Auswahlwettbewerb zur Internationalen PhysikOlympiade

Lernblatt - Lösungsstrategien für Schwingungsaufgaben

Fabian Bühler / CC BY 4.0 / ipho@ipho.info

1 Einleitung

Schwingungen sind in der Natur und damit auch in der Physik allgegenwärtig. Bei deren Untersuchung ist es in vielen Fällen ausreichend, sich auf die einfachste Form von Schwingungen zu beschränken. Das sind ungedämpfte Schwingungen mit einer linearen Rückstellkraft, so genannte *harmonische Schwingungen*.

Im Folgenden werden an einem Beispiel unterschiedliche Lösungsstrategien vorgestellt, die bei Schwingungsproblemen angewandt werden können.

2 Beispielproblem

Ein masseloses Seil ist an einem Ende an der Decke befestigt, das andere Ende an einer Feder mit der Federkonstanten D, die ebenfalls an der Decke befestigt ist. Im Seil liegt ein Zylinder der Masse m mit dem Radius r. Zwischen Seil und Zylinder gibt es keinen Schlupf, das Seil rutscht also nicht über den Zylinder. Wird die Feder gedehnt und dann losgelassen, führt der Zylinderschwerpunkt eine vertikale harmonische Schwingung aus.

Aufgabe: Bestimme die Schwingungsdauer des Zylinderschwerpunkts.

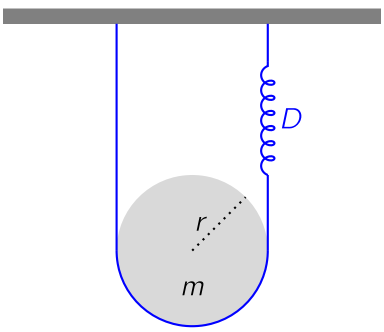

Abb. 1: *Skizze für die Aufgabe zu Schwingungen.*

3 Lösung und Lösungsstrategien

3.1 Die Differentialgleichung

Bei einer harmonischen Schwingung erfüllt die Auslenkung oder Elongation $y(t)$ eine Differentialgleichung der Form:

$$\boxed{\ddot{y}(t) = -k \cdot y(t)}$$

mit einer positiven Konstanten k. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$y(t) = y_{\text{max}} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

mit $\omega = \sqrt{k}$ und Konstanten y_{max} sowie φ_0, deren Werte durch die anfängliche Auslenkung und deren Änderungsrate festgelegt werden.

Daraus folgt für die Schwingungsdauer:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}}}\,.$$

In vielen Aufgaben wird lediglich nach der Schwingungsdauer gefragt. Dafür wird nur die Konstante k aus der Differentialgleichung benötigt, d.h. die Aufgabe ist gelöst, sobald man die Differentialgleichung bestimmt hat. In der Regel wird nicht verlangt, dass das Lösen der Differentialgleichung explizit vorgerechnet wird.

Hier erhält man (z.B. mit einer der unten beschriebenen Methoden) die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) = -\frac{8D}{3m} \cdot y(t)\,.$$

Die gesuchte Schwingungsdauer ist daher:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8D}}\,.$$

3.2 Direkte Methode: Betrachtung der Kräfte

Es wird ein Term für die Rückstellkraft in Abhängigkeit der Auslenkung bestimmt, woraus sich der Proportionalitätsfaktor k ergibt.

Wie beim Federpendel kann man die Gewichtskraft unberücksichtigt lassen, wenn man die Auslenkungen relativ zur Gleichgewichtslage betrachtet. Bewegt sich der Schwerpunkt des Zylinders um ein Wegstück y, rotiert der Zylinder um den Winkel $\varphi = \frac{y}{r}$, und die Feder wird um die Strecke $2y$ gestaucht oder gespannt. Auf der rechten Seite wirkt daher eine Kraft $F_r = -2D \cdot y$ auf den Zylinder in y-Richtung, auf der linken Seite eine noch unbekannte Kraft F_ℓ.

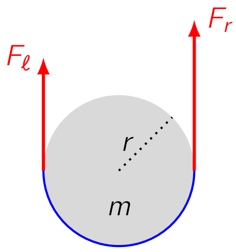

Abb. 2: *Kräfte vom Seil auf den Zylinder.*

Die Gesamtkraft ist damit $F = F_r + F_\ell = -2Dy + F_\ell$. Daraus erhält man für die Beschleunigung des Schwerpunkts:

$$\ddot{y} = \frac{F}{m} = \frac{-2Dy + F_\ell}{m} \,. \tag{3.1}$$

Bezogen auf den Schwerpunkt ergibt sich durch die beiden Kräfte ein Drehmoment $M = (F_r - F_\ell)r$. Dieses Drehmoment bewirkt eine Winkelbeschleunigung von

$$\ddot{\varphi} = \frac{M}{J} = \frac{M}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{2(-2Dy - F_\ell)}{mr} \,. \tag{3.2}$$

Dabei ist $J = \frac{1}{2}mr^2$ das Trägheitsmoment eines Vollzylinders bezogen auf seinen Schwerpunkt.

Aus dem Zusammenhang $\varphi = \frac{y}{r}$ folgt $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{y}}{r}$. Mit (3.1) und (3.2) ergibt sich:

$$\frac{2(-2Dy - F_\ell)}{mr} = \frac{-2Dy + F_\ell}{mr} \,.$$

Damit lässt sich F_ℓ bestimmen:

$$F_\ell = -\frac{2}{3}Dy \,.$$

Die gesuchte Differentialgleichung ergibt sich damit aus (3.1) zu:

$$\ddot{y} = -\frac{8D}{3m}y \,.$$

3.3 Variante der direkten Methode: geschickte Wahl des Koordinatensystems

Eine geschickte Wahl des Koordinatensystem oder eine bestimmte Betrachtungsweise kann das Problem vereinfachen.

Im Beispielproblem kann in jedem Augenblick die Bewegung des Zylinders auch als reine Rotation um den Kontaktpunkt A des linken Seilstücks betrachtet werden. Bezieht man sich auf diesen Punkt, genügt es daher, allein die Drehmomente zu betrachten.

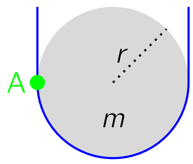

Abb. 3: *Bezugspunkt für Drehmomente.*

F_ℓ greift im Bezugspunkt an und erzeugt daher kein Drehmoment. $F_r = -2Dy$ greift im Abstand $2r$ zum Bezugspunkt an, das zugehörige Drehmoment ist also $M = -4Dry$. Dieses Drehmoment bewirkt eine Winkelbeschleunigung von

$$\ddot{\varphi} = \frac{M}{J} = \frac{M}{\frac{3}{2}mr^2} = \frac{-8Dy}{3mr} \,. \tag{3.3}$$

Dabei ist J das Trägheitsmoment eines Vollzylinders bezogen auf den Randpunkt A, das aus dem Trägheitsmoment des Schwerpunkts mit Hilfe des Satzes von Steiner berechnet werden kann.

Mit $\ddot{y} = \ddot{\varphi} \cdot r$ erhält man aus (3.3) die gesuchte Differentialgleichung:

$$\ddot{y} = -\frac{8D}{3m}y \,.$$

3.4 Energiemethode

Aus der Konstanz der Gesamtenergie in der Form

$$E_{\text{kin}}+E_{\text{pot}} = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\text{kin}}+E_{\text{pot}}) = 0 \tag{3.4}$$

ergibt sich die Schwingungsdifferentialgleichung.

Dabei versteht man unter potentieller Energie alle beim Schwingungsvorgang beteiligten Energieformen außer der kinetischen Energie. Bei komplexeren Problemen ist die Energiemethode oft deutlich einfacher, da die Energie im Gegensatz zu Kräften oder Drehmomenten eine skalare Größe ist.

Im Beispielproblem setzt sich die kinetische Energie aus einem Translationsanteil und einem Rotationsanteil zusammen, hier bezogen auf den Schwerpunkt[1]:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 .$$

Mit $J = \frac{1}{2}mr^2$ und $\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{r}$ erhält man:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}m\dot{y}^2 = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 . \tag{3.5}$$

Die potentielle Energie ist hier die Spannenergie der Feder:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}D(2y)^2 = 2Dy^2 . \tag{3.6}$$

Unter Verwendung von (3.4), (3.5) und (3.6) erhält man die gesuchte Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3}{4}m\dot{y}^2 + 2Dy^2\right) = \frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y} + 4Dy\dot{y} = 0 .$$

Ausklammern von $\dot{y}$ ergibt die Bedingung:

$$\ddot{y} = -\frac{8D}{3m}y .$$

3.5 Gleichsetzen der Maximalenergien

Ist bekannt, dass es sich um eine harmonische Schwingung handelt, lässt sich die Schwingungsdauer T mit folgendem Ansatz bestimmen:

$$E_{\text{kin,max}} = E_{\text{pot,max}} .$$

Diese Methode ist im Vergleich zu den oben dargestellten Varianten weniger aussagekräftig. Man muss bereits wissen, dass es sich um eine harmonische Schwingung handelt.

Im Beispielproblem gilt mit (3.5)

$$E_{\text{kin,max}} = \frac{1}{2}m\dot{y}_{\text{max}}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}_{\text{max}}^2 = \frac{3}{4}m\dot{y}_{\text{max}}^2 \tag{3.7}$$

und mit (3.6)

$$E_{\text{pot,max}} = 2Dy_{\text{max}}^2 . \tag{3.8}$$

Aus dem harmonischen Verlauf der Auslenkung $y(t) = y_{\text{max}}\sin(\omega t + \varphi_0)$ folgt durch Ableiten $\dot{y}(t) = y_{\text{max}}\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$ und damit:

$$\dot{y}_{\text{max}} = y_{\text{max}}\omega .$$

Daraus ergibt sich mit (3.7) und (3.8):

$$\frac{3}{4}m\dot{y}_{\text{max}}^2 = 2Dy_{\text{max}}^2 \;\Rightarrow\; \frac{3}{4}m\omega^2 y_{\text{max}}^2 = 2Dy_{\text{max}}^2 .$$

Somit erhält man:

$$\omega = \sqrt{\frac{8D}{3m}} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8D}} .$$

[1] Wie oben ist es auch hier möglich, die Bewegung als reine Rotationsbewegung um den Punkt A zu beschreiben.