

51. Internationale PhysikOlympiade Vilnius, Litauen 2021



Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen Dürken Quaas
Tel.: 0431 / 880 - 5120 Tel.: 0431 / 880 - 5387
email: petersen@ipho.info email: quaas@ipho.info

Anschrift: IPN · Leibniz-Institut für die Pädagogik der
Naturwissenschaften und Mathematik
Olshausenstraße 62
24118 Kiel

web: www.ipho.info
twitter: @iphogermany

Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 51. IPhO 2021

Hinweise

Die 2. Runde des Auswahlwettbewerbs zur Internationalen PhysikOlympiade 2021 wurde als Klausur-
runde an den Schulen der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler durchgeführt. Neben Hinweisen zur
Klausur sind nachfolgend die Aufgaben mit einem Lösungsvorschlag zu finden.

Die Korrektur der Klausur der 2. Runde erfolgt auf Grundlage dieser Musterlösung. Gemäß den Gepflogenheiten bei der Internationalen PhysikOlympiade wird dabei primär die Richtigkeit der Lösung bewertet und weniger die Sauberkeit der Ausarbeitung oder der sprachliche Ausdruck.

Im Korrekturprozess kann noch eine Anpassung der Bewertungsvorschläge notwendig werden.

Bei den Multiple-Choice Aufgaben werden alleine für die richtigen Antwortbuchstaben bereits jeweils 2 Punkte vergeben. Die in den Bewertungstabellen darüber hinaus angegebenen Punktzahlen beziehen sich jeweils auf den von uns ausgearbeiteten Lösungsweg. Bei anderen Lösungswegen wird die Bewertung sinngemäß abgeändert, wobei die Gesamtpunktzahl pro Aufgabenteil beibehalten wird. Folgefehler werden in der Regel nicht bestraft. Die Verwendung eines falschen Zwischenergebnisses sollte, sofern sich dadurch keine starke Vereinfachung des Problems ergibt, also bei folgenden Fragen nicht zu Punktabzug führen. Dies bedeutet insbesondere, dass ein numerisches Ergebnis auch dann als korrekt gewertet wird, wenn vorher eine falsche Formel abgeleitet, aber korrekt mit dieser Formel weitergerechnet wurde. Wenn bei einem Ergebnis jedoch die resultierende Einheit falsch ist, führt dies in jedem Fall zu Punktabzug.

Bei Fragen oder Anmerkungen freuen wir uns über eine Nachricht an ipho@ipho.info.

Regeln und Hinweise zur Klausur für Schülerinnen und Schüler

Dieses Blatt mit Regeln und Hinweisen zur Klausur sowie einer Liste von Naturkonstanten und gebräuchlichen Größen kannst du in der Klausur der 2. Runde verwenden.

- Der **Termin für die Klausur** ist bundesweit einheitlich Dienstag, der 10. November 2020. In dringenden Fällen kann deine Lehrkraft den Termin um ein bis zwei Tage verschieben.
- Die **Bearbeitungszeit** für die Klausur beträgt 180 Minuten.
- Die Klausur ist **ohne fremde Hilfe und in Einzelarbeit** unter Aufsicht einer Lehrkraft zu bearbeiten.
- Zulässige **Hilfsmittel** sind Schreib- und Zeichenmaterialien, die auf der folgenden Seite abgedruckte Liste von Naturkonstanten sowie ein nicht graphikfähiger Taschenrechner. Zusätzlich kannst du ein DIN-A4-Blatt mit deinen Lieblingsformeln mit in die Klausur nehmen (ein- oder doppelseitig per Hand oder mit Drucker beschrieben). Darüber hinaus darfst du keine Aufzeichnungen oder Formelsammlungen in der Klausur verwenden.
- Du erhältst die Klausuraufgaben in einem verschlossenen und mit deinem Namen versehenen **Umschlag**. Öffne diesen erst, wenn die betreuende Lehrkraft das Signal zum Start der Klausur gibt.
- Insgesamt können in der Klausur **80 Punkte** erreicht werden. Zu jeder Aufgabe ist die erreichbare Punktzahl in der Überschrift angegeben, bei Teilaufgaben direkt bei den Teilaufgaben.
- Du kannst dir die **Reihenfolge** für die Bearbeitung der Aufgaben frei aussuchen und dir auch die Zeit frei einteilen. Es kann vorteilhaft sein, sich zunächst mit Aufgaben zu befassen, die du gut lösen kannst, und sich nicht zu sehr in einer Aufgabe zu verbeißen.
- Im ersten Teil der Klausur sind **7 Multiple-Choice Aufgaben** zu lösen, bei denen jeweils vier Antwortalternativen zur Wahl stehen, von denen genau eine richtig ist. Für jede korrekte Antwortwahl erhältst du 2 Punkte. Wenn keine, eine falsche oder mehr als eine Antwortoption angegeben ist, werden dafür Null Punkte vergeben. Zu deiner Antwortwahl wird außerdem eine physikalische Begründung erwartet. Einige Aufgaben erfordern dafür auch eine Rechnung. Für jede passende physikalische Begründung werden 3 Punkte vergeben. Für diesen Teil sind 60-80 Minuten eingeplant.
- Im zweiten Teil sind **längere theoretische Aufgaben** zu bearbeiten. Für diesen Teil sind 100-120 Minuten vorgesehen.
- Trage deine **Aufgabenbearbeitung in die entsprechenden Boxen** ein. Falls der Platz nicht ausreicht oder du einen weiteren Graphen zeichnen möchtest, findest du am Ende der Klausur **zusätzliches Arbeitspapier**. Kennzeichne unbedingt die Aufgabe, zu der die jeweiligen Aufzeichnungen gehören.
- Die Klausurblätter und das zusätzliche Arbeitspapier sind im oberen Teil mit deinem **Schülerinnen- bzw. Schülercode** versehen. Verwende nur diese Blätter zur Bearbeitung der Klausur und lege alle Blätter am Ende wieder in deinen Umschlag.
- Die Aufgaben sind so konzipiert, dass es schwer sein dürfte, alle Aufgaben vollständig zu lösen. **Verliere also nicht den Mut, wenn du nicht alles schaffst oder mal keine Idee zur Lösung hast!**
- Da die Klausuren an einigen Schulen wenige Tage später geschrieben werden, darfst du **keine Informationen zu den Klausuraufgaben** vor dem 19. November an andere Teilnehmende weitergeben.

Das Team der PhysikOlympiade in Deutschland wünscht dir viel Erfolg!

Naturkonstanten und gebräuchliche Größen

In den Aufgaben können die folgenden physikalischen Größen verwendet werden. Die Angaben können jeweils bis zur angegebenen Stelle als exakt angenommen werden.

Konstante	gebräuchliche Formelzeichen	Wert
Absoluter Nullpunkt	T_0	$0\text{ K} = -273,15\text{ °C}$
Atomare Masseneinheit	u	$1,660\,539 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6,022\,141 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1,380\,649 \cdot 10^{-23}\text{ J K}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12}\text{ A s V}^{-1}\text{ m}^{-1}$
Elektronenvolt	eV	$1\text{ eV} = 1,602\,177 \cdot 10^{-19}\text{ J}$
Elementarladung	e	$1,602\,177 \cdot 10^{-19}\text{ A s}$
Fallbeschleunigung auf der Erde	g	$9,806\,65\text{ m s}^{-2}$
Gravitationskonstante	γ, G	$6,674 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c_0	$2,997\,924\,58 \cdot 10^8\text{ m s}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$1,256\,637\,061 \cdot 10^{-6}\text{ V s A}^{-1}\text{ m}^{-1}$
Normdruck, Atmosphärendruck	p_n	$101\,325\text{ N m}^{-2}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6,626\,070 \cdot 10^{-34}\text{ J s}$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9,109\,384 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1,674\,927 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	$1,672\,622 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$1,097\,373\,157 \cdot 10^7\text{ m}^{-1}$
Schallgeschwindigkeit in Luft	c_{Luft}	343 m s^{-1} (bei 20 °C und Normdruck)
Stefan-Boltzmann-Konstante	α, σ	$5,6704 \cdot 10^{-8}\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-4}$
Universelle Gaskonstante	R	$8,314\,46\text{ J K}^{-1}\text{ mol}^{-1}$

Multiple-Choice Aufgaben

Finde zu jeder der folgenden sieben Fragen den richtigen Lösungsbuchstaben und begründe physikalisch, warum dies die korrekte Lösung ist. Es ist jeweils nur eine Antwortmöglichkeit richtig. Nutze den Platz in der Box für Rechnungen sowie Begründungen und notiere deinen Antwortbuchstaben an der vorgesehenen Stelle am Ende jeder Box.

Aufgabe 1 Temperatureinheiten (MC-Aufgabe)

(5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade, Stefan Petersen)

Die fiktive Temperatureinheit Nups ist durch Festlegung von $0\text{ K} = 1000\text{ Nups}$, $0^\circ\text{C} = 400\text{ Nups}$ und eine lineare Änderung mit der Temperatur festgelegt.

Welcher Temperatur in $^\circ\text{C}$ entspricht am ehesten 0 Nups?

- A 120°C
- B 150°C
- C 180°C
- D 210°C

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Temperatur 0 Nups ist von 400 Nups $\frac{2}{3}$ so weit weg wie 400 Nups von 1000 Nups. Aufgrund der linearen Änderung mit der Temperatur ist damit die Temperaturdifferenz von 400 Nups zu 0 Nups gleich $\frac{2}{3}$ der Temperaturdifferenz zwischen 0 K und $0^\circ\text{C} \approx 273\text{ K}$. Die Temperatur 0 Nups entspricht also ungefähr

$$0^\circ\text{C} + \frac{2}{3} 273^\circ\text{C} \approx 180^\circ\text{C} \quad (1.1)$$

Korrekte Antwort: **C**

Bewertung - Temperatureinheiten (MC-Aufgabe)		Punkte
1	Nutzen der linearen Abnahme der Temperatur in Nups	1.0
	Angeben der Parameter für Einheitenumrechnung (Wert für feste Temperatur + Steigung)	2.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

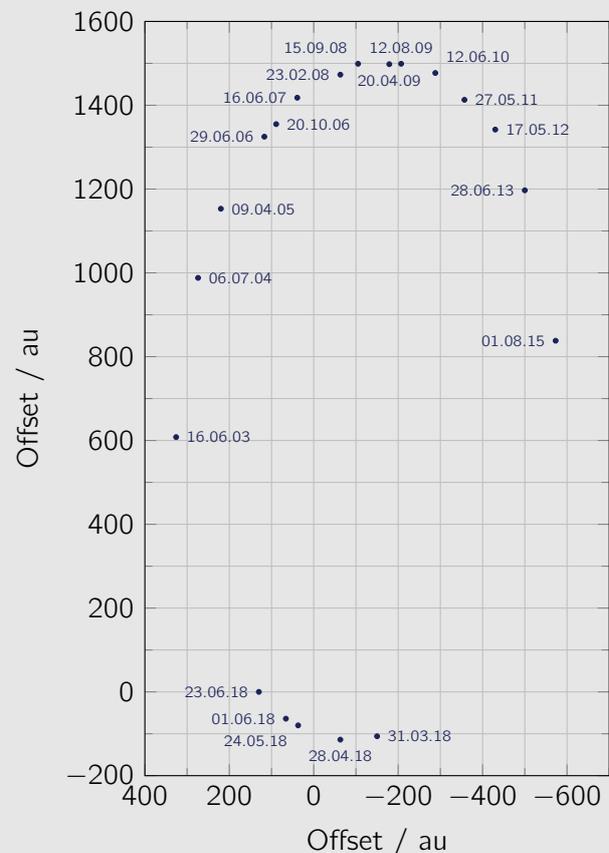
Aufgabe 2 Schwarzes Loch in der Milchstraße (MC-Aufgabe)
(5 Pkt.)
(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade, Stefan Petersen)

Der Physiknobelpreis 2020 wurde für die Entdeckung eines sehr massereichen, kompakten Objektes im Zentrum unserer Galaxie, der Milchstraße, vergeben. Vieles deutet darauf hin, dass es sich bei diesem Objekt um ein schwarzes Loch handelt. Die nebenstehende Abbildung zeigt die zu verschiedenen Daten beobachtete Position eines Sternes relativ zur vermuteten Position des Zentrums der Milchstraße. Die Position ist in Vielfachen des Abstandes Sonne-Erde, also in astronomischen Einheiten mit $1 \text{ au} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$, angegeben. Der Stern befindet sich also auf galaktischen Längenmaßstäben in der Nähe des Zentrums der Milchstraße. Nimm vereinfachend an, dass die Bahn des Sterns in der Zeichenebene verläuft und dass die Bahn nicht durch relativistische Effekte beeinflusst wird.

Welche Masse lässt sich aus den Daten für das im Zentrum der Milchstraße vermutete schwarze Loch als Vielfaches der Sonnenmasse mit $M_{\text{Sonne}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ abschätzen?

Die Masse des schwarzen Loches entspricht am ehesten ...

- A ... $1 \cdot 10^5$ Sonnenmassen.
- B ... $2 \cdot 10^6$ Sonnenmassen.
- C ... $4 \cdot 10^7$ Sonnenmassen.
- D ... $8 \cdot 10^8$ Sonnenmassen.



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Es wird angenommen, dass die Bewegung des Sternes im Wesentlichen durch die von dem schwarzen Loch verursachten Gravitationskraft auf den Stern bestimmt wird. Dann muss sich der Stern auf einer Ellipsenbahn um das schwarze Loch, also um das Zentrum der Milchstraße bewegen. Dies trifft auch näherungsweise zu, wie die nebenstehende eingezeichnete Ellipse verdeutlicht.

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz ist das Quadrat der Umlaufzeiten um das schwarze Loch proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse der Bahnen. Dies gilt auch für Kreisbahnen. Für eine Kreisbahn mit Radius a und Umlaufzeit T muss die Zentripetalkraft durch die Gravitationskraft gegeben sein. Daher gilt

$$\frac{4\pi^2}{T^2} a = G \frac{M}{a^2} \quad \text{bzw.} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3, \quad (2.1)$$

wobei G die Gravitationskonstante bezeichnet und M die Masse des schwarzen Loches ist. Damit ist die Proportionalitätskonstante in dem Keplerschen Gesetz durch bekannte Größen und die gesuchte Masse ausgedrückt.

Für den beobachteten Stern lassen sich große Halbachse und die Umlaufzeit bestimmen zu $a \approx 800 \text{ au} \approx 1,2 \cdot 10^{14} \text{ m}$ sowie $T \approx 18 \text{ yr} \approx 5,7 \cdot 10^8 \text{ s}$.

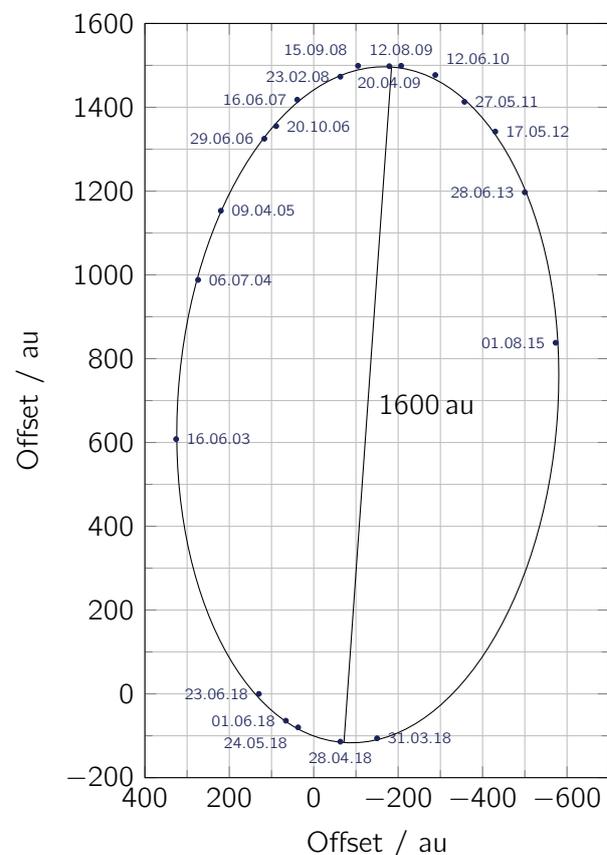
Damit lässt sich die Masse des zentralen schwarzen Loches abschätzen zu

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \approx 3,1 \cdot 10^{36} \text{ kg} \approx 1,6 \cdot 10^6 M_{\text{Sonne}}. \quad (2.2)$$

Die Masse des schwarzen Loches entspricht damit am ehesten $2 \cdot 10^6$ Sonnenmassen.

Korrekte Antwort: **B**

Hinweis: Eine aktuelle Abschätzung der Masse des zentralen Loches liegt etwas oberhalb von $4 \cdot 10^6$ Sonnenmassen (s. z. B. S. Gillessen et al (2017). ApJ 837 30.). Die verwendeten Daten sind entnommen aus M. Parsa et al (2017). ApJ 845 22 sowie Daten von www.eso.org und gehören zu Beobachtungen des Sterns S2, dessen Bahnebene nicht genau senkrecht zur Beobachtungslinie liegt. Eine genauere Untersuchung der Bahn würde auch die Berücksichtigung relativistischer Effekte notwendig machen.



Bewertung - Schwarzes Loch in der Milchstraße (MC-Aufgabe)		Punkte
2	Angeben des dritten Keplerschen Gesetzes	1.0
	Bestimmen der großen Halbachse aus Abbildung	1.0
	Bestimmen der Umlaufdauer aus Abbildung	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 3 Zwei Platten im Vakuum (MC-Aufgabe)

(5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade, Eugen Dizer)

Zwei leitfähige, parallele Platten mit Fläche A befinden sich im Abstand d im Vakuum. Aufgrund des quantenmechanischen Casimir-Effektes wirkt eine Kraft zwischen den Platten, die von der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum und dem reduzierten Planckschen Wirkungsquantum $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ abhängt.

Welcher der folgenden Ausdrücke könnte einen passenden Ausdruck für die Kraft F darstellen, mit welcher die Platten zusammengedrückt werden?

A $F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^3} A$

B $F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^3} A^2$

C $F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} A$

D $F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} A^2$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Für eine korrekte Formel müssen beide Seiten der Gleichung die gleiche physikalische Dimension und damit auch die gleichen SI-Einheiten besitzen. Die Kraft F wird in Newton, also in der Einheit kg m s^{-2} angegeben. Dies wird typischerweise durch $[F] = \text{kg m s}^{-2}$ ausgedrückt. Die auf der rechten Seite der Gleichung vorkommenden physikalischen Größen besitzen die folgenden SI-Einheiten:

$$[d] = \text{m}, \quad [A] = \text{m}^2, \quad [c] = \text{m s}^{-1}, \quad [\hbar] = \text{J s} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}. \quad (3.1)$$

Ein als korrekt in Frage kommender Ausdruck für F lässt sich nun mit Hilfe eines Dimensionsvergleiches bestimmen. Die Größen c und \hbar sind in allen vier Antwortmöglichkeiten mit gleichen Exponenten vorhanden. Bezeichne mit α und β die Exponenten, mit der die Größen d und A auf der rechten Seite vorkommen. Dann gilt

$$[d^\alpha A^\beta c \hbar] = \text{kg m}^{\alpha+2\beta+3} \text{s}^{-2} \stackrel{!}{=} \text{kg m s}^{-2} = [F]. \quad (3.2)$$

Durch Vergleichen des Exponenten für die Masseneinheit in Gleichung (3.2) ergibt sich, dass $\alpha = -2 - 2\beta$ sein muss. Dies ist nur in der Gleichung C mit $\alpha = -4$ und $\beta = 1$ der Fall. Damit kann nur die vorletzte Formel die Kraft F richtig beschreiben.

Korrekte Antwort: C

Bewertung - Zwei Platten im Vakuum (MC-Aufgabe)		Punkte
3	Anwenden eines Dimensionsvergleiches	1.0
	Angeben der physikalischen Dimensionen der auftretenden Größen	1.0
	Bestimmen der korrekten Exponenten in der Kraftformel	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 4 Zwei Sender (MC-Aufgabe)

(5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade, Thomas Heller!)

Zwei identische, senkrecht zur Zeichenebene ausgerichtete, elektrische Sendedipole strahlen von den Punkten S_1 und S_2 aus gleichphasig mit der Frequenz f in den Raum. Ein Empfänger E wird von S_2 ausgehend auf einem Kreis um S_1 verschoben. Die im Empfänger gemessene Intensität in Abhängigkeit von dem Winkel α ist im Diagramm dargestellt und zeigt deutliche Maxima und Minima. Kommt der Empfänger dem Sender S_2 zu nahe, so übersteuert dieser, sodass keine Messung möglich ist.

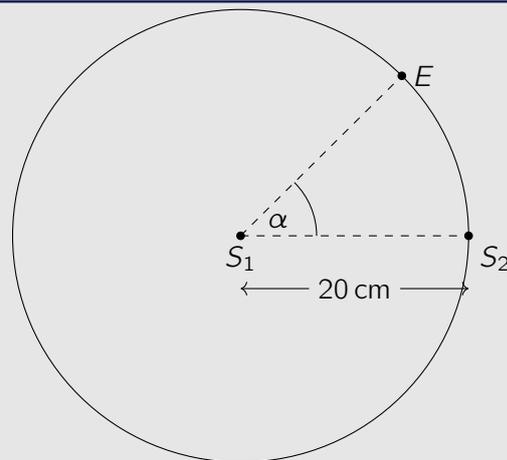


Abb. 1. Sender und Empfänger.

Wie groß ist die Frequenz f der Strahlung?

- A 1,5 GHz
- B 3,0 GHz
- C 4,5 GHz
- D 6,0 GHz

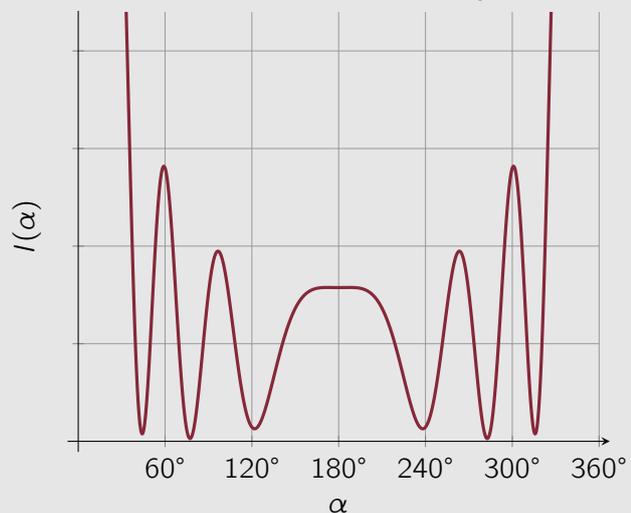


Abb. 2. Intensitätsverteilung in relativen Einheiten.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Bei etwa $\alpha = 60^\circ$ findet man aus Symmetriegründen das Maximum 0. Ordnung. Verschiebt man nun den Empfänger weiter in Richtung $\alpha = 180^\circ$, so findet man zwei weitere Maxima. Exakt bei 180° liegt das Maximum 2. Ordnung, wofür ein Gangunterschied der zwei Teilwellen von $\Delta s = 2 \cdot \lambda$

verantwortlich ist. Es gilt deshalb $\lambda = 10 \text{ cm}$. Für die Frequenz folgt:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{0,1 \text{ m}} = 3 \text{ GHz} . \quad (4.1)$$

Korrekte Antwort: **B**

Bewertung - Zwei Sender (MC-Aufgabe)		Punkte
4	Auffinden des Maximums 0. Ordnung	1.0
	Erkennen, dass bei 180° das Maximum 2. Ordnung liegt.	1.0
	Bestimmen von λ	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 5 Geladener Staub (MC-Aufgabe)

(5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade, Stefan Petersen)

Sechs identische, anfänglich ruhende Staubteilchen mit Masse $m = 2,0 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$ und Ladung $q = 2,0 \cdot 10^{-12} \text{ C}$ werden, wie nebenstehend skizziert, im Vakuum in einem regelmäßigen Sechseck der Kantenlänge $a = 10 \mu\text{m}$ angeordnet. Im Mittelpunkt des Sechsecks befindet sich ein ebenfalls anfänglich ruhendes siebtes Staubteilchen mit gleicher Masse m aber entgegengesetzter Ladung $-q$. Nun werden die Teilchen losgelassen.

Wie groß ist die Geschwindigkeit eines der positiv geladenen Staubteilchen relativ zum negativ geladenen Staubteilchen nachdem sich die Teilchen weit voneinander entfernt haben?

- A etwa $5,5 \text{ m s}^{-1}$
- B etwa $6,0 \text{ m s}^{-1}$
- C etwa $9,8 \text{ m s}^{-1}$
- D etwa 13 m s^{-1}

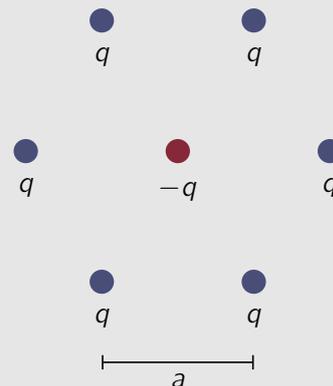


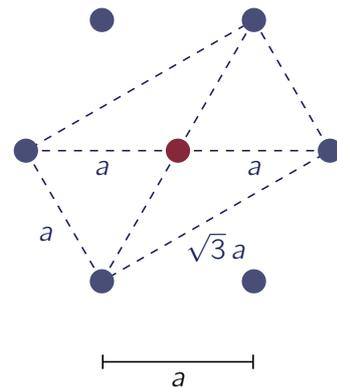
Abb. 3. Skizze der Anordnung. Die äußeren Teilchen besitzen jeweils eine Masse m und eine Ladung q , das zentrale Teilchen ebenfalls eine Masse m aber eine Ladung $-q$.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Für die Lösung wird nur das elektrostatische Feld der Konfiguration, nicht aber das Gravitationsfeld der Staubteilchen berücksichtigt¹.

Die elektrostatische Feldenergie der anfänglichen Konfiguration berechnet sich aus der Summe der paarweisen Beiträge je zweier Staubteilchen. Betrachte das Teilchen an der linken Seite des Sechsecks. Sein Abstand zu den beiden nächsten positiv geladenen Teilchen beträgt a . Da die äußeren Teilchen in Form eines regelmäßigen Sechsecks um das innere Teilchen angeordnet sind, bildet das innere Teilchen zusammen mit je zwei benachbarten äußeren ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge a . Damit beträgt der Abstand eines äußeren Teilchens zum inneren ebenfalls a . In der nebenstehenden Abbildung ist zu erkennen, dass der Abstand des linken Teilchens zu einem der schräg jenseits des zentralen Teilchens liegenden Teilchen nach dem Satz des Pythagoras durch $\sqrt{3}a$ gegeben ist.



Damit ergibt sich für die elektrostatische Feldenergie E_{el} der anfänglichen Konfiguration

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[6 \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{\sqrt{3}a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{a} \right) - 6 \frac{1}{a} \right] = \frac{6q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \right). \quad (5.1)$$

Wenn sich die Teilchen weit voneinander entfernt haben, ist die elektrostatische Feldenergie in guter Näherung gleich Null. Aufgrund der Energieerhaltung muss diese dann vollständig in der kinetischen Energie der Teilchen zu finden sein. Aufgrund der Symmetrie der Ausgangssituation ist auch die kinetische Energie der sechs davonfliegenden, positiv geladenen Staubteilchen identisch, während das mittlere Teilchen in Ruhe verbleibt. Für die kinetische Energie eines Teilchens gilt daher:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{6} E_{\text{el}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \right). \quad (5.2)$$

Damit ergibt sich für die gesuchte Geschwindigkeit v des Teilchens

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m}} = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi m \epsilon_0 a} \frac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}} \approx 5,5 \text{ m s}^{-1}. \quad (5.3)$$

Korrekte Antwort: **A**

Hinweis: Die anderen Antwortalternativen ergeben sich aus: *B* - Rechnen mit einer Konfiguration aus nur zwei positiven Ladungen q im Abstand a , *C* - Berücksichtigen der elektrostatischen Energie nur eines Teilchens und Vernachlässigen der Änderung der übrigen Konfiguration, *D* - Vergessen des Faktors 6 in kinetischer Energie.

¹Die elektrische Feldenergie ist bis auf einen numerischen Faktor proportional zu $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$, wohingegen die Feldenergie des Gravitationsfeldes proportional zu $G m^2 \frac{1}{a}$ ist. Der Quotient aus beiden Feldenergien ist mit den gegebenen Werten für die Ladung und die Masse in der Größenordnung von 10^{16} , so dass der Beitrag der Gravitation hier vernachlässigt werden kann, so lange sich die elektrische Feldenergie nicht nahezu zu Null aufaddiert (was nicht der Fall ist, wie man an (5.1) erkennt).

Bewertung - Geladener Staub (MC-Aufgabe)		Punkte
5	Nutzen der Geometrie und Symmetrie der Anordnung	1.0
	Bestimmen der anfänglichen elektrostatischen Energie des Systems	1.0
	Gleichsetzen mit kinetischer Energie	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 6 Galaktische Flaschenpost (MC-Aufgabe)

(5 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade, Arne Wolf)

<p>Ein Raumschiff startet mit der konstanten Geschwindigkeit $0,6c$ von der Erde, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bezeichnet. Nach 100 h an Bord werfen die Raumfahrenden eine Flaschenpost mit der Geschwindigkeit $0,8c$ relativ zum Raumschiff in Richtung Erde.</p> <p>Wie lange müssen die Erdbewohner zwischen Start des Raumschiffs und Ankunft der Flaschenpost warten?</p> <p>A etwa 256 h B etwa 320 h C etwa 400 h D etwa 525 h</p>

Lösung

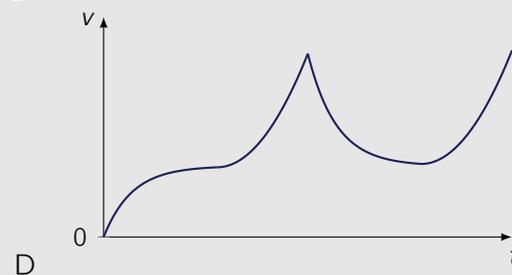
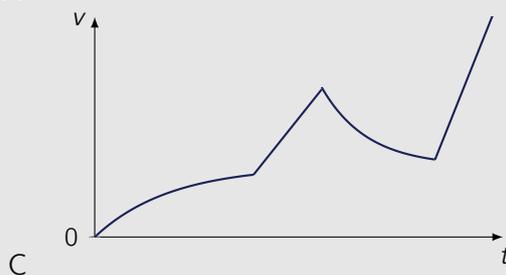
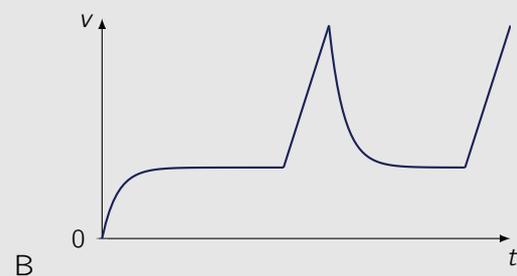
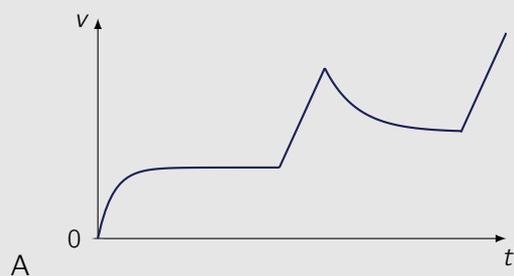
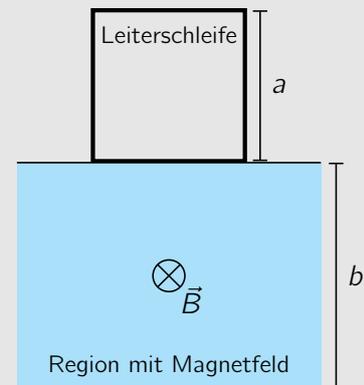
<p>Rechnungen und Erläuterungen</p> <p>Aufgrund der Zeitdilatation sind zur Zeit des Abwurfs der Flaschenpost auf der Erde</p> $\gamma \cdot 100 \text{ h} = 125 \text{ h} \quad (6.1)$ <p>mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - 0,6^2} = 1,25$ vergangen.</p> <p>Die Geschwindigkeit der Flasche bezüglich der Erde lässt sich mit Hilfe der relativistischen Geschwindigkeitsaddition bestimmen zu</p> $\frac{0,6 - 0,8}{1 - 0,8 \cdot 0,6} c = -\frac{5}{13} c. \quad (6.2)$ <p>Somit müssen die Erdbewohner eine Zeit von</p> $125 \text{ h} \left(1 + \frac{\frac{3}{5}c}{\frac{5}{13}c} \right) = 320 \text{ h} \quad (6.3)$ <p>warten, bis die Flaschenpost ankommt.</p> <p>Korrekte Antwort: B</p>
--

Bewertung - Galaktische Flaschenpost (MC-Aufgabe)		Punkte
6	Verwenden der Zeitdilatation	1.5
	Relativistisches Subtrahieren der Geschwindigkeiten	1.5
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 7 Fallende Leiterschleife im Magnetfeld (MC-Aufgabe)
(5 Pkt.)
(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade, Richard Reindl)

Eine quadratische Leiterschleife mit Kantenlänge a , Widerstand R und Masse m fällt, wie nebenstehend skizziert, aus der Ruhe heraus in eine scharf begrenzte Region der Breite $b > a$ mit einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte \vec{B} , das in die Zeichenebene hinein orientiert ist. Die Graphen A, B, C und D sollen den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit der Leiterschleife für verschiedene Magnetfeldstärken darstellen.

Welcher der Graphen zeigt einen physikalisch möglichen Vorgang?



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Der Fall der Leiterschleife kann in vier Phasen unterteilt werden, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.

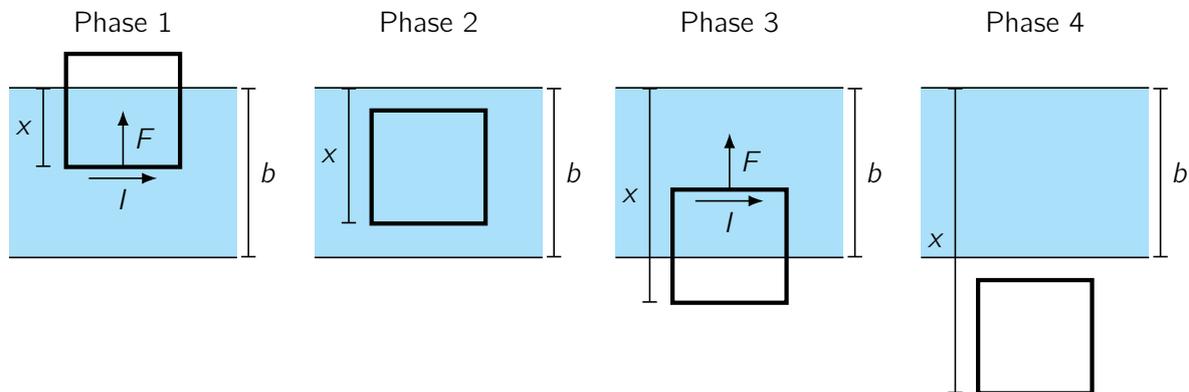


Abb. 4. Skizzen der vier Phasen des Falls der Leiterschleife.

Phase 1: $0 < x < a$

Bezeichne mit v die vertikale Geschwindigkeit der Leiterschleife. Im unteren Stück der Leiterschleife wird die Spannung $U = v B a$ induziert und es fließt ein Strom der Stromstärke $I = \frac{v B a}{R}$ nach rechts. Dadurch wirkt auf das untere Leiterstück die nach oben gerichtete und damit bremsende Lorentzkraft

$$F = I B a = \frac{v B^2 a^2}{R}. \quad (7.1)$$

Die Beschleunigung der Leiterschleife ist also stets kleiner als die Erdbeschleunigung g . Die Geschwindigkeit v wächst, bis F gleich der Gewichtskraft $m g$ der Leiterschleife wird. v nähert sich also an die stationäre Geschwindigkeit

$$v_s = \frac{m g R}{B^2 a^2} \quad (7.2)$$

an.

Phase 2: $a < x < b$

In diesem Bereich ändert sich der magnetische Fluss durch die Leiterschleife nicht, so dass kein Strom induziert wird und keine Bremskraft wirkt. Die Leiterschleife fällt frei und die Geschwindigkeit ändert sich linear mit der Zeit.

Phase 3: $b < x < b + a$

Der Induktionsstrom $I = \frac{v B a}{R}$ fließt jetzt im oberen Leiterstück nach rechts. Dies führt erneut auf die Bremskraft (7.1) und die gleiche stationäre Geschwindigkeit (7.2) als Grenzwert wie in Phase 1.

Phase 4: $b + a < x$

Auch hier ändert sich der magnetische Fluss durch die Leiterschleife nicht, so dass sich diese wieder im freien Fall befindet und die Geschwindigkeit linear mit der Zeit zunimmt. Die Steigung der Geschwindigkeitsgeraden muss die gleiche wie in Phase 2 sein.

Analyse der Graphen

In Graph A wird in Phase 1 und Phase 3 jeweils eine stationäre Geschwindigkeit erreicht, die aber nicht gleich ist. Damit stellt dieser Graph keinen physikalisch möglichen Verlauf dar.

In Graph B sind die in Phase 1 und 3 erreichten stationären Geschwindigkeiten identisch. Darüber hinaus sind die Geradensteigungen in Phase 2 und 4 gleich. Der Graph kann also einen physikalischen Vorgang darstellen.

In Graph C sind die Geradensteigungen in Phase 2 und 4 nicht gleich. Der Graph beschreibt also auch keinen physikalisch möglichen Vorgang.

In Graph D sind die Teilstücke in Phase 2 und 4 keine Geraden, so dass auch dieser Graph keinen physikalisch möglichen Vorgang beschreibt.

Damit beschreibt nur der Graph B einen physikalisch möglichen Vorgang.

Korrekte Antwort: *B*

Hinweis: Von den Teilnehmenden wird eine Angabe der Formeln (7.1) und (7.2) nicht erwartet. Es ist ausreichend, wenn erkannt und begründet wird, dass in Phase 1 und 3 eine gleiche stationäre Geschwindigkeit existiert.

Bewertung - Fallende Leiterschleife im Magnetfeld (MC-Aufgabe)		Punkte
7	Identifizieren von vier Phasen	1.0
	Erkennen einer stationären Geschwindigkeit in Phase 1 und 3	0.5
	Begründen, dass stationäre Geschwindigkeiten in Phase 1 und 3 gleich sind	1.0
	Erkennen des freien Falls in Phase 2 und 4	0.5
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Langaufgaben

Bearbeite die folgenden drei Aufgaben ebenfalls in den dafür vorgesehenen Boxen. Anders als bei den Multiple-Choice Aufgaben sind keine Lösungsmöglichkeiten gegeben. Beschreibe deinen Lösungsweg so, dass er gut nachvollziehbar aber nicht unnötig lang ist. Wenn du also zum Beispiel den Energieerhaltungssatz verwendest, schreibe dies kurz hin.

Aufgabe 8 Coriolisbrunnen

(10 Pkt.)

(Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade, Stefan Petersen)

Der nebenstehend dargestellte Coriolisbrunnen besteht aus einem Ring, aus dem in regelmäßigen Abständen Wasserstrahlen durch kleine Löcher in Richtung des Mittelpunktes austreten. Der Ring befindet sich in einer festen Höhe parallel über dem Boden und kann sich um seine Mittelpunktschse drehen.

Die Abbildungen zeigen den Coriolisbrunnen von oben mit der Bahn der Wasserstrahlen bis zum Auftreffen auf den Boden. In der linken Abbildung ist der Coriolisbrunnen in Ruhe. Im rechten Teil dreht er sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω .

Der innere Radius des Ringes beträgt $r = 1,00 \text{ m}$ und die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers in Richtung Mittelpunkt des Ringes beträgt $2,2 \text{ m s}^{-1}$.

Gib an, in welche Richtung sich der Ring in der rechten Abbildung dreht und bestimme die Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung.

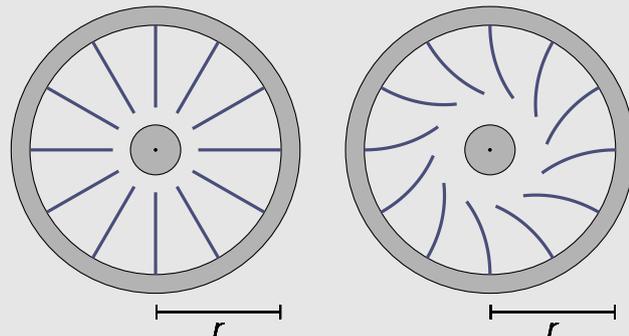


Abb. 5. Maßstabsgetreue Darstellung des Coriolisbrunnens und der Wasserstrahlen von oben im ruhenden Fall (links) und bei Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω (rechts).

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Ring in Ruhe: Wenn der Ring sich nicht dreht, fallen die Tropfen des Wasserstrahls bei Vernachlässigung der Luftreibung im freien Fall nach unten, während sie sich mit der gegebenen Geschwindigkeit $v = 2,2 \text{ m s}^{-1}$ auf den Mittelpunkt des Ringes zu bewegen. Aus der von dem Wasserstrahl bis zum Auftreffen auf den Boden in radialer Richtung zurückgelegten Strecke x lässt sich die Zeit t bestimmen, die die einzelnen Wassertropfen in der Luft sind. Durch Ausmessen in der Abbildung ergibt sich:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{\frac{1,10 \text{ cm}}{3,30 \text{ cm/2}} r}{v} = \frac{\frac{1,10 \text{ cm}}{3,30 \text{ cm/2}} 1,00 \text{ m}}{2,2 \text{ m s}^{-1}} \approx 0,30 \text{ s.} \quad (8.1)$$

Rotierender Ring: Wenn der Ring rotiert, besitzen die Wassertropfen beim Austreten aus dem Ring im nichtrotierenden Bezugssystem neben der radialen noch eine tangentielle Geschwindigkeitskomponente der Größe ωr . Wenn der Wassertropfen auf den Boden trifft, hat er sich also auch in tangentielle Richtung bewegt. Die Fallzeit ist dabei identisch zu der Zeit t beim ruhenden Ring, da die gleiche Fallhöhe zurückgelegt wird. Die nebenstehende Abbildung erlaubt die Bestimmung des radialen Abstandes r' beim Auftreffen auf den Boden zu

$$r' = \sqrt{(r - vt)^2 + (\omega r t)^2}. \quad (8.2)$$

Da sich r' aus der Abbildung bestimmen lässt² und die Parameter r , v und t gegeben bzw. bereits bestimmt worden sind, kann mit Hilfe von (8.2) die gesuchte Winkelgeschwindigkeit ermittelt werden. Mit $r' \approx \frac{1,50 \text{ cm}/2}{3,30 \text{ cm}/2}$ $r \approx 0,45 \text{ m}$ ergibt sich

$$\omega = \frac{1}{r t} \sqrt{r'^2 - (r - vt)^2} = \frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{vt}{r}\right)^2} \approx 1,03 \text{ s}^{-1} \approx 1,0 \text{ s}^{-1}. \quad (8.3)$$

Die tangentielle Geschwindigkeitskomponente der Tröpfchen führt dazu, dass diese bei geringerem Radius der Drehung des Ringes vorausseilen. Der Strahl biegt sich also in Richtung der Tangentialkomponente oder in Drehrichtung. Im vorliegenden Fall erfolgt die Drehung damit im Uhrzeigersinn.

Hinweis: Die Längen können in der Abbildung relativ genau ausgemessen werden. Wenn man aber einen Messfehler von 0,05 cm (halber Skalenteil) für die Längenmessung mit dem Lineal annimmt, ergeben sich für die Zeit t und den Radius r' Abschätzungen für die Ungenauigkeiten von $t = (0,30 \pm 0,02) \text{ s}$ sowie $r' = (0,45 \pm 0,03) \text{ m}$. Daraus ergibt sich aufgrund der Differenzbildung eine sehr große Ungenauigkeit im Ergebnis für die Winkelgeschwindigkeit mit $\omega = (1,03 \pm 0,35) \text{ s}^{-1}$.

²Es empfiehlt sich, den Abstand zweier gegenüberliegender Enden der Wasserstrahlen mit einer Geraden durch den Ringmittelpunkt zu verbinden und deren Länge durch zwei zu teilen.

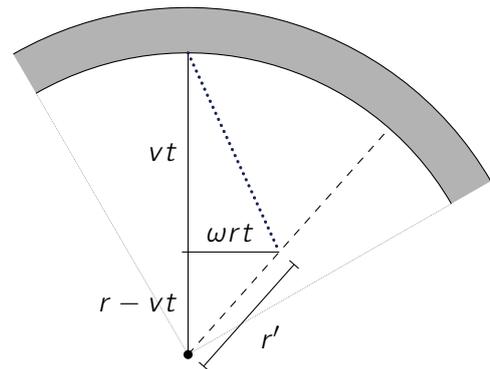


Abb. 6. Skizze der Bahn eines Wassertropfchens zur Bestimmung von r' .

Bewertung - Coriolisbrunnen		Punkte
8	Ableiten eines Ausdruckes für die Fallzeit (8.1)	1.0
	Verwenden der Idee des Ausmessens in den Abbildungen	2.0
	Abmessen von Größen in der Abbildung und Angeben der Fallzeit	1.0
	Ableiten eines Ausdrucks für die Winkelgeschwindigkeit (8.3)	3.0
	Abmessen relevanter Größen in der Abbildung und Bestimmen der Winkelgeschwindigkeit mit $0,6 \text{ s}^{-1} \leq \omega \leq 1,4 \text{ s}^{-1}$	2.0
	Angeben und Begründen der Drehrichtung	1.0
		10.0

Aufgabe 9 Abgelenkte Elektronen
(15 Pkt.)
(Idee: Aufgabe aus einer früheren Auswahlrunde)

Ein Elektronenstrahl der Breite d tritt in ein Magnetfeld ein. Die Elektronen bewegen sich, wie in Abbildung 7 skizziert, anfänglich parallel mit einer Geschwindigkeit v . Das Magnetfeld ist so geartet, dass alle Elektronen den Punkt A durchlaufen und der Strahl sich nach Durchlaufen des Magnetfeldes in die gleiche Richtung aber auf eine Breite $2d$ aufgeweitet fortbewegt.



Abb. 7. Skizze zum Verlauf des Elektronenstrahls.

Entwerfe eine möglichst einfache Konfiguration des magnetischen Feldes, die zu dem beschriebenen Verlauf des Elektronenstrahls führt. Du kannst dabei auch für unterschiedliche Bereiche verschiedene Felder verwenden. Erläutere deine Konfiguration und begründe, warum sie zu dem beschriebenen Verlauf des Elektronenstrahls führt.

Nimm dabei an, dass sich die Elektronen nicht gegenseitig beeinflussen und beschränke dich auf eine Bewegung der Elektronen in der Zeichenebene.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Eine Möglichkeit zur Konstruktion eines passenden Feldes ist die folgende: In einem homogenen, senkrecht zur Zeichenebene orientierten Magnetfeld der magnetischen Flussdichte B durchlaufen die Elektronen Kreisbahnen mit einem identischem Radius r , der gegeben ist durch

$$r = \frac{m_e v}{e B}. \quad (9.1)$$

Dabei bezeichnen m_e die Masse des Elektrons und e dessen Ladung. Betrachte zunächst die äußeren einlaufenden Elektronen, die ohne Magnetfeld in einem Abstand von $d/2$ am Punkt A vorbeifliegen würden. Um diese so abzulenken, dass sie durch den Punkt A fliegen, kann die magnetische Flussdichte z. B. so gewählt werden, dass der Radius der Kreisbahn gerade $d/2$ beträgt. Dann müssen die äußeren Elektronen ein Viertel eines vollen Kreisbogens durchlaufen, um zu Punkt A zu gelangen. Bei Festlegung eines kartesischen Koordinatensystems mit Ursprung in A und horizontaler x -Achse muss das Magnetfeld also in einem Abstand $d/2$ zur x -Achse ebenfalls $d/2$ vor der y -Achse beginnen. Der Halbraum rechts der y -Achse wird später betrachtet. Die in diesem Fall notwendige magnetische Flussdichte beträgt

$$B_1 = \frac{2 m_e v}{e d}. \quad (9.2)$$

Ein in einem Abstand y mit $0 \leq y < d/2$ zur x -Achse einlaufendes Elektron muss in dem Magnetfeld aber nur einen kleineren Kreisbogen durchlaufen. Mit der Notation in der nebenstehenden Skizze gilt für die Koordinaten x und y bei Eintritt in das Magnetfeld

$$x^2 + \left(\frac{d}{2} - y\right)^2 = \frac{d^2}{4}. \quad (9.3)$$

Die Gleichung beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt bei $(0, d/2)$ und einem Radius von $d/2$. Rechts dieser Kurve muss das Magnetfeld liegen.

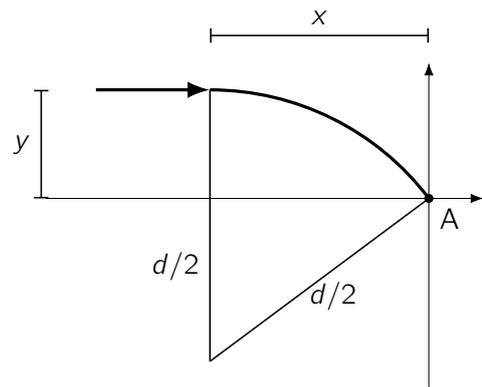


Abb. 8. Skizze zum Bahnverlauf.

Analog kann man das Feld für den Bereich rechts der y -Achse konstruieren, bei dem der Radius der Kreisbahn allerdings doppelt so groß sein muss und wo die magnetische Flussdichte daher nur

$$B_2 = \frac{m_e v}{e d} \quad (9.4)$$

betragen muss. Insgesamt sieht eine mögliche Feldkonfiguration damit folgendermaßen aus:

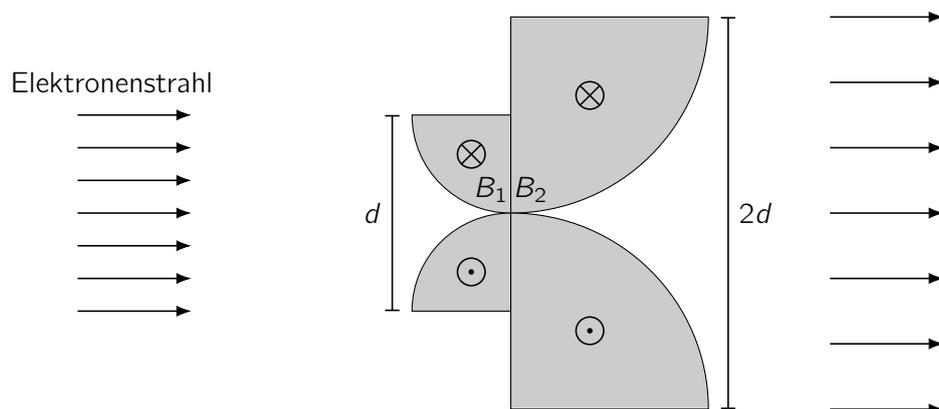


Abb. 9. Mögliche Feldkonfiguration zur Aufweitung des Elektronenstrahls.

Bewertung - Abgelenkte Elektronen		Punkte
9	Analyse der Bewegung im homogenen Magnetfeld und Kreisbahnradius (9.1)	2.0
	Angaben einer Magnetfeldkonfiguration, die folgenden Bedingungen genügt:	
	Das Magnetfeld ist ober- und unterhalb des Punktes A antiparallel	1.0
	Elektronen in der Mitte des Strahls werden nicht abgelenkt	1.0
	Elektronen am Rand des Strahls durchlaufen den Punkt A	2.0
	Elektronen des restlichen Strahls durchlaufen den Punkt A	2.0
	Magnetfeld im Bereich rechts von A ist in analoger Weise konstruiert	2.0
Begründen der Magnetfeldkonfiguration	3.0	
Angaben der korrekten Flussdichten des Magnetfeldes in den einzelnen Bereichen	2.0	
		15.0

Hinweis: Die Angabe der Magnetfeldkonfiguration kann graphisch, in Formeln oder durch eine Beschreibung als Text erfolgen. Es ist zu erwarten, dass die Teilnehmenden auch andere Konfigurationen angeben werden. Diese sollten ebenfalls als korrekt bewertet werden, wenn sie zu dem geforderten Verlauf des Elektronenstrahls führen.

Aufgabe 10 Tropische Wirbelstürme als Wärmekraftmaschinen

(20 Pkt.)

(Idee: Adaption einer Aufgabe aus der 2. Runde zur 45. IPhO 2014)

Wirbelstürme in tropischen Breitengraden können deutlich höhere Windgeschwindigkeiten aufweisen und dadurch deutlich zerstörerischer wirken als andere Stürme. Die großflächig aufgeheizte Meeresoberfläche in der Nähe des Äquators spielt dabei als Energielieferant für die Stürme eine wesentliche Rolle.

Mit einem einfachen thermodynamischen Modell, wie es in Abbildung 10 dargestellt ist, lassen sich grundlegende Eigenschaften dieser Wirbelstürme untersuchen.

Betrachte ein kleines Luftpaket der Masse Δm , das sich in Höhe der Meeresoberfläche von dem Hochdruckgebiet bei A zu dem äußeren Rand des Sturmzentrums bei B bewegt.

Die Temperatur der Luft bleibt dabei annähernd konstant gleich der Meerestemperatur T_1 . Jedoch verdunstet laufend Meerwasser, so dass die Luftfeuchtigkeit in dem Luftpaket zunimmt. In der Nähe des Sturmzentrums ist die Luft dann gesättigt und die zusätzlich aufgenommene Luftfeuchtigkeit regnet sich ab. Entlang des Weges von A nach B wird dem Luftpaket so Wärme zugeführt, die sich zusammensetzt aus der Verdampfungswärme des aufgenommenen Wasserdampfes und der durch den Druckunterschied an dem Paket verrichteten Arbeit. Bezeichne mit Δm_{Dampf} die Masse des aufgenommenen Wasserdampfes und mit λ_w die Verdampfungswärme von Wasser bei der Temperatur T_1 . Dann lässt sich die aufgenommene Wärme ausdrücken durch

$$Q_{A \rightarrow B} = \lambda_w \Delta m_{\text{Dampf}} + \frac{\Delta m}{M_L} R T_1 \ln \frac{p_A}{p_B}. \quad (10.1)$$

Dabei ist R die Gaskonstante und M_L die molare Masse von Luft. Ferner bezeichnen p_A und p_B die Luftdrücke bei A und B. Die Beziehung (10.1) kannst du im Folgenden verwenden.

Am Rand des Zentrums steigen die Luftmassen dann in große Höhen und kühlen dabei auf die Temperatur T_2 der Tropopause ab. Dieser Prozess von B bis zu dem mit C gekennzeichneten Gebiet in der Abbildung läuft in guter Näherung ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung ab.

Bei etwa gleichbleibender Temperatur wandert die Luft dann entlang der Tropopause wieder vom Zentrum des Sturms weg. Schließlich kühlt sich die Luft durch Wärmeabgabe in Form von Strahlung ab und sinkt von dem mit D gekennzeichneten Gebiet wieder nach unten zum Gebiet A. Dieses Absinken geschieht ebenfalls ohne nennenswerten Wärmeaustausch mit der Umgebung.

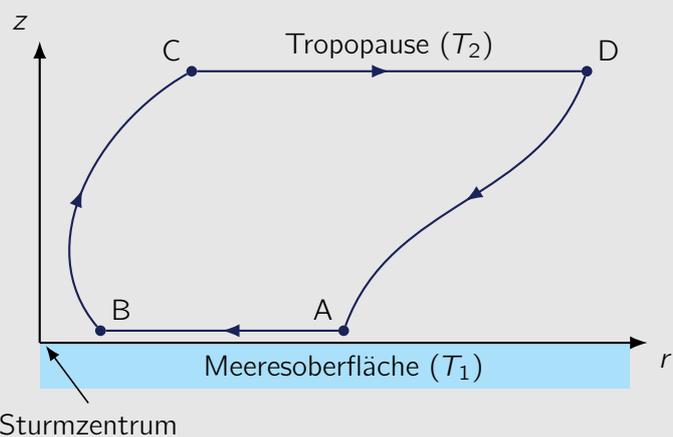


Abb. 10. Skizze für die Bewegung eines Luftpaketes in einem tropischen Wirbelsturm. z gibt die Höhe über der Meeresoberfläche und r den Abstand von der Mitte des Sturmzentrums an.

Auf diese Weise entsteht ein thermodynamischer Kreisprozess, der in diesem Modell als reversibel angenommen wird.

10.a) Leite einen Ausdruck für die in einem Durchlauf des Kreisprozesses insgesamt an dem Luftpaket verrichtete Arbeit W ab und drücke diese durch die in (10.1) verwendeten Größen sowie T_2 aus. (6 Pkt.)

Nimm an, dass etwa 50 % der an dem Luftpaket verrichteten Arbeit direkt zu einer Zunahme der Rotationsenergie des Luftpaketes um das Zentrum des Sturmes auf dem Weg von A nach B führen.

10.b) Leite einen Ausdruck für die Rotationsgeschwindigkeit des Wirbelsturms v_B am Rand des Zentrums in Abhängigkeit von den in den vorigen Aufgabenteilen verwendeten Größen und der Rotationsgeschwindigkeit v_A am äußeren Rand des Sturmes ab. (2 Pkt.)

Verwende für die letzten Aufgabenteile die folgenden numerischen Werte:

Universelle Gaskonstante	$R = 8,314\,46\text{ J K}^{-1}\text{ mol}^{-1}$
Temperatur an der Meeresoberfläche	$T_1 = 303\text{ K}$
Temperatur an der Tropopause	$T_2 = 213\text{ K}$
Luftdruck bei A (Rand des Wirbelsturms)	$p_A = 1000\text{ mbar}$
Luftdruck bei B (Rand des Sturmzentrums)	$p_B = 950\text{ mbar}$
Sättigungsdampfdruck über Wasser bei Druck p_B und Temperatur T_1	$E_W = 43\text{ mbar}$
Relative Luftfeuchtigkeit der Luft bei A	$\varphi = 75\%$
Mittlere molare Masse von Luft	$M_L = 28,9 \cdot 10^{-3}\text{ kg mol}^{-1}$
Molare Masse von Wasser	$M_W = 18,0 \cdot 10^{-3}\text{ kg mol}^{-1}$
Verdampfungswärme von Wasser bei Temperatur T_1	$\lambda_W = 2,41 \cdot 10^6\text{ J kg}^{-1}$

10.c) Bestimme für $v_A \approx 10\text{ m s}^{-1}$ die Rotationsgeschwindigkeit des Wirbelsturms v_B am Rand des Zentrums. (5 Pkt.)

Hinweis: Wenn du den Wert für die Rotationsgeschwindigkeit nicht bestimmt bekommst, kannst du für die folgenden Teilaufgaben den Ersatzwert $v_B = 250\text{ km h}^{-1}$ verwenden.

Die Rotationsgeschwindigkeit v der Luft in einem Wirbelsturm ist außerhalb des Zentrums des Sturmes etwa proportional zur inversen Wurzel des Abstandes r , d.h. es gilt $v \sim 1/\sqrt{r}$.

10.d) Berechne den ungefähren Durchmesser des betrachteten Wirbelsturms unter der Annahme, dass der Punkt B bei $r \approx 10\text{ km}$ liegt. (2 Pkt.)

10.e) Schätze die Rotationsenergie des gesamten Wirbelsturms ab und vergleiche den Wert mit dem Primärenergieverbrauch pro Jahr in Deutschland, der 2019 bei etwa $1,3 \cdot 10^{19}\text{ J}$ lag. Nimm dazu eine konstante Luftdichte von $1,2\text{ kg m}^{-3}$ und eine Höhe des Wirbelsturms von etwa 12 km an. (4 Pkt.)

10.f) Wenn der Wirbelsturm auf Land trifft, wird seine Energieversorgung unterbunden und er wird schwächer. Nimm an, dass der betrachtete Wirbelsturm sich an Land innerhalb von etwa 10 Tagen vollständig auflöst und schätze ab, welche durchschnittliche Leistung der Wirbelsturm dabei abgibt. (1 Pkt.)

Lösung

10.a)

Rechnungen und Erläuterungen

Da beim Aufsteigen und Absinken der Luftmasse keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird und die Gravitationskraft insgesamt keine Arbeit an dem Luftpaket verrichtet, gilt für die an dem Luftpaket bei Durchlaufen des Kreisprozesses verrichtete Arbeit W

$$W = Q_{A \rightarrow B} - Q_{C \rightarrow D}, \quad (10.2)$$

$Q_{C \rightarrow D}$ ist dabei die während des Weges von C nach D vom Luftpaket abgegebene Wärme. Da sich die Entropie des Systems gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nach einem Durchlauf des reversiblen Kreisprozesses nicht ändert, ist außerdem

$$\frac{Q_{C \rightarrow D}}{T_2} = \frac{Q_{A \rightarrow B}}{T_1}. \quad (10.3)$$

Mit (10.1) ergibt sich damit für die insgesamt am Luftpaket verrichtete Arbeit

$$W = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q_{A \rightarrow B} = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \left(\lambda_w \Delta m_{\text{Dampf}} + \frac{\Delta m}{M_L} R T_1 \ln \frac{p_A}{p_B} \right). \quad (10.4)$$

10.b)

Rechnungen und Erläuterungen

Für die Rotationsgeschwindigkeiten am Rand des Sturmes (v_A) und am Rand des Sturmzentrums (v_B) gilt mit dem Energiesatz

$$\frac{1}{2} \Delta m (v_B^2 - v_A^2) = 0,50 \cdot W. \quad (10.5)$$

Damit ist die Rotationsgeschwindigkeit des Wirbelsturms am Rand des Zentrums

$$v_B = \sqrt{\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \left(\lambda_w \frac{\Delta m_{\text{Dampf}}}{\Delta m} + \frac{R T_1}{M_L} \ln \frac{p_A}{p_B} \right) + v_A^2}. \quad (10.6)$$

10.c)

Rechnungen und Erläuterungen

Aus der Betrachtung der Gasgleichung am Punkt B lässt sich die Masse Δm_{Dampf} des entlang des Weges von A nach B vom Luftpaket aufgenommenen Wasserdampfes als Funktion der Masse Δm des Luftpaketes bestimmen. Bei B ist die Luft gesättigt, der Partialdruck des Wasserdampfes entspricht also dem Sättigungsdampfdruck über Wasser E_W . Da die Luft schon bei A zu 75% gesättigt war, ist die Masse des insgesamt in dem Luftpaket enthaltenen Wasserdampfes $4 \Delta m_{\text{Dampf}}$. Bezeichne mit V_B das Volumen des Luftpaketes am Punkt B. Dann gilt nun

$$\frac{V_B}{R T_1} = \frac{\Delta m}{M_L p_B} = \frac{4 \Delta m_{\text{Dampf}}}{M_W E_W}. \quad (10.7)$$

Daraus folgt für die Masse des aufgenommenen Wasserdampfes

$$\Delta m_{\text{Dampf}} = \frac{1}{4} \frac{M_W}{M_L} \frac{E_W}{p_B} \Delta m \approx 7,0 \cdot 10^{-3} \Delta m. \quad (10.8)$$

Für die Windgeschwindigkeit v_B ergibt sich daraus mit (10.6)

$$v_B \approx 80 \text{ m s}^{-1} \approx 290 \text{ km h}^{-1}. \quad (10.9)$$

10.d)

Rechnungen und Erläuterungen

Mit der gegebenen Proportionalität beträgt der Durchmesser d des Wirbelsturms³

$$d = 2 \cdot r_A = 2 r_B \frac{v_B^2}{v_A^2} \approx 1300 \text{ km}. \quad (10.10)$$

³Wenn mit dem Ersatzwert $v_B = 250 \text{ km h}^{-1}$ gerechnet wird, betragen die korrekten numerischen Größen für die folgenden Teilaufgaben: $d \approx 960 \text{ km}$, $E_{\text{rot}} \approx 1,0 \cdot 10^{18} \text{ J}$, $E_{\text{rot}}/E_{\text{Primär}} \approx 7,3\%$ und $\bar{P} \approx 1,2 \cdot 10^{12} \text{ W}$.

10.e)

Rechnungen und Erläuterungen

Die Gesamtrrotationsenergie E_{rot} des Wirbelsturms lässt sich über eine Summation oder Integration über dünne Zylinderschalen abschätzen. Bezeichne mit $H = 12 \text{ km}$ die ungefähre Höhe des Wirbelsturms und mit $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$ die Dichte der Luft. Dann lässt sich die Rotationsenergie einer dünnen Zylinderschale des Wirbelsturms mit Radius r und Dicke Δr angeben durch

$$\Delta E_{\text{rot}} \approx H \rho \frac{1}{2} 2 \pi r \Delta r v(r)^2 = H \rho \pi v_A^2 r_A \Delta r. \quad (10.11)$$

Hierbei wurde erneut die gegebene Proportionalität genutzt, nach der $v(r) = v_A \sqrt{r_A/r}$ gilt. Insgesamt beträgt die Rotationsenergie des Wirbelsturms damit näherungsweise

$$E_{\text{rot}} \approx H \rho \pi v_A^2 r_A (r_A - r_B) \approx H \rho \pi v_A^2 r_A^2 \approx 1,9 \cdot 10^{18} \text{ J}. \quad (10.12)$$

Die in dem Wirbelsturm enthaltene Rotationsenergie entspricht also etwa 14 % des Primärenergieverbrauchs in Deutschland im Jahr 2019.

10.f)

Rechnungen und Erläuterungen

Die mittlere dissipierte Leistung \bar{P} des Wirbelsturms ergibt sich aus den obigen Werten und der angegebenen Zeitdauer von $10 \text{ d} \approx 8,6 \cdot 10^5 \text{ s}$ zu

$$\bar{P} \approx 2,2 \cdot 10^{12} \text{ W}. \quad (10.13)$$

Hinweis: Die behandelte Modellierung des Wirbelsturms als Carnotsche-Wärmekraftmaschine geht zurück auf die Arbeit: Emanuel, Kerry A. (1986). An Air-Sea Interaction Theory for Tropical Cyclones. Part I: Steady-State Maintenance. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 585-605. Sie wird auch in dem englischsprachigen Wikipedia-Artikel zu tropischen Wirbelstürmen kurz vorgestellt (http://en.wikipedia.org/wiki/Tropical_cyclone, aufgerufen am 27.10.2020).

Bewertung - Tropische Wirbelstürme als Wärmekraftmaschinen		Punkte
10.a)	Berücksichtigen, dass beim Aufsteigen und Absinken keine Wärme ausgetauscht wird	1.0
	Erkennen, dass die Gravitationskraft insgesamt keine Arbeit verrichtet	1.0
	Angaben der Zusammensetzung der Arbeit (10.2)	1.0
	Nutzen des 2. Hauptsatzes und Beziehung (10.3)	2.0
	Angaben der Arbeit W (10.4)	1.0
10.b)	Anwenden des Energiesatzes (10.5)	1.0
	Angaben eines Ausdrucks für v_B (10.12)	1.0
10.c)	Idee zur Betrachtung der Gasgleichung in Punkt B	1.0
	Verwenden des Sättigungsdampfdruckes für den Wasserdampf	1.0
	Berücksichtigen der anfänglichen relativen Luftfeuchtigkeit in Punkt A	1.0
	Bestimmen eines Ausdrucks für die Wasserdampfmasse (10.8)	1.0
	Bestimmen der Windgeschwindigkeit v_B (10.9)	1.0
10.d)	Verwenden der gegebenen Proportionalität	1.0
	Ableiten eines analytischen Ausdrucks für Durchmesser (10.10)	0.5
	Berechnen des numerischen Ergebnisses für Durchmesser	0.5
10.e)	Idee zur Bestimmung der Rotationsenergie über Zylindersegmente	1.0
	Bestimmen eines Ausdrucks für Rotationsenergie (10.12)	2.0
	Berechnen des numerischen Ergebnisses für Rotationsenergie	0.5
	Vergleichen mit Primärenergieverbrauch	0.5
10.f)	Berechnen des Ergebnisses für mittlere dissipierte Leistung (10.13)	1.0
		20.0