild des Hintergrundes, das etwa 35 cm hinter der Linse auf der Objektseite liegt. Damit muss es sich bei der Linse um eine Zerstreuungslinse handeln[a].

Da der Hintergrund mit fast sechs Metern weit entfernt ist, entsteht das Bild des Hintergrundes in guter Näherung in der Brennebene. Die Brennweite f' ist also gleich der Bildweite und beträgt

$$\boxed{f' \approx -35\,\mathrm{cm}} \,. \tag{2.4}$$

Korrekte Antwort: *A*

[a] Eine Sammellinse kann auch ein virtuelles Bild erzeugen, wenn die Gegenstandsweite kleiner als die Brennweite ist. Dann ist die Bildweite, wie zum Beispiel bei einer Lupe, betragsmäßig aber immer größer als die Gegenstandsweite, was hier nicht der Fall ist.

Bewertung - Zwei Bilder (MC-Aufgabe)		**Punkte**
2	Formulieren der Abbildungsgleichung für die Abbildung mit der Kamera	1.0
	Verwenden der Kombination zweier naher Linsen	1.0
	Nutzen, dass die Bildweiten in beiden Fällen identisch sind	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Alternative Bewertung

Bewertung - Zwei Bilder (MC-Aufgabe)		**Punkte**
2	Erkennen, dass die Kamera auf die Entfernung der Flasche fokussiert ist	1.0
	Erkennen, dass das Bild des Hintergrundes den gleichen Abstand haben muss	1.0
	Nutzen, dass das Bild für große Gegenstandsweiten in der Brennebene entsteht	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Hinweis: Die Idee zu der Aufgabe geht auf folgenden Artikel zurück: Ruiz, M. J. (2019). *Dioptres for a myopic eye from a photo*. Physics Education, 54(6), doi.org/10.1088/1361-6552/ab3c0d.

Aufgabe 3 Magnetfall (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Ein zylinderförmiger Magnet wird durch drei verschiedene, senkrecht aufgestellte Rohre fallen gelassen. Die Rohre haben identische Abmessungen, bestehen aber aus unterschiedlichem Material - eines aus Plexiglas, eines aus Messing und eines aus Aluminium.

Für eine Fallstrecke von $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$ in den Rohren werden die folgenden Fallzeiten des Magneten gemessen:

$$\begin{aligned} \text{Plexiglas} \quad & t_{\text{Plexiglas}} = 0{,}46\,\mathrm{s} \\ \text{Messing} \quad & t_{\text{Messing}} = 2{,}15\,\mathrm{s} \\ \text{Aluminium} \quad & t_{\text{Aluminium}} = 3{,}81\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Die elektrische Leitfähigkeit des Materials, aus dem das Aluminiumrohr besteht, beträgt $\sigma_{\text{Aluminium}} = 3{,}7 \cdot 10^{7}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$.

Welcher Wert ergibt sich aus den Fallzeiten als Abschätzung für die elektrische Leitfähigkeit σ_{Messing} des Materials des Messingrohres?

A $1{,}2 \cdot 10^{7}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$

B $2{,}1 \cdot 10^{7}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$

C $4{,}9 \cdot 10^{7}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$

D $6{,}6 \cdot 10^{7}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Wenn der Magnet in einem der Metallrohre fällt, werden in dem Rohr Wirbelströme induziert, die wiederum ein Magnetfeld hervorrufen, das dem Magnetfeld des Magneten entgegengesetzt ist und diesen bremst.

Nach dem Induktionsgesetz ist die von dem Magneten in horizontalen Querschnitten des Rohrs induzierte Spannung proportional zur Änderung des magnetischen Flusses durch den betrachteten Querschnitt. Diese ist proportional zur Geschwindigkeit des Magneten.

Die in einem Rohrquerschnitt umgesetzte elektrische Leistung P ist gleich dem Quadrat der entlang des Querschnitts induzierten Spannung U geteilt durch den Widerstand des Rohrquerschnitts: $P = U^2/R$. U ist nun aber proportional zur mittleren Fallgeschwindigkeit $v = L/t$ und P entspricht der insgesamt beim Fall umgesetzten Energie $m\,g\,L$ geteilt durch die Fallzeit t.

Zusammen ergibt sich daraus eine Proportionalität von t zu $1/R$ und damit zu σ.

Damit folgt für die Leitfähigkeit des Materials des Messingrohres

$$\boxed{\sigma_{\text{Messing}} = \sigma_{\text{Aluminium}} \frac{t_{\text{Messing}}}{t_{\text{Aluminium}}} \approx 2{,}1 \cdot 10^{7}\,\mathrm{A\,V^{-1}\,m^{-1}}}\,. \tag{3.1}$$

Korrekte Antwort: *B*

Bewertung - Magnetfall (MC-Aufgabe)		**Punkte**
3	Erkennen der Wirbelstrombremsung	0.5
	Erkennen, dass Induktionsspannung proportional zur Fallgeschwindigkeit ist	1.0
	Ausdrücken der Leistung durch Spannung und Widerstand bzw. Leitfähigkeit	0.5
	Ableiten einer Proportionalität zwischen der Fallzeit und der Leitfähigkeit (kann auch gegeben werden, wenn nur eine je, desto Beziehung erkannt wird)	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 4 Leistung von Windenergieanlagen (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Windenergieanlagen erzeugen elektrische Leistung, indem sie Energie aus Wind verwenden, um Generatoren anzutreiben. Bei einer moderaten Windgeschwindigkeit beträgt die von dem Wind einer Anlage zur Verfügung gestellte und damit theoretisch maximal nutzbare Leistung P.

Welche von dem Wind der Anlage zur Verfügung gestellte Leistung ergibt sich bei einer Verdopplung der Windgeschwindigkeit?

A $2P$ B $3P$ C $4P$ D $8P$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Es wird angenommen, dass sich die Dichte der Luft nicht ändert.

Bei einer Verdopplung der Windgeschwindigkeit besitzt eine feste Luftmasse die vierfache kinetische Energie, da diese quadratisch mit der Geschwindigkeit skaliert.

Außerdem tritt in der gleichen Zeit die doppelte Luftmasse durch die von den Flügeln überstrichene Fläche.

Wenn also alle anderen Parameter identisch bleiben, beträgt die Leistung das Achtfache der ursprünglichen und Antwort D ist richtig.

Bemerkung: Die Abhängigkeit der Windleistung von der dritten Potenz der Windgeschwindigkeit ist Teil des Betzschen Gesetzes, das die obere Grenze für die nutzbare Leistung von Windenergieanlagen beschreibt.

Korrekte Antwort: *D*

Bewertung - Leistung von Windenergieanlagen (MC-Aufgabe)		Punkte
4	Nutzen der kinetischen Energie der Luftmasse	1.0
	Erkennen, dass die kinetische Energie vier Mal so groß ist	1.0
	Erkennen, dass die doppelte Luftmasse die Anlage durchströmt	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 5 Wasserkocher mit Eiswürfel (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

In einem Wasserkocher wird Wasser erhitzt. Während des Erhitzens wird ein Eiswürfel der Temperatur $\vartheta_0 = 0\,°\mathrm{C}$ in das Wasser geworfen. Abbildung 3 zeigt die Temperatur des Wassers als Funktion der Zeit. Die Temperatur des Wassers ist anfänglich gleich der Raumtemperatur und kann zu jeder Zeit als im ganzen Wasserkocher gleich angenommen werden.

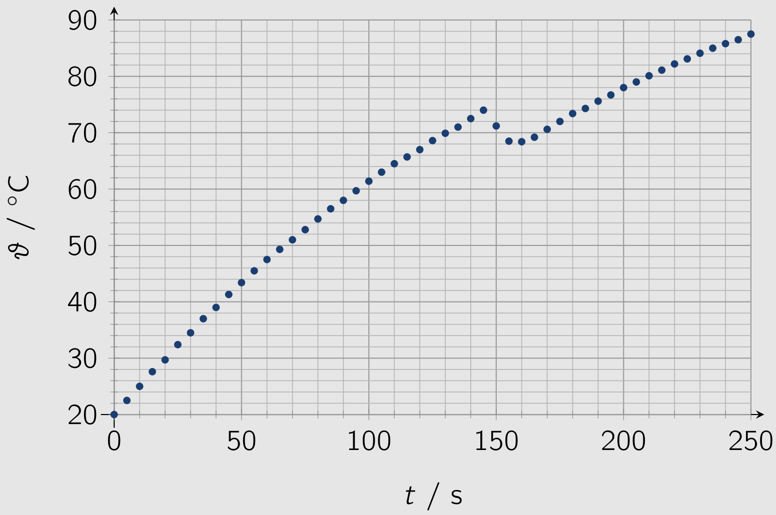


Abb. 3. *Temperatur ϑ im Wasserkocher in Abhängigkeit von der Heizzeit t.*

Die Heizleistung des Wasserkochers beträgt 900 W. Für die spezifische Wärmekapazität von Wasser kann der Wert $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ verwendet werden und für die spezifische Schmelzwärme (oder Schmelzenthalpie) von Eis $h = 335\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$.

Welche Masse besaß der Eiswürfel, als er in das Wasser geworfen wurde?

A 16 g B 26 g C 56 g D 145 g

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

In der Kurve ist ab etwa 145 s ein deutliches Absinken der Temperatur zu erkennen. Zu dieser Zeit wurde offensichtlich der Eiswürfel ins Wasser geworfen.

Die Masse des Eiswürfels lässt sich aus der Absenkung der Temperatur bestimmen. Bezeichne mit m_{Eis} die Masse des Eiswürfels und m_{W} die ebenfalls unbekannte Masse des Wassers, das sich anfänglich im Wasserkocher befindet.

Aus dem Graphen lässt sich für die Zeit $t' = 160\,\mathrm{s}$ eine Wassertemperatur von $\vartheta' = 68{,}5\,°\mathrm{C}$ ablesen. Vergleicht man diese Temperatur mit der Fortführung der Heizkurve ohne das Hinzufügen des Eiswürfels (vgl. Abb. 4), so ist ein Temperaturunterschied zwischen den beiden Verläufen von $\Delta\vartheta \approx 76{,}5\,°\mathrm{C} - 68{,}5\,°\mathrm{C} = 9{,}0\,\mathrm{K}$ zu erkennen. Die bei dem Abkühlen des Wassers um diese Temperatur freiwerdende Energie wird zum Schmelzen des Eiswürfels und Erhitzen des dabei entstehenden Schmelzwassers auf die Temperatur ϑ' aufgewendet. Daher gilt:

$$c\, m_{\mathrm{W}}\, \Delta\vartheta = \left(c\left(\vartheta' - \vartheta_0\right) + h\right) m_{\mathrm{Eis}}\,. \tag{5.1}$$

Um die noch unbekannte Masse m_{W} des Wassers zu bestimmen, kann der Verlauf der Heizkurve für kleine Temperaturen untersucht werden. Zu Beginn des Heizens wird nur wenig Wärme an die Umgebung abgeführt, so dass die Heizleistung P_{Heiz} fast ausschließlich zum Erhitzen des Wassers genutzt wird. In einer kleinen Zeit δt erwärmt sich das Wasser um eine Temperatur $\delta\vartheta$, für die gilt:

$$P_{\text{Heiz}}\,\delta t = c\,m_{\text{W}}\,\delta\vartheta\,. \tag{5.2}$$

Mit Hilfe der gegebenen Werte und der aus dem Graphen abzulesenden Steigung $\delta\vartheta/\delta t \approx 0{,}50\,\mathrm{K\,s^{-1}}$ bestimmt sich die Wassermasse daraus zu

$$m_{\text{W}} = \frac{P_{\text{Heiz}}}{c\,\frac{\delta\vartheta}{\delta t}} \approx 0{,}43\,\mathrm{kg}\,. \tag{5.3}$$

Damit folgt schließlich für die Masse des Eiswürfels

$$\boxed{m_{\text{Eis}} = m_{\text{W}}\,\frac{c\,\Delta\vartheta}{c(\vartheta' - \vartheta_0) + h} \approx 26\,\mathrm{g}}\,. \tag{5.4}$$

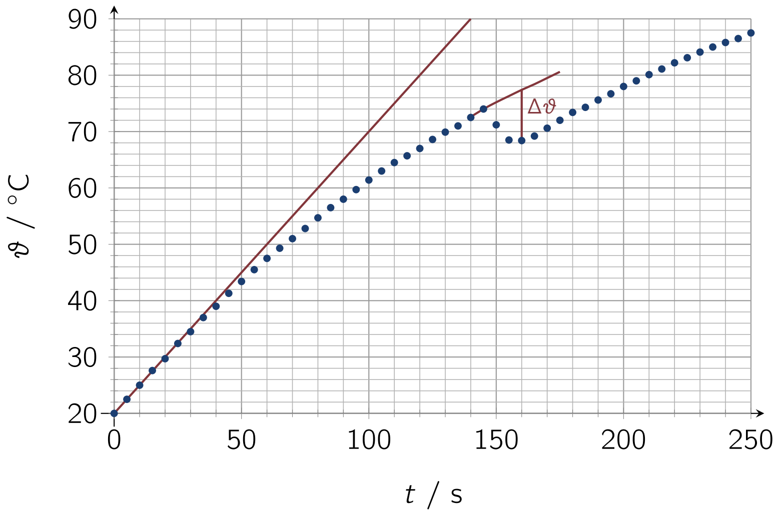


Abb. 4. *Temperatur ϑ im Wasserkocher in Abhängigkeit von der Heizzeit t mit konstruierten Größen für die Lösung.*

Korrekte Antwort: *B*

Bemerkung: Die Antwortoption A ergibt sich, wenn der Temperatursprung ohne Extrapolation der Daten zu etwa 5,5 K bestimmt wird. Antwortoption C ist das Ergebnis ohne Berücksichtigung der latenten Wärme und Antwortoption D folgt aus der Temperatur von 88 °C nach 250 s heizen, wenn angenommen wird, dass die gesamte Heizleistung in die Erwärmung des Wassers und das Schmelzen des Eises geht, die Wärmeabgabe an die Umgebung also nicht berücksichtigt wird.

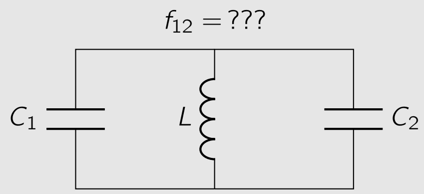
Bewertung - Wasserkocher mit Eiswürfel (MC-Aufgabe)		**Punkte**
5	Erkennen des Temperatursprungs	0.5
	Ermitteln des Temperatursprungs aufgrund des Eiswürfels	0.5
	Aufstellen einer Energiebilanz für Temperatursprung (5.1)	1.0
	Bestimmen der Wassermasse im Wasserkocher (5.3)	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 6 Schwingkreise (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Thomas Hellerl & Rolf Faßbender)

Eine Schaltung aus einer idealen Spule und einem idealen Kondensator heißt Schwingkreis. Die beiden, oben abgebildeten elektrischen Schwingkreise mit gleicher Induktivität L aber unterschiedlichen Kapazitäten C_i schwingen völlig widerstandslos mit den angegebenen Frequenzen.

Wie groß ist die Schwingungsfrequenz f_{12} (Eigenfrequenz) des folgenden, gekoppelten Systems?



A $\frac{2}{3} f$ B $\frac{3}{4} f$ C $\frac{4}{5} f$ D $\frac{5}{4} f$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Periodendauern der Schwingungen der oberen Schwingkreise sind gegeben durch die Thomsonformel

$$T_i = 2\,\pi \sqrt{L\,C_i}\,. \tag{6.1}$$

Im unteren, gekoppelten Schwingkreis addieren sich die Kapazitäten, da sie parallel geschaltet sind.

$$C_{12} = C_1 + C_2\,. \tag{6.2}$$

Für seine Schwingungsdauer T_{12} gilt demnach

$$T_{12} = 2\,\pi\,\sqrt{L(C_1 + C_2)} \qquad \text{bzw.} \qquad T_{12}^2 = 4\,\pi^2\,L\,(C_1 + C_2) = T_1^2 + T_2^2\,. \tag{6.3}$$

Somit erhalten wir

$$\frac{1}{f_{12}^2} = \frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\,. \tag{6.4}$$

Daraus ergibt sich mit den gegebenen Werten für die gesuchte Frequenz

$$\boxed{f_{12} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{f^2} + \frac{1}{\frac{16}{9} f^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}}\,f = \frac{4}{5}\,f}\,. \tag{6.5}$$

Korrekte Antwort: C

Bewertung - Schwingkreise (MC-Aufgabe)		**Punkte**
6	Angabe des Zusammenhangs von Schwingungsdauer, Induktivität und Kapazität	0.5
	Erkennen, dass sich die Kapazitäten addieren	1.0
	Herleiten eines Ausdrucks Formel für die Frequenz im gekoppelten Kreis	1.5
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 7 Wasserschichtreflexion (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Die Oberfläche einer glatten, horizontalen Glasplatte ist mit einer dünnen, ebenen Wasserschicht bedeckt. Von oben fällt monochromatisches Licht der Wellenlänge 680 nm unter einem Winkel $\alpha = 30°$ zur Flächennormalen auf die Wasseroberfläche. Der Brechungsindex der Glasplatte beträgt 1,50 und der des Wassers 1,33.

Aufgrund der Verdunstung des Wassers ändert sich die Intensität des reflektierten Lichtes periodisch. Zwischen dem Auftreten von zwei Intensitätsmaxima vergeht eine Zeit von 15 Minuten.

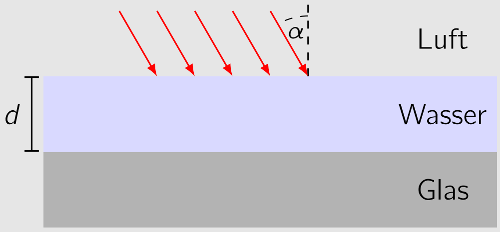


Abb. 5. *Skizze zum Lichteinfall.*

Mit welcher Rate nimmt die Dicke d der Wasserschicht auf dem Glas ab?

A etwa $0{,}3\,\mu\mathrm{m\,h^{-1}}$ B etwa $1\,\mu\mathrm{m\,h^{-1}}$ C etwa $3\,\mu\mathrm{m\,h^{-1}}$ D etwa $9\,\mu\mathrm{m\,h^{-1}}$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Betrachte, wie in Abbildung 6 skizziert, zwei einfallende, parallele Lichtstrahlen, die auf die Wasseroberfläche treffen. Für eine konstruktive Interferenz und damit ein Intensitätsmaximum muss der optische Weglängenunterschied zwischen dem direkt an der Wasseroberfläche reflektierten Strahl und dem nach dem Durchgang durch die Wasserschicht an der Glasoberfläche reflektierten Lichtstrahl einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge λ des Lichtes entsprechen. Es muss also für ein $m \in \mathbb{N}$ gelten

$$m\,\lambda = 2\,\frac{d}{\cos\beta}\,n - 2\,d\,\tan\beta\,\sin\alpha\,. \tag{7.1}$$

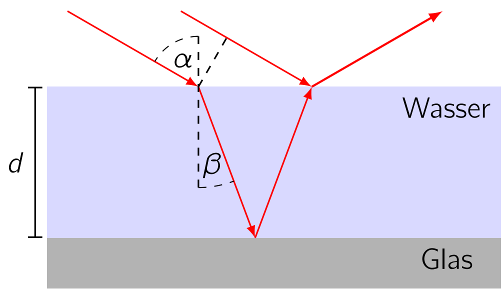


Abb. 6. *Skizze zur Interferenzentstehung mit überhöhten Einfallswinkeln.*

Dabei bezeichnet $n = 1{,}33$ den Brechungsindex von Wasser. Sowohl an der Wasseroberfläche als auch an der Glasoberfläche reflektierte Lichtstrahlen erfahren bei der Reflektion einen Phasensprung, der einer halben Wellenlänge entspricht. Für die Betrachtung der Interferenz kann dieser daher vernachlässigt werden.

Mit Hilfe des Snelliusschen Brechungsgesetzes $\sin\alpha = n\,\sin\beta$ lässt sich Gleichung (7.1) umformen zu

$$m\,\lambda = \frac{2\,d}{\cos\beta}\left(n - \frac{\sin^2\alpha}{n}\right) = 2\,d\,n\,\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = 2\,d\,n\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}\,. \tag{7.2}$$

Für zwei aufeinanderfolgenden Intensitätsmaxima muss also für die damit verbundene Verringerung Δd der Wasserschichtdicke

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2\,n\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}} \tag{7.3}$$

gelten. Für die Änderungsrate der Wasserschichtdicke pro Zeit ergibt sich daraus mit der Angabe

$\Delta t = 15$ Minuten schließlich

$$\boxed{\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{\lambda}{2\,\Delta t\, n\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}} \approx 0{,}31\,\mathrm{nm\,s^{-1}} \approx 1{,}1\,\mathrm{\mu m\,h^{-1}}}\,. \tag{7.4}$$

Korrekte Antwort: *B*

Bewertung - Wasserschichtreflexion (MC-Aufgabe)		**Punkte**
7	Angeben der Bedingung an Weglängenunterschied für konstruktive Interferenz	0.5
	Betrachten der Geometrie und Ableiten des Ausdrucks (7.1)	1.0
	Verwenden des Brechungsgesetzes und Umformen zu (7.2)	1.0
	Betrachten aufeinanderfolgender Maxima und Berechnen der Abnahmerate (7.4)	0.5
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Langaufgaben

Bearbeite die folgenden drei Aufgaben ebenfalls in den dafür vorgesehenen Boxen. Anders als bei den Multiple-Choice Aufgaben sind keine Lösungsmöglichkeiten gegeben. Beschreibe deinen Lösungsweg so, dass er gut nachvollziehbar aber nicht unnötig lang ist. Wenn du also zum Beispiel den Energieerhaltungssatz verwendest, schreibe dies kurz hin.

Aufgabe 8 Zylinder im Wasser (18 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Ein unten verschlossenes zylindrisches Rohr ist teilweise mit Wasser einer Dichte von $1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ gefüllt. Der Innendurchmesser des Rohres beträgt $(5{,}6 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$. Im Wasser befinden sich, wie in Abbildung 7 schematisch dargestellt, mehrere durch dünne Stangen fest miteinander verbundene Zylinder. Die Zylinder bestehen alle aus dem gleichen Material und besitzen die gleiche Größe. Der unterste Zylinder steht anfänglich auf dem Boden des Rohres.

Durch Ziehen an dem Faden werden die Zylinder angehoben. Der Graph in Abbildung 8 zeigt die für das Anheben notwendige Kraft F in Abhängigkeit von der Anhebehöhe h. Bei dem höchsten Wert von h befinden sich alle Zylinder oberhalb der Wasseroberfläche.

Vernachlässige in allen Aufgaben die Ausdehnung der dünnen Stangen, die die Zylinder verbinden.

8.a) Erkläre den Verlauf der Kraftkurve physikalisch und bestimme die Anzahl der Zylinder in dem Rohr. *(5.0 Pkt.)*

8.b) Bestimme die folgenden Größen *(13.0 Pkt.)*

- das Wasservolumen V_W in dem Rohr
- die Dichte ρ des Zylindermaterials
- den Radius r der Zylinder
- die Länge ℓ der Zylinder

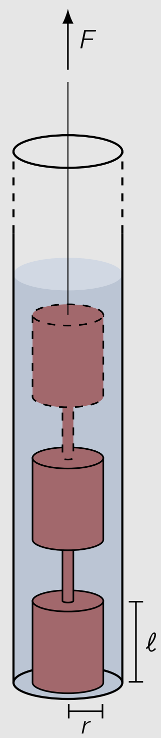


Abb. 7. *Schematische Skizze zu den Zylindern im Rohr.*

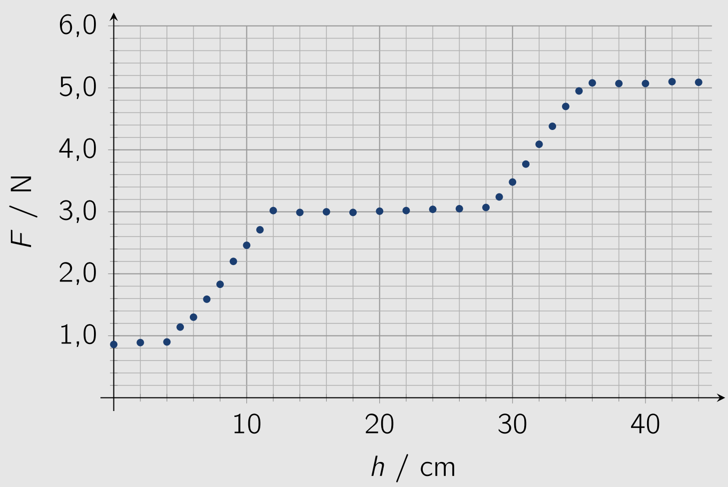


Abb. 8. *Für das Anheben notwendige Kraft F in Abhängigkeit von der Anhebehöhe h.*

Lösung

8.a)

Rechnungen und Erläuterungen

Um die Zylinder im Wasser anzuheben, ist eine Kraft größer Null notwendig, die am Beginn des Graphen zu sehen ist. Diese entspricht der Gewichtskraft der Zylinder abzüglich der Auftriebskraft der Zylinder im Wasser.

Wenn der erste Zylinder aus dem Wasser gehoben wird, muss beim Herausziehen eine größer werdende Kraft aufgewendet werden, da der Zylinder für den Teil, der bereits aus dem Wasser ist, keine Auftriebskraft erfährt. Dies ist in der Kraftkurve an einem näherungsweise linear ansteigenden Verlauf im Bereich von etwa 4 cm bis 12 cm zu erkennen.

Wenn der erste Zylinder aus dem Wasser gehoben ist, verläuft die Kraftkurve etwa horizontal. Der leichte Anstieg ist auf die endliche Ausdehnung der dann aus dem Wasser kommenden Verbindungsstange zurückzuführen.

Bei etwa 28 cm geht die Kurve erneut in einen etwa linear ansteigenden Bereich über, was auf das Herausheben eines zweiten Zylinders aus dem Wasser zurückzuführen ist. Sowohl die Länge als auch die insgesamt auftretende Kraftdifferenz dieses Bereichs entsprechen denen des vorherigen ansteigenden Bereichs, was die identische Dichte und Abmessungen der Zylinder bestätigt.

Bei einer Anhebehöhe von etwa 36 cm ist auch der zweite Zylinder aus dem Wasser gehoben und die Kurve verläuft wieder horizontal bis zum Ende. Die Zugkraft entspricht dabei der Gewichtskraft der beiden Zylinder.

Es befinden sich also 2 Zylinder in der Röhre.

8.b) Rechnungen und Erläuterungen

Grundlage für die Bestimmung der gesuchten Größen sind die Daten in der Kraftkurve. Dort sind drei Kraftniveaus sowie vier Höhen, an denen die Kurve ihren Verlauf ändert, zu erkennen. Diese bezeichnen wir mit F_1 bis F_3 sowie h_1 bis h_4. Die aus dem Graphen ermittelten Werte sind in Abbildung 9 eingetragen.

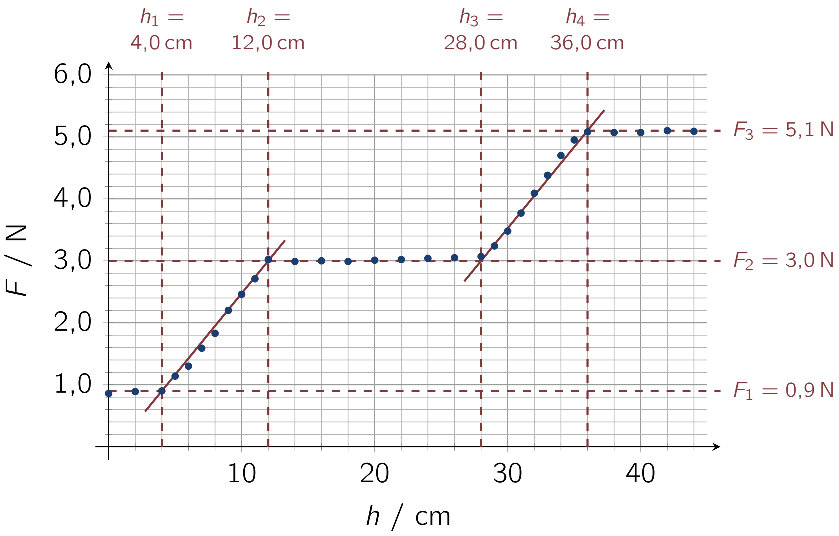


Abb. 9. *Graph der für das Anheben notwendigen Kraft F in Abhängigkeit von der Anhebehöhe h mit abgelesenen Größen.*

Wasservolumen V_W im Rohr

Bei der Anhebehöhe $h_4 = 36{,}0\,\mathrm{cm}$ kommt der Boden des untersten Zylinders gerade aus dem Wasser. Unterhalb dieses Zylinders ist das Rohr vollständig mit Wasser gefüllt. Daher gilt mit dem Innendurchmesser $d = (5{,}6 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$ des Rohres für das Wasservolumen in dem Rohr

$$\boxed{V_W = \pi\,\frac{d^2}{4}\,h_4 \approx 887\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}89\,\mathrm{L}}\,. \tag{8.1}$$

Dichte ρ des Zylindermaterials

Für die notwendige Zugkraft, gerade bevor der obere Zylinder aus dem Wasser kommt (F_1), und die Zugkraft, direkt nachdem der letzte Zylinder über die Wasseroberfläche gehoben wird (F_3), gelten mit dem Gesamtvolumen V des anfänglich untergetauchten Körpers nach dem archimedischen Prinzip:

$$F_1 = (\rho - \rho_W)\,V\,g \qquad \text{sowie} \qquad F_3 = \rho\,V\,g\,. \tag{8.2}$$

Dabei bezeichnet $\rho_W = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ die Dichte des Wassers. Durch Dividieren der beiden Ausdrücke fällt das unbekannte Volumen raus und es ergibt sich für die Dichte des Zylindermaterials

$$\boxed{\rho = \rho_W\,\frac{F_3}{F_3 - F_1} \approx 1{,}2 \cdot \rho_W = 1{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}\,. \tag{8.3}$$

Radius r der Zylinder
Wenn von einem Zylinder ein Teil aus dem Wasser herausragt, ändert sich der Wasserspiegel bei einem Anheben des Zylinders um Δh um

$$\Delta h_\mathrm{W} = -\frac{r^2}{R^2 - r^2}\,\Delta h\,, \tag{8.4}$$

wobei R den Innenradius des Rohres angibt.

Um den Körper bei der neuen Höhe zu halten, muss aufgrund der verringerten Auftriebskraft eine zusätzliche Zugkraft ΔF aufgebracht werden, für die gilt

$$\Delta F = (\Delta h - \Delta h_\mathrm{W})\,\pi\, r^2\,\rho_\mathrm{W}\,g = \frac{\pi\,\rho_\mathrm{W}\,r^2\,R^2\,g}{R^2 - r^2}\,\Delta h\,. \tag{8.5}$$

Aus dem Graphen lässt sich an den linear ansteigenden Abschnitten die pro Höhenänderung Δh notwendige Zugkraftänderung ΔF als Steigung ablesen. Es gilt

$$\text{Abschnitt 1} \qquad b_1 := \frac{F_2 - F_1}{h_2 - h_1} \approx 0{,}26\,\mathrm{N\,cm^{-1}} = 26\,\mathrm{N\,m^{-1}}\,, \tag{8.6}$$

$$\text{Abschnitt 2} \qquad b_2 := \frac{F_3 - F_2}{h_4 - h_3} \approx 0{,}26\,\mathrm{N\,cm^{-1}} = 26\,\mathrm{N\,m^{-1}}\,. \tag{8.7}$$

Die beiden Steigungen sind also im Rahmen der Ablesegenauigkeit identisch und werden im Folgenden mit b bezeichnet.

Daraus ergibt sich mit (8.5) für den Zylinderradius

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{b\,R^2}{b + \pi\,\rho_\mathrm{W}\,R^2\,g}} \approx 2{,}0\,\mathrm{cm}}\,. \tag{8.8}$$

Länge ℓ der Zylinder
Die Kraftdifferenzen $F_2 - F_1$ und $F_3 - F_2$ entsprechen gerade der beim aus dem Wasser heben wegfallenden Auftriebskraft auf einen der Zylinder. Da der Radius der Zylinder jetzt bekannt ist, lässt sich die Länge der Zylinder direkt aus diesen Kraftdiffferenzen bestimmen. Es gilt

$$\boxed{\ell = \frac{F_2 - F_1}{\pi\,\rho_\mathrm{W}\,r^2\,g} = \frac{F_3 - F_2}{\pi\,\rho_\mathrm{W}\,r^2\,g} \approx 17\,\mathrm{cm}}\,. \tag{8.9}$$

Bewertung - Zylinder im Wasser		**Punkte**
8.a)	Begründen, dass anfänglich eine Kraft zum Anheben notwendig ist	0.5
	Erkennen, dass in den flachen Abschnitten keine Zylinder aus dem Wasser gehoben werden	0.5
	Erkennen der linear ansteigenden Teile als Herausheben der Zylinder aus dem Wasser	1.0
	Erklären des linearen Anstiegs durch Wegfall der Auftriebskraft	1.0
	Erkennen, dass Länge und Kraftdifferenz der beiden ansteigenden Teile identisch sind	0.5
	Erkennen, dass am Ende alle Zylinder aus dem Wasser gehoben sind	0.5
	Angeben der korrekten Zahl an Zylindern	1.0
8.b)	Formulieren einer Idee zur Bestimmung und Ableiten einer Formel für das Wasservolumen (8.1)	1.0
	Ergebnis für Wasservolumen mit $V_W = (0{,}89 \pm 0{,}02)\,\mathrm{L}$	1.0
	Verwenden des archimedischen Prinzips	1.0
	Formulieren einer Idee zur Bestimmung und Ableiten einer Formel für die Dichte (8.3)	2.0
	Ergebnis für Dichte mit $\rho = (1{,}2 \pm 0{,}1) \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$	1.0
	Erkennen, dass die Änderung des Wasserspiegels relevant ist	1.0
	Formulieren einer Idee zur Bestimmung des Radius und Ableiten der Formel (8.5)	1.0
	Bestimmen der Steigung aus dem Graphen	1.0
	Aufstellen einer Formel für den Radius (8.8)	1.0
	Ergebnis für Radius mit $\rho = (2{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}$	1.0
	Formulieren einer Idee zur Bestimmung und Ableiten einer Formel für die Länge (8.9)	1.0
	Ergebnis für Länge mit $\ell = (17 \pm 3)\,\mathrm{cm}$	1.0
		18.0

Aufgabe 9 Hoch hinaus (15 Pkt.)

(Eine Aufgabe aus der 1. Runde zur IPhO 2020)

Ein Heißluftballon mit einem Volumen von 3700 m^3 wird am Boden mit heißer Luft einer Temperatur von 100 °C gefüllt. Die Ballonhülle und der mit Brenner, Gasflaschen sowie tollkühnen Ballonfahrenden gefüllte Korb besitzen zusammen eine Masse von 900 kg. Die Umgebungstemperatur beträgt 20 °C, und der Luftdruck liegt bei etwa $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa.

9.a) Berechne, mit welcher Kraft der Ballon am Boden gehalten werden muss und gib an, ob du in der Lage wärst, den Ballon festzuhalten oder ob du lieber loslassen solltest, um nicht in die Höhe gezogen zu werden. *(4.0 Pkt.)*

Nimm vereinfachend an, dass die Umgebungstemperatur sich nicht mit der Höhe ändert und dass der Luftdruck bei einer Höhenänderung von 100 m jeweils um 1,2 % abnimmt.

9.b) Bestimme die Beschleunigung, mit der der Ballon direkt nach dem Loslassen aufsteigt. Berechne, welche Höhe der Ballon erreicht, wenn die Temperatur im Ballon konstant bleibt. *(6.0 Pkt.)*

Tatsächlich kühlt sich die Luft im Ballon langsam ab, wenn der Brenner nicht gezündet wird. Dadurch verringert sich der Auftrieb des Ballons mit einer konstanten Rate von 10 N s^{-1}.

9.c) Schätze ab, wie lange der Ballon seine Höhe durch regelmäßiges Zünden des Brenners maximal halten kann, wenn er einen Gasvorrat von insgesamt 80 kg Propangas mit sich führt, das einen Brennwert von 50 MJ kg^{-1} besitzt. *(5.0 Pkt.)*

Zur Berechnung kannst du die folgenden Angaben für Luft verwenden:

Dichte bei Temperatur 20 °C und Luftdruck $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa	$\rho_0 = 1{,}20\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck	$c_{\mathrm{Luft}} = 1{,}0\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$

Lösung

9.a) Rechnungen und Erläuterungen

Der Heißluftballon fliegt aufgrund der Auftriebskraft, die die heiße Luft im Inneren des Ballons in der kühleren Umgebung erfährt.

Bezeichne mit V_{B} das konstant angenommene Volumen der Luft im Ballon. Das Volumen der dünnen Ballonhülle und des gefüllten Korbes sind sehr viel kleiner und werden nicht mit berücksichtigt. Die Masse der Luft im Ballon wird im Folgenden mit m_{B} bezeichnet und die Masse von Ballonhülle und Korb mit m_{Last}.

Luft kann bei Normalbedingungen in guter Näherung als ein ideales Gas betrachtet werden. Für den Druck p, das Volumen V, die Stoffmenge n, die Masse m und die thermodynamische Temperatur T der Luft gilt daher näherungsweise die allgemeine Gasgleichung

$$p\,V = n\,R\,T = \frac{m}{M_{\mathrm{Luft}}}\,R\,T\,, \tag{9.1}$$

wobei $R \approx 8{,}314\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ die Gaskonstante und M_{Luft} die molare Masse der

Luft bezeichnen. Für die Dichte ρ der Luft ergibt sich daraus

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M_{\text{Luft}}}{R}\,\frac{p}{T} = \rho_0\,\frac{p}{p_0}\,\frac{T_0}{T}\,, \tag{9.2}$$

wobei $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5\,\text{Pa}$ den Atmosphärendruck und $T_0 = 20\,°\text{C} \approx 293\,\text{K}$ die Temperatur der Umgebungsluft bezeichnen.

Die Luft im Inneren des Ballons ist auf eine Temperatur $T_\text{B} = 100\,°\text{C} \approx 373\,\text{K}$ aufgeheizt. Aufgrund der Öffnung an der Ballonunterseite ist der Druck im Inneren aber gleich dem Atmosphärendruck p_0. Daher gilt für die Masse m_B der Luft im Ballon mit (9.2)

$$m_\text{B} = \rho_\text{B}\,V_\text{B} = \rho_0\,\frac{T_0}{T_\text{B}} \approx 3{,}5 \cdot 10^3\,\text{kg}\,. \tag{9.3}$$

Hierbei wurden ρ_B und $V_\text{B} = 3700\,\text{m}^3$ für die Dichte der Luft im Ballon und das Ballonvolumen verwendet. Im Ballon befinden sich also etwa 3,5 Tonnen Luft.

Die nach oben gerichtete Gesamtkraft F auf den Ballon ergibt sich nun als Differenz aus Auftriebskraft und der nach unten gerichteten Gewichtskraft auf den luftgefüllten Ballon. Die Auftriebskraft entspricht dabei der Gewichtskraft der verdrängten Umgebungsluft der Temperatur T_0 und Dichte ρ_0. Damit ergibt sich

$$\boxed{F = (\rho_0 - \rho_\text{B})\,V_\text{B}\,g - m_{\text{Last}}\,g = \left\{\rho_0\,V_\text{B}\left(1 - \frac{T_0}{T_\text{B}}\right) - m_{\text{Last}}\right\}\,g \approx 510\,\text{N}}\,. \tag{9.4}$$

Die resultierende Kraft, die den Ballon aufsteigen lässt, entspricht etwa der Gewichtskraft einer Masse von 52 kg. Die meisten Teilnehmenden sollten also gerade so in der Lage sein, den Ballon am Boden zu halten.

9.b) Rechnungen und Erläuterungen

Die Beschleunigung entspricht der insgesamt nach oben wirkenden Kraft auf den Ballon geteilt durch die zu beschleunigende Masse. Dabei ist zu berücksichtigen, dass nicht nur die Masse m_{Last} beschleunigt wird, sondern auch die Luft im Ballon. Die anfängliche Beschleunigung a des Ballons ergibt sich damit zu

$$\boxed{a = \frac{F}{m_\text{B} + m_{\text{Last}}} \approx 0{,}12\,\text{m}\,\text{s}^{-2}}\,. \tag{9.5}$$

Mit steigender Höhe verringert sich der Luftdruck außerhalb sowie innerhalb des Ballons und damit nach (9.2) die Dichte der Luft. Diese Dichte muss statt der Dichte ρ_0 in (9.4) verwendet werden, so dass sich auch die Kraft, die den Ballon zum Steigen bringt, verringert. In einer Höhe h ist die nach oben wirkende Kraft gleich Null. Diese Höhe erreicht der durch Luftreibung gebremste Ballon schließlich.

Der Luftdruck nimmt pro 100 m Höhenunterschied um etwa 1,2 % ab. in einer Höhe von $h_0 := 100\,\text{m}$ beträgt er also nur noch $p(100\,\text{m}) = 0{,}988\,p_0$ und in einer Höhe von 200 m nur noch $p(200\,\text{m}) = 0{,}988\,p(100\,\text{m}) = 0{,}988^2\,p_0$. Der implizierte exponentielle Zusammenhang[a] lässt sich für eine Höhe h formulieren als $p(h) = 0{,}988^{h/h_0}\,p_0$. Damit und mit Hilfe der Gleichungen (9.2) sowie (9.4) lässt sich das geforderte Kraftgleichgewicht formulieren als

$$m_{\text{Last}} = \rho_0\, V_{\text{B}}\, \frac{p}{p_0} \left(1 - \frac{T_0}{T_{\text{B}}}\right) = \rho_0\, V_{\text{B}} \cdot 0{,}988^{h/h_0} \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T_{\text{B}}}\right) . \tag{9.6}$$

Auflösen nach dem Exponentialausdruck und Logarithmieren liefert die gesuchte Aufstiegshöhe

$$\boxed{h = \frac{h_0}{\ln 0{,}988} \ln \left(\frac{m_{\text{Last}}}{\rho_0\, V_{\text{B}} \left(1 - \frac{T_0}{T_{\text{B}}}\right)}\right) \approx 470\,\text{m}} . \tag{9.7}$$

Der Luftdruck p in dieser Höhe entspricht etwa 94 % des Luftdruckes p_0 am Boden.

[a] Das Verwenden einer linearen Abhängigkeit des Luftdruckes von der Höhe ist in diesem Fall auch eine akzeptable Näherung, die zu einer Höhe von etwa 460 m führt.

9.c) Rechnungen und Erläuterungen

Pro Sekunde verliert der Ballon ohne Nachheizen $\Delta F = 10\,\text{N}$ an Auftriebskraft aufgrund der Abkühlung der Luft im Ballon. Dies entspricht einer Temperaturänderung ΔT der Luft im Ballon, die sich aus der Betrachtung der Differenz der Auftriebskräfte ergibt:

$$\Delta F = \frac{\rho_0\, p\, V_{\text{B}}\, T_0\, g}{p_0} \left(\frac{1}{T_{\text{B}} - \Delta T} - \frac{1}{T_{\text{B}}}\right) . \tag{9.8}$$

Daraus ergibt sich durch Umformen die Temperaturänderung pro Sekunde zu

$$\Delta T = T_{\text{B}} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta F\, p_0\, T_{\text{B}}}{\rho_0\, p\, V_{\text{B}}\, T_0\, g}}\right) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-4} \cdot T_{\text{B}} \approx 0{,}11\,\text{K} . \tag{9.9}$$

Dieser Temperaturverlust muss durch Heizen mit dem Brenner ausgeglichen werden. Unter der Annahme, dass das gesamte Propan verbrannt werden kann und dass die gesamte durch Verbrennung freigesetzte Energie zur Erwärmung der Luft im Ballon genutzt wird, lässt sich die Zeit t, die der Brennvorrat der Masse m_{Propan} zum Heizen langt, anhand der folgenden Energiebilanz abschätzen:

$$m_{\text{B}}\, c_{\text{Luft}}\, \frac{\Delta T}{\Delta t}\, t = m_{\text{Propan}}\, H_{\text{Propan}} . \tag{9.10}$$

Dabei ist $\Delta t = 1\,\text{s}$ und $H_{\text{Propan}} = 50\,\text{MJ}\,\text{kg}^{-1}$ bezeichnet den Brennwert des Propangases. Aus Gleichung (9.10) ergibt sich schließlich für die Zeit t, die der Ballon die Höhe halten kann

$$\boxed{t = \frac{m_{\text{Propan}}\, H_{\text{Propan}}}{m_{\text{B}}\, c_{\text{Luft}}\, \frac{\Delta T}{\Delta t}} \approx 9{,}9 \cdot 10^3\,\text{s} \approx 2{,}7\,\text{h}} . \tag{9.11}$$

Dieser Wert ist sicher zu optimistisch abgeschätzt, da nicht die gesamte Energie aus der Verbrennung in die Erwärmung der Luft des Ballons geht und das Propan aus den Flaschen auch nicht restlos verbraucht werden kann. Bei der Abschätzung wurde darüber hinaus vernachlässigt, dass die Last am Ballon durch das Verbrennen des Gases geringer wird. Dadurch verlängert sich die Zeit auf der anderen Seite ein wenig.

Bewertung - Hoch hinaus		**Punkte**
9.a)	Nutzen der Gasgleichung mit $p = p_0$	1
	Bestimmen eines Ausdrucks für die Dichte oder Masse der Luft im Ballon (9.3)	1
	Berechnen der resultierenden Kraft auf den Ballon (9.4) und abschätzen, ob der Ballon gehalten werden kann	2
9.b)	Berechnen der anfänglichen Beschleunigung (9.5)	1
	Ableiten des Luftdruckes in Abhängigkeit von der Höhe	1
	Verwenden eines Kräftegleichgewichtes	2
	Bestimmen der Aufstiegshöhe des Ballons (9.7)	2
9.c)	Bestimmen der Temperaturänderungsrate aus dem Auftriebsverlust (9.9)	2
	Aufstellen der Energiebilanz (9.10)	2
	Abschätzen der Zeit, die sich der Ballon auf der Höhe halten kann (9.11)	1
		15.0

Aufgabe 10 Annähern oder Abstoßen? (12 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Eugen Dizer)

Zwei Punktteilchen mit Massen m und M ($m < M$) sowie gleicher positiver Ladung q befinden sich, wie nebenstehend skizziert, anfänglich im Abstand r_0 in einem unendlich ausgedehnten, homogenen elektrischen Feld E.

Zu Beginn befinden sich beide Ladungen in Ruhe. Nimm an, dass sich die Teilchen im weiteren Verlauf nur entlang ihrer Verbindungslinie bewegen.

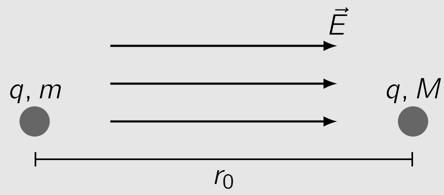


Abb. 10. *Ladungen im elektrischen Feld.*

10.a) Bestimme die relative Beschleunigung a der Teilchen in Abhängigkeit von ihrem Abstand r zueinander. Zeige, dass sich diese als Kraftgleichung in der Form

$$F = m' \, a = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{q\,q'}{r^2} - q\,E'$$

schreiben lässt und drücke die Größen m', q' sowie E' durch die gegebenen Größen aus. *(4.0 Pkt.)*

Die Kraftgleichung beschreibt die Bewegung eines effektiven Teilchens der Masse m' und der Ladung q in einem Potential $U(r)$, das durch die Ladung q' und das elektrische Feld E' hervorgerufen wird. Das Potential ist dabei die potentielle Energie des effektiven Teilchens geteilt durch dessen Ladung.

10.b) Skizziere den Verlauf des Potentials $U(r)$ in Abhängigkeit von dem Abstand r und gib an, bei welchem Abstand sich das Minimum des Potentials befindet. *(4.0 Pkt.)*

10.c) Bestimme den maximalen Abstand der Teilchen während ihrer Bewegung und drücke diesen durch die gegebenen Größen aus. *(4.0 Pkt.)*

Lösung

10.a) Rechnungen und Erläuterungen

Die Beschleunigung der zwei Teilchen ergibt sich aus dem 2. Newtonschen Gesetz zu

$$a_m = -k\frac{q^2}{m\,r^2} + \frac{q\,E}{m}\,, \qquad a_M = k\frac{q^2}{M\,r^2} + \frac{q\,E}{M} \tag{10.1}$$

wobei r der Abstand zwischen den zwei Punktteilchen ist und $k := 1/(4\,\pi\,\varepsilon_0)$. Die Achse wurde dabei so gewählt, dass das E-Feld in positive Koordinatenrichtung zeigt.

Die relative Beschleunigung der Teilchen, also die zeitliche Änderung der zeitlichen Änderung des Abstandes der Teilchen, ist damit

$$\boxed{a = a_M - a_m = k\,\frac{q^2}{r^2}\frac{M+m}{M\,m} - q\,E\,\frac{M-m}{M\,m}}\,. \tag{10.2}$$

Dies lässt sich umschreiben zu der Kraftgleichung

$$\frac{M\,m}{M+m}\,a = k\,\frac{q^2}{r^2} - q\,E\,\frac{M-m}{M+m}\,. \tag{10.3}$$

Für die gesuchten effektiven Größen ergibt sich daher

$$\boxed{m' = \frac{M\,m}{M+m}} \qquad \boxed{q' = q} \qquad \boxed{E' = E\,\frac{M-m}{M+m}}. \tag{10.4}$$

Gleichung (10.3) beschreibt die Bewegung eines effektiven Teilchens der Ladung q und Masse m', das sich von einer ruhenden Ladung q in einem elektrischen Feld E' entfernen will.

10.b) Rechnungen und Erläuterungen

Das Potential für die Dynamik des effektiven Teilchens setzt sich zusammen aus dem Potential einer Punkladung q und dem Potential im homogenen elektrischen Feld E':

$$U(r) = k\frac{q}{r} + E'\,r. \tag{10.5}$$

Eine Skizze des Potentials ist in der folgenden Abbildung 11 dargestellt.

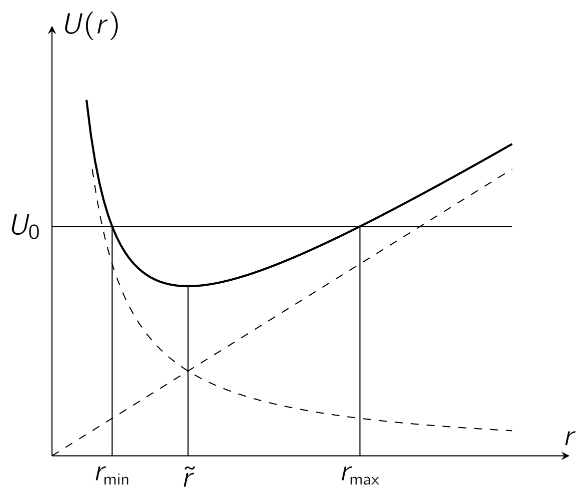


Abb. 11. *Effektives Potential $U(r)$*

Das Minimum des Potentials befindet sich dort, wo die Kraft auf das effektive Teilchen gleich Null. Das ist dort, wo der lineare Teil gerade gleich groß wie der $(1/r)$-abfallende Teil ist, also bei

$$\boxed{\tilde{r} = \sqrt{\frac{k\,q}{E'}} = \sqrt{\frac{k\,q}{E}\,\frac{M+m}{M-m}}} \quad \text{mit} \quad U(\tilde{r}) = 2\sqrt{k\,q\,E'}\,. \tag{10.6}$$

10.c) Rechnungen und Erläuterungen

Aus der Skizze des effektiven Potentials $U(r)$ ist ersichtlich, dass sich die Bewegung des effektiven Teilchens für einen gegebenen Wert von r_0 und damit eine gegebene Energie $U_0\,q$ größer $U(\tilde{r})\,q$ in dem Bereich zwischen r_{min} und r_{max} abspielt. r_{min} und r_{max} sind dabei die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$U_0\,q = k\,\frac{q^2}{r} + q\,E'\,r \qquad \text{bzw.} \qquad r^2 - \frac{U_0}{E'}\,r + \frac{k\,q}{E'} = 0\,. \tag{10.7}$$

Der anfängliche Abstand r_0 ist eine der Lösungen dieser Gleichung. Die zweite Lösung ist $\tilde{r}^2/r_0$.

Damit ergeben sich für den maximalen Abstand zwei Fälle:

- Ist der anfängliche Abstand r_0 kleiner als $\tilde{r}$, so wird sich der Abstand bis zum maximalen Wert $\tilde{r}^2/r_0$ vergrößern und dann wieder kleiner werden.
- Ist der anfängliche Abstand r_0 größer als oder gleich $\tilde{r}$, so ist dies auch der maximale Abstand und der Abstand verringert sich danach wieder.

Zusammengefasst lässt gilt für den maximalen Abstand der Teilchen mit $\tilde{r} = \sqrt{\frac{k\,q}{E}\,\frac{M+m}{M-m}}$

$$\boxed{r_{\text{max}} = \begin{cases} \tilde{r}^2/r_0 & \text{wenn } r_0 < \tilde{r}; \\ r_0 & \text{wenn } r_0 \geq \tilde{r}. \end{cases}} \quad . \tag{10.8}$$

Bewertung - Annähern oder Abstoßen?		Punkte
10.a)	Bestimmen der relativen Beschleunigung (10.2)	2
	Umstellen zu einer Kraftgleichung (10.3)	1
	Angeben der effektiven Größen m', q', E' (10.4)	1
10.b)	Angeben des Potentials (10.5)	1
	Skizzieren des Verlaufs des Potentials (Asymptotik, erkennbares Minimum)	2
	Bestimmen der Position des Minimums des Potentials (aus Potential oder Kraft)	1
10.c)	Angeben der quadratischen Gleichung zur Bestimmung des minimalen und maximalen Abstandes (10.7)	1
	Nutzen der Anfangsbedingung r_0 bzw. U_0	1
	Angabe des maximalen Abstandes mit Fallunterscheidung (10.8)	2
		12.0