51. Internationale PhysikOlympiade

Vilnius, Litauen 2020

Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen
Tel.: 0431 / 880 - 5120
email: petersen@ipho.info

Dürken Quaas
Tel.: 0431 / 880 - 5387
email: quaas@ipho.info

Anschrift: IPN · Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
Olshausenstraße 62
24118 Kiel

web: **www.ipho.info**
twitter: @iphogermany

Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 51. IPhO 2020

Hinweise

In dem Auswahlwettbewerb zur Internationalen PhysikOlympiade 2020 wurde die 2. Runde als Klausurrunde an den Schulen der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler durchgeführt. Neben Hinweisen zur Klausur sind nachfolgend die Aufgaben mit einem Lösungsvorschlag zu finden.

Die Korrektur der Klausur der 2. Runde erfolgt auf Grundlage dieser Musterlösung. Gemäß den Gepflogenheiten bei der Internationalen PhysikOlympiade wird dabei primär die Richtigkeit der Lösung bewertet und weniger die Sauberkeit der Ausarbeitung oder der sprachliche Ausdruck.

Bei den Multiple-Choice Aufgaben werden alleine für die richtigen Antwortbuchstaben bereits jeweils 2 Punkte vergeben. Die in den Bewertungstabellen darüber hinaus angegebenen Punktzahlen beziehen sich jeweils auf den von uns ausgearbeiteten Lösungsweg. Bei anderen Lösungswegen wird die Bewertung sinngemäß abgeändert, wobei die Gesamtpunktzahl pro Aufgabenteil beibehalten wird. Folgefehler werden in der Regel nicht bestraft. Die Verwendung eines falschen Zwischenergebnisses sollte, sofern sich dadurch keine starke Vereinfachung des Problems ergibt, also bei folgenden Fragen nicht zu Punktabzug führen. Dies bedeutet insbesondere, dass ein numerisches Ergebnis auch dann als korrekt gewertet wird, wenn vorher eine falsche Formel abgeleitet, aber korrekt mit dieser Formel weitergerechnet wurde. Wenn bei einem Ergebnis jedoch die angegebene Einheit falsch ist, führt dies in jedem Fall zu Punktabzug.

Bei Fragen oder Anmerkungen freuen wir uns über eine Nachricht an ipho@ipho.info.

Regeln und Hinweise zur Klausur für Schülerinnen und Schüler

- Der **Termin für die Klausur** ist bundesweit einheitlich Dienstag, der 12. November 2019. In besonderen Fällen kann deine Lehrkraft den Termin um ein bis zwei Tage verschieben.
- Die **Bearbeitungszeit** für die Klausur beträgt 180 Minuten.
- Die Klausur ist **ohne fremde Hilfe und in Einzelarbeit** unter Aufsicht einer Lehrkraft zu bearbeiten.
- Zulässige **Hilfsmittel** sind Schreib- und Zeichenmaterialien, die auf der folgenden Seite abgedruckte Liste von Naturkonstanten sowie ein nicht graphikfähiger Taschenrechner. Zusätzlich kannst du ein DIN-A4-Blatt mit deinen Lieblingsformeln mit in die Klausur nehmen (ein- oder doppelseitig per Hand oder mit Drucker beschrieben). Darüber hinaus darfst du keine Aufzeichnungen oder Formelsammlungen in der Klausur verwenden.
- Du erhältst die Klausuraufgaben in einem verschlossenen und mit deinem Namen versehenen **Umschlag**. Öffne diesen erst, wenn die betreuende Lehrkraft das Signal zum Start der Klausur gibt.
- Insgesamt können in der Klausur **94 Punkte** erreicht werden. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl in der Überschrift angegeben, bei Teilaufgaben direkt bei den Teilaufgaben.
- Du kannst dir die **Reihenfolge** für die Bearbeitung der Aufgaben frei aussuchen und dir auch die Zeit frei einteilen. Es kann vorteilhaft sein, sich zunächst mit Aufgaben zu befassen, die du gut lösen kannst, und sich nicht zu sehr in einer Aufgabe zu verbeißen.
- Im ersten Teil der Klausur sind **7 Multiple-Choice Aufgaben** zu lösen, bei denen jeweils vier Antwortalternativen zur Wahl stehen, von denen genau eine richtig ist. Für jede korrekte Antwortwahl erhältst du 2 Punkte. Wenn keine, eine falsche oder mehr als eine Antwortoption angegeben ist, werden dafür Null Punkte vergeben. Zu deiner Antwortwahl wird außerdem eine physikalische Begründung erwartet. Einige Aufgaben erfordern dafür auch eine Rechnung. Für jede passende physikalische Begründung werden 3 Punkte vergeben. Für diesen Teil sind 60-80 Minuten eingeplant.
- Im zweiten Teil sind einige **längere theoretische Aufgaben** zu bearbeiten. Für diesen Teil sind 100-120 Minuten vorgesehen.
- Trage deine **Aufgabenbearbeitung in die entsprechenden Boxen** ein. Falls der Platz nicht ausreicht oder du einen weiteren Graphen zeichnen möchtest, findest du am Ende der Klausur **zusätzliches Arbeitspapier**. Kennzeichne unbedingt die Aufgabe, zu der die jeweiligen Aufzeichnungen gehören.
- Die Klausurblätter und das zusätzliche Arbeitspapier sind im oberen Teil mit deinem **Schülerinnen- bzw. Schülercode** versehen. Verwende nur diese Blätter zur Bearbeitung der Klausur und lege alle Blätter am Ende wieder in deinen Umschlag.
- Die Aufgaben sind so konzipiert, dass es schwer sein dürfte, alle Aufgaben vollständig zu lösen. **Verliere also nicht den Mut, wenn du nicht alles schaffst oder mal keine Idee zur Lösung hast!**
- Da die Klausuren an einigen Schulen wenige Tage später geschrieben werden, darfst du **keine Informationen zu den Klausuraufgaben** vor dem 19. November an andere Teilnehmende weitergeben.

Das Team der PhysikOlympiade in Deutschland wünscht dir viel Erfolg!

Naturkonstanten und gebräuchliche Größen

In den Aufgaben können die folgenden physikalischen Größen verwendet werden. Die Angaben können jeweils bis zur angegebenen Stelle als exakt angenommen werden.

Konstante	**gebräuchliche Formelzeichen**	**Wert**
Absoluter Nullpunkt	T_0	$0\,\mathrm{K} = -273{,}15\,°\mathrm{C}$
Atomare Masseneinheit	u	$1{,}660\,539 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6{,}022\,141 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8{,}854\,187\,817 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m^{-1}}$
Elektronenvolt	eV	$1\,\mathrm{eV} = 1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$
Elementarladung	e	$1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s}$
Fallbeschleunigung auf der Erde	g	$9{,}806\,65\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Gravitationskonstante	γ, G	$6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c_0	$2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$1{,}256\,637\,061 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$
Normdruck, Atmosphärendruck	p_n	$101\,325\,\mathrm{N\,m^{-2}}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6{,}626\,070 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9{,}109\,384 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1{,}674\,927 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	$1{,}672\,622 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$1{,}097\,373\,157 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}$
Schallgeschwindigkeit in Luft	c_Luft	$343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (bei $20\,°\mathrm{C}$ und Normdruck)
Stefan-Boltzmann-Konstante	α, σ	$5{,}6704 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Universelle Gaskonstante	R	$8{,}314\,46\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$

Multiple-Choice Aufgaben

Finde zu jeder der folgenden sieben Fragen den richtigen Lösungsbuchstaben und begründe physikalisch, warum dies die korrekte Lösung ist. Es ist jeweils nur eine Antwortmöglichkeit richtig. Nutze den Platz in der Box für Rechnungen sowie Begründungen und notiere deinen Antwortbuchstaben an der vorgesehenen Stelle am Ende jeder Box.

Aufgabe 1 Eiswürfel im Glas (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

In drei mit Wasser gefüllten Gläsern schwimmt jeweils ein Eiswürfel. Der Eiswürfel in Glas 1 hat eine Luftblase im Inneren, der Eiswürfel in Glas 2 besitzt einen Kern aus flüssigem Wasser und in Glas 3 schwimmt ein Eiswürfel mit einem Aluminiumkern.

Was lässt sich über die Wasserspiegel in den Gläsern direkt nach dem Schmelzen der Eiswürfel sagen?

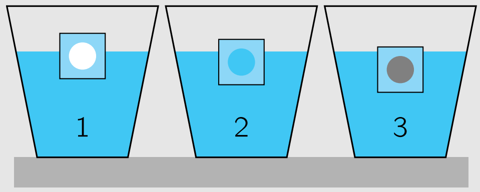


Abbildung 1: *Nicht maßstabsgerechte Skizze der schwimmenden Eiswürfel mit Einschlüssen.*

A Der Wasserspiegel in Glas 1 ist gestiegen, die in den anderen Gläsern sind unverändert.

B Der Wasserspiegel in Glas 3 ist gesunken, die in den anderen Gläsern sind unverändert.

C Die Wasserspiegel in Glas 1 und 3 sind gestiegen, der in Glas 2 ist unverändert.

D Die Wasserspiegel in allen Gläsern sind unverändert.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Aufgrund des archimedischen Prinzips entspricht die Masse des von einem schwimmenden Eiswürfel verdrängten Wassers genau der Masse des Eiswürfels inklusive eines eventuellen Einschlusses. Beim Schmelzen des Eiswürfels bleibt diese Masse erhalten.

Glas 1: Die Masse der Luft im Eiswürfel ist im Vergleich zur Eismasse vernachlässigbar. Die Masse des von dem Eiswürfel verdrängten Wassers entspricht also der Masse des Eises. Nach dem Schmelzen ist die gleiche Masse als Wasser vorhanden und nimmt daher das gleiche Volumen ein wie das vorher verdrängte Wasser. Der Wasserspiegel ändert sich nicht.

Glas 2: Ähnlich wie bei Glas 1 ist die Masse des Eises nach dem Schmelzen als Wasser vorhanden, so dass auch hier der Wasserspiegel gleich bleibt.

Glas 3: Da Aluminium eine höhere Dichte als Wasser besitzt, sinkt es nach dem Schmelzen des Eiswürfels auf den Glasboden. Es verdrängt dann nur noch sein eigenes Volumen an Wasser, so dass der Wasserspiegel in dem Glas sinkt.

Damit ist Antwort B korrekt.

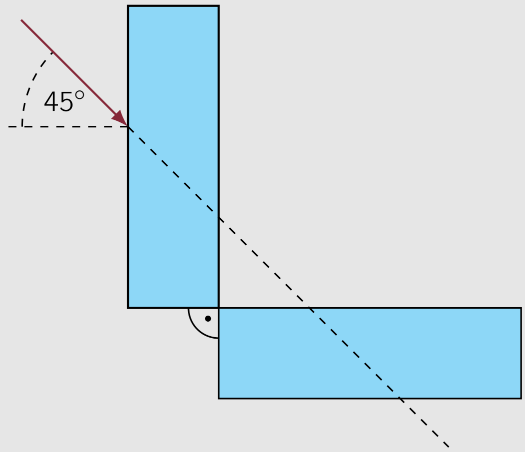
Alternativ kann man sich auch in allen drei Fällen eine Trennung von Eismasse und Luft-, Wasser- bzw. Metallmasse vorstellen. In den ersten beiden Gläsern würde dies nicht zu einer Veränderung des Wasserspiegels führen. Bei dem Metallkern würde allerdings der Eiswürfel ohne den Kern weiter oben schwimmen und der Wasserspiegel dadurch sinken.

Korrekte Antwort: *B*

Bewertung - Eiswürfel im Glas (MC-Aufgabe)		Punkte
1	Angeben oder Verwenden des archimedischen Prinzips beim Schwimmen	1.0
	Begründen, warum der Wasserspiegel in Glas 3 gesunken ist und/oder begründen, warum der Wasserspiegel in Glas 1 unverändert bleibt und sich in Glas 3 ändert	2.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

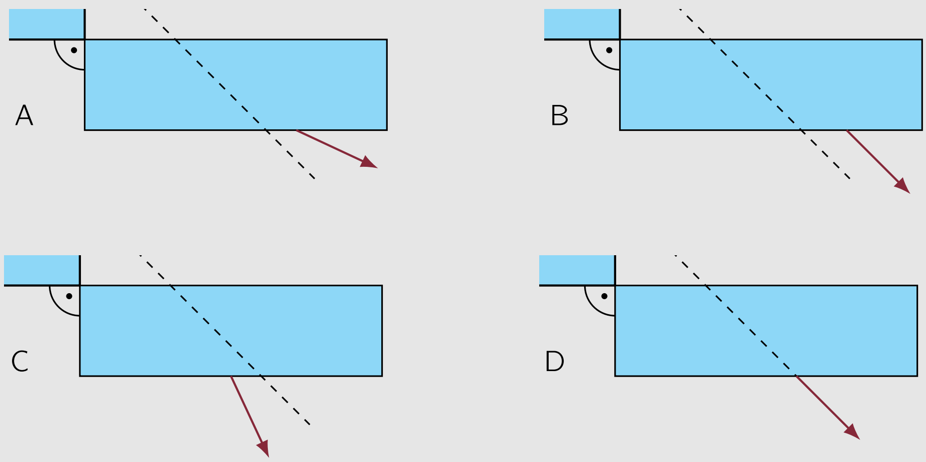
Aufgabe 2 Lichtbrechung (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Ein Lichtstrahl trifft, wie nebenstehend abgebildet, auf eine Anordnung von zwei gleich großen, senkrecht zueinander aufgebauten Glasquadern und wird beim Eintritt in den ersten Quader gebrochen. Der Brechungsindex des Glases beträgt 1,5. Außerhalb der Quader befindet sich Luft.



Welcher der folgenden Abbildungsausschnitte zeigt den Verlauf des gebrochenen Lichtstrahls nach dem Austritt aus dem zweiten Quader?

Der Verlauf des Lichtstrahls in dem Quader ist dabei nicht dargestellt und die gestrichelte Linie gibt den Verlauf des ungebrochenen Lichtstrahls wieder.



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Bei der Brechung eines Lichtstrahls an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 gilt für die Lotwinkel α_1 und α_2 des einfallenden bzw. des gebrochenen Strahles das Snelliussche Brechungsgesetz

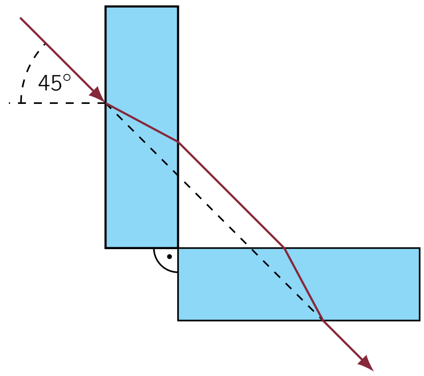
$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \, .$$

Bei Eintritt in den ersten Glasquader wird der Lichtstrahl zum Lot hin gebrochen. Beim Austritt aus diesem vom Lot weg. Durch zweimalige Anwendung des Brechungsgesetzes ist leicht einzusehen, dass der Lotwinkel nach Austritt aus dem ersten Glasquader erneut 45° beträgt. Der Lichtstrahl ist allerdings verglichen mit dem Verlauf des ungebrochenen Lichtstrahls nach oben parallel verschoben.

Der Lichtstrahl trifft dann unter einem Lotwinkel von ebenfalls 45° auf den zweiten Glasquader und wird analog durch diesen lediglich verschoben, dieses Mal zu dem gestrichelten Verlauf hin. Da beide Glasquader gleich groß sind, ist auch die Verschiebung gleich groß, so dass der Lichtstrahl nach dem Austritt aus dem zweiten Glasquader auf der gestrichelten Linie verläuft.

Damit ist Antwort D korrekt.

Bemerkung: Man kann die Lösung auch direkt durch Konstruktion des Verlaufs des Lichtstrahls mit Hilfe des Brechungsgesetzes in der Skizze herleiten. Dies ist nebenstehend skizziert. Der Lotwinkel in den Glasquadern beträgt dabei etwa 28°.



Korrekte Antwort: *D*

Bewertung - Lichtbrechung (MC-Aufgabe)		Punkte
2	Erkennen der Parallelverschiebung des Lichtstrahls durch Glasquader	1.0
	Begründen der Parallelverschiebung	1.0
	Erkennen, dass die zweite Verschiebung gleich groß aber entgegengesetzt ist	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 3 Schwingung mit Hindernis (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Eine kleine Metallkugel hängt, wie nebenstehend skizziert, an einem dünnen Faden der Länge L von der Decke. Wenn dieses Fadenpendel leicht zur Seite ausgelenkt und losgelassen wird, schwingt es mit einer Schwingungsperiodendauer $T = 1{,}0\,\mathrm{s}$ parallel zur Wand.

Nun wird ein Nagel in einem Abstand von $\frac{3}{4}L$ von der Decke fest in die Wand geschlagen. Das Fadenpendel stößt beim Schwingen nach rechts an den Nagel und wird durch diesen behindert. Die Kugel wird jetzt aus der in Abbildung 2 rechts gezeigten Position losgelassen.

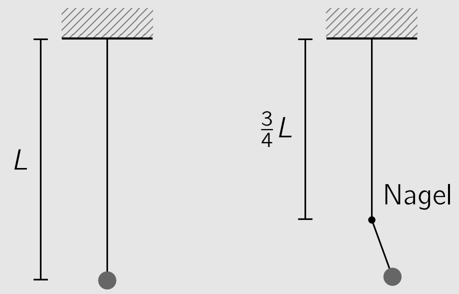
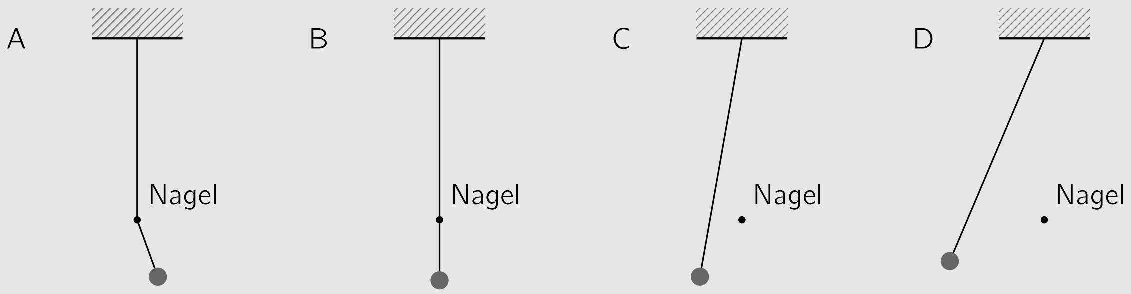


Abbildung 2: *Skizze des Pendels ohne (links) und mit Nagel in der Wand (rechts).*

Welche der folgenden Abbildungen zeigt die Position der Kugel 1,5 s nach dem Loslassen?



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Pendelperiode T eines Fadenpendels bei kleinen Auslenkungen ist proportional zur Wurzel aus der Pendellänge. Durch den Nagel wird die Pendellänge für einen Teil der Schwingung auf ein Viertel reduziert. Dadurch halbiert sich die Schwingungsdauer für den Teil der Schwingung, der durch den Nagel eingeschränkt ist.

Für die Pendelbewegung aus der anfänglichen Lage (in A gezeigt) bis zum Durchgang durch die Ruhelage (B) benötigt das Pendel daher eine Zeit von $\frac{1}{8}T$. Nach $\frac{3}{8}T$ ist es auf dem höchsten Punkt auf der anderen Seite angekommen (C) und nach $\frac{5}{8}T$ durchläuft es erneut die Ruhelage, bevor es nach $\frac{6}{8}T = \frac{3}{4}T$ wieder Position in A erreicht. 1,5 s oder $\frac{3}{2}T$ nach dem Loslassen hat das Pendel daher bereits zwei volle Schwingungsperioden durchlaufen und befindet sich wieder bei Position A.

Antwort A ist also die gesuchte Lösung.

Hinweis: Position D kann von dem Pendel gar nicht erreicht werden, da das Pendel dann höher wäre als in der ursprünglichen Lage, was energetisch unmöglich ist.

Korrekte Antwort: *A*

Bewertung - Schwingung mit Hindernis (MC-Aufgabe)		Punkte
3	Angeben der Abhängigkeit der Periodendauer von der Pendellänge	1.0
	Diskussion der Schwingung und Bestimmen der Periodendauer mit Nagel zu $\frac{3}{4}\,T$	2.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 4 Interferenz (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

In einem Versuch fällt einfarbiges Laserlicht senkrecht auf ein optisches Gitter mit 300 Linien pro mm. Hinter dem Gitter wird das Interferenzmuster auf einem Schirm beobachtet. Der Abstand des Schirms zum Gitter ist dabei sehr groß gegenüber der Ausdehnung des Interferenzmusters.

Die nebenstehenden Graustufenbilder zeigen die bei Verwendung von zwei Lasern mit unterschiedlichen Wellenlängen aber ansonsten gleicher Versuchsanordnung auf dem Schirm entstehenden Interferenzmuster. Die Wellenlänge des vom ersten Laser emittierten Lichts beträgt 650 nm.

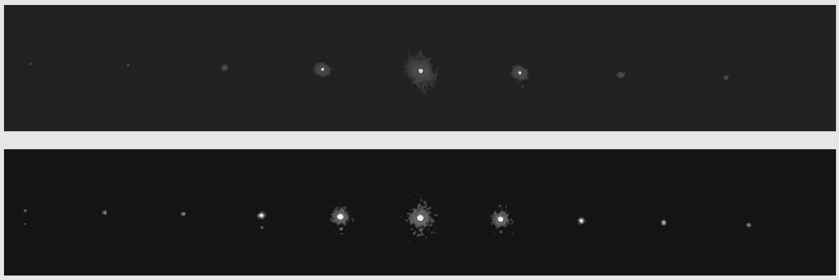


Abbildung 3: *Interferenzmuster auf dem Schirm für eine Wellenlänge von* 650 nm *(oben) und eine zweite unbekannte Wellenlänge (unten). Die Bilder zeigen den gleichen Ausschnitt des Schirms.*

Wie groß ist die Wellenlänge des vom zweiten Laser emittierten Laserlichts?

A etwa 450 nm B etwa 530 nm C etwa 610 nm D etwa 690 nm

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Da der Abstand des Schirms zum Gitter groß verglichen mit dem Interferenzmuster auf dem Schirm ist, kann die Interferenz für kleine Winkel zu dem einfallenden Strahl betrachtet werden. Für den Abstand d_n des n-ten Interferenzmaximums auf dem Schirm vom Hauptmaximum in der Mitte gilt daher

$$n\,\lambda = g\,\frac{d_n}{\ell}\,. \tag{4.1}$$

Dabei bezeichnen λ die Wellenlänge des verwendeten Laserlichts, g die Gitterkonstante des optischen Gitters und ℓ den Abstand des Gitters vom Schirm. Bezeichne mit $\lambda_1 = 650\,\mathrm{nm}$ die Wellenlänge des ersten Lasers und mit λ_2 die unbekannte Wellenlänge des zweiten Lasers. Da für beide Laser der gleiche Versuchsaufbau verwendet wurde, gilt bei Betrachtung der gleichen Beugungsordnung n mit (4.1)

$$\frac{\lambda_1}{d_{n,1}} = \frac{\lambda_2}{d_{n,2}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\lambda_2 = \lambda_1\,\frac{d_{n,2}}{d_{n,1}}}\,. \tag{4.2}$$

In den Abbildungen kann man zum Beispiel den Abstand der Interferenzmaxima zweiter Ordnung ausmessen und vergleichen. Es ergibt sich ein Verhältnis von $\frac{d_{n,2}}{d_{n,1}} \approx 0{,}81 \pm 0{,}01$. Damit beträgt die Wellenlänge des zweiten Lasers $\lambda_2 = (527 \pm 7)\,\mathrm{nm} \approx 530\,\mathrm{nm}$ und Antwort B ist korrekt.

Korrekte Antwort: *B*

Bewertung - Interferenz (MC-Aufgabe)		Punkte
4	Angeben der Bedingung (4.1) für konstruktive Interferenz	1.0
	Vergleich beider Laser und Finden eines Ausdrucks für die Wellenlänge (4.2)	1.0
	Bestimmen des Verhältnisses der Abstände korrespondierender Interferenzmaxima	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

Aufgabe 5 Radioaktiver Zerfall (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Im Folgenden werden drei radioaktive Präparate betrachtet. Sie bestehen anfänglich zur Zeit $t = 0$ zu 100 % aus einem einzigen radioaktiven Isotop, dem jeweiligen Mutternuklid. Die anfängliche Aktivität der Präparate wird jeweils mit A_0 bezeichnet. Auch die direkten Zerfallsprodukte, die Tochternuklide, sind wieder radioaktiv und zerfallen. Weitere nachfolgende Zerfälle werden nicht mehr betrachtet. Die Mutter- und Tochternuklide der drei Präparate sind:

Präparat ①: $^{226}\mathrm{Ra}$ ($T_{\text{Mutter}} = 1600\,\mathrm{a}$) $\rightarrow$ $^{222}\mathrm{Rn}$ ($T_{\text{Tochter}} = 3{,}8\,\mathrm{d}$)

Präparat ②: $^{211}\mathrm{Pb}$ ($T_{\text{Mutter}} = 36{,}1\,\mathrm{min}$) $\rightarrow$ $^{211}\mathrm{Bi}$ ($T_{\text{Tochter}} = 2{,}14\,\mathrm{min}$)

Präparat ③: $^{214}\mathrm{Pb}$ ($T_{\text{Mutter}} = 26{,}8\,\mathrm{min}$) $\rightarrow$ $^{214}\mathrm{Bi}$ ($T_{\text{Tochter}} = 19{,}9\,\mathrm{min}$)

Dabei sind mit T_{Mutter} bzw. T_{Tochter} die Halbwertszeiten der jeweiligen Nuklide angegeben. Die folgenden Graphen stellen die zeitlichen Verläufe der Aktivitäten A sowohl des Mutternuklids als auch des Tochternuklids sowie der Gesamtaktivität für die drei Präparate dar.

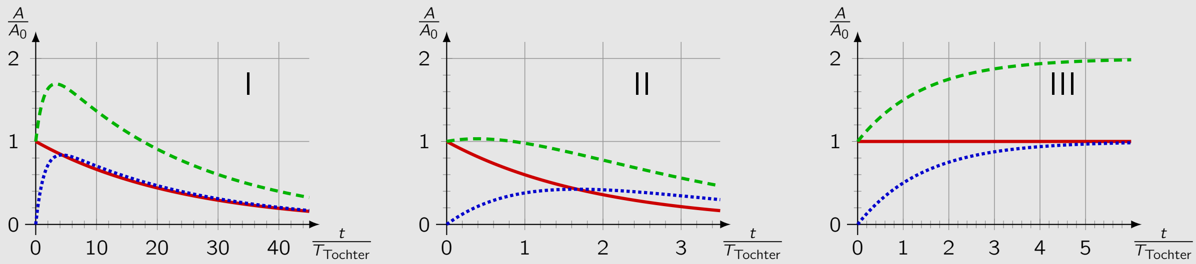


Abbildung 4: *Zeitliche Verläufe der Aktivitäten A sowohl des Mutternuklids als auch des Tochternuklids sowie der Gesamtaktivität der Präparate relativ zur Anfangsaktivität des Mutternuklids. Die Zeitachsen sind nach Vielfachen der Halbwertszeiten T_{Tochter} des jeweiligen Tochternuklids skaliert.*

Welches der drei Nuklid-Paare gehört zu welchem Diagramm?

	①	②	③
A	I	II	III
B	II	III	I
C	III	II	I
D	III	I	II

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die grün gestrichelte Kurve beschreibt jeweils die Summe der beiden Aktivitäten, denn nur sie kann größer als A_0 sein. Die roten Kurven stellen die Aktivitäten des Mutternuklids dar. Diese muss mit

A_0 beginnen. Für die Aktivität des Tochternuklids kommen daher nur die blau gepunkteten Kurven in Frage. Sie beginnen bei 0, da anfangs noch keine Kerne des Tochternuklids vorhanden sind.

① gehört zu III, da die Halbwertszeit des Radiumisotops um ein Vielfaches größer ist als die des Radonisotops und die Aktivität des Mutternuklids daher bei den betrachteten Zeiten nahezu konstant bleibt.

② gehört zu I und ③ gehört zu II. In beiden Fällen ist die Halbwertszeit des Tochternuklids immer noch kleiner als die des Mutternuklids. Im erstgenannten Fall ist aber das Verhältnis $\frac{T_{\text{Mutter}}}{T_{\text{Tochter}}}$ größer, so dass die Aktivität des Mutternuklids mit der Zeit, gemessen in Vielfachen der Halbwertszeit des Tochternuklids, langsamer abnimmt. Damit ist die letzte Antwort richtig.

Korrekte Antwort: *D*

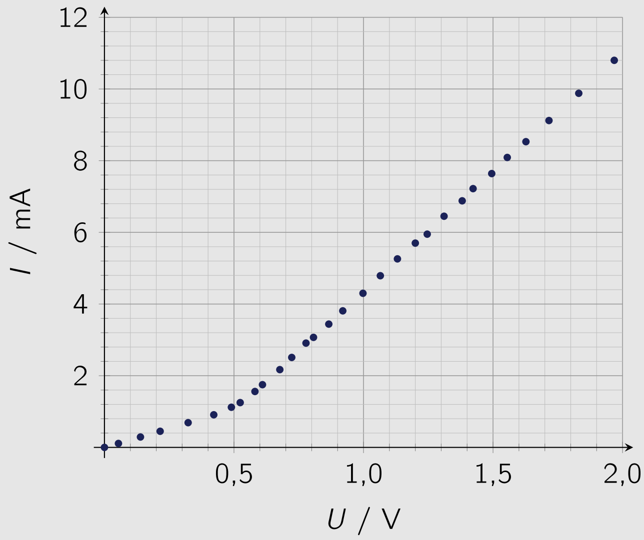
Bewertung - Radioaktiver Zerfall (MC-Aufgabe)		**Punkte**
5	Richtiges Zuordnen der Graphen zu den Aktivitäten	1.0
	Erkennen und Begründen, dass ① zu III gehört	1.0
	Erkennen, dass das Verhältnis der Halbwertszeiten entscheidend für den Verlauf von ② und ③ ist sowie richtige Zuordnung	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	2.0
		5.0

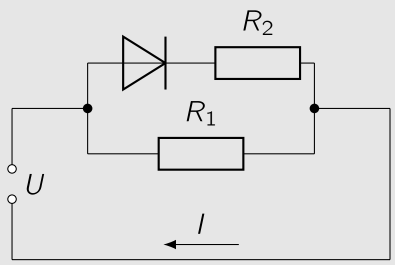
Hinweis: In der gedruckten Klausur waren die Zeitachsen der Diagramme falsch skaliert. Bei der Erstellung der Graphen wurde für die Umrechnung von Halbwertszeiten auf Zeitkonstanten fälschlicherweise nicht durch den Faktor $\ln 2$ geteilt sondern mit diesem multipliziert. Dadurch erschienen die Kurven im zeitlichen Verlauf alle um den gleichen Faktor gestaucht. Der qualitative Verlauf der Kurven und auch die Argumentation zur Lösung der Aufgabe sind davon nicht betroffen.

Aufgabe 6 Diode und Widerstände (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Eine Diode ist ein elektronisches Bauelement, das vereinfacht in einer Richtung, der Sperrrichtung, komplett isolierend wirkt. In umgekehrter Richtung, der Durchlassrichtung, lässt die Diode bis zu einer bestimmten Spannung auch kaum Strom passieren. Ab dieser Spannung verhält sie sich aber näherungsweise wie ein idealer Leiter.

In der nachfolgend abgebildeten Schaltung sind eine Diode (–▷|–) und zwei Widerstände mit Widerstandswerten R_1 und R_2 verbaut. In dem nebenstehenden Graphen sind Messwerte der Stromstärke I in der Schaltung als Funktion der angelegten Spannung U dargestellt.





Welche Widerstandswerte passen am besten zu den dargestellten Messwerten?

A $R_1 = 220\,\Omega$ und $R_2 = 670\,\Omega$

B $R_1 = 220\,\Omega$ und $R_2 = 330\,\Omega$

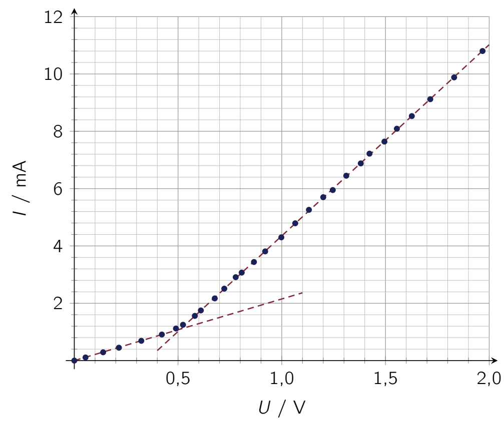
C $R_1 = 470\,\Omega$ und $R_2 = 220\,\Omega$

D $R_1 = 470\,\Omega$ und $R_2 = 150\,\Omega$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Der Verlauf der Messwerte lässt sich in zwei Bereiche aufteilen. Solange die Spannung nicht groß genug ist, wirkt die Diode als Isolator und die Schaltung verhält sich so, als würde sie den oberen Parallelzweig gar nicht enthalten. Sobald die Spannung aber groß genug wird, ist die Diode sehr gut leitend und es fällt eine nahezu konstante Spannung über ihr ab. Daher wirkt sich eine weitere Erhöhung der Spannung auch direkt auf den Widerstand im oberen Parallelzweig aus. Die Strom-Spannungs-Kennlinie verläuft daher im Weiteren wie die einer Parallelschaltung der beiden Widerstände. In dem nebenstehenden Graphen ist der lineare Anstieg der Stromstärke mit der Spannung in den beiden Bereichen gekennzeichnet.



Aus den Steigungen $b_1 \approx \frac{2{,}40\,\text{mA}}{1{,}10\,\text{V}} \approx 2{,}18 \cdot 10^{-3}\,\Omega^{-1}$ und $b_2 \approx \frac{6{,}00\,\text{mA}}{0{,}90\,\text{V}} \approx 6{,}67 \cdot 10^{-3}\,\Omega^{-1}$ der

Ausgleichsgeraden lassen sich die Widerstandswerte bestimmen. Es ergeben sich:

$$R_1 = \frac{1}{b_1} \approx 459\,\Omega \qquad \text{und} \qquad R_2 = \left(\frac{1}{R_{\text{parallel}}} - \frac{1}{R_1}\right)^{-1} = \frac{1}{b_2 - b_1} \approx 223\,\Omega\,. \tag{6.1}$$

Damit passen die Widerstandswerte $R_1 = 470\,\Omega$ und $R_2 = 220\,\Omega$ am besten zu den dargestellten Messwerten.

Korrekte Antwort: *C*

Bewertung - Diode und Widerstände (MC-Aufgabe)		**Punkte**
6	Erkennen der beiden Bereiche der Strom-Spannungs-Kennlinie	1.0
	Beschreiben passender Schaltungen in beiden Bereichen	1.0
	Bestimmen der Widerstandswerte aus Steigungen	1.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Aufgabe 7 Wärmeleitung (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Die Enden von drei runden Metallstäben aus identischem Material werden jeweils auf konstanten Temperaturen gehalten. Für die Stäbe sind die folgenden Daten bekannt:

Stab I - Durchmesser: 2,0 cm, Länge: 20 cm, Temperaturen der Stabenden: 50 °C und 20 °C
Stab II - Durchmesser: 3,0 cm, Länge: 50 cm, Temperaturen der Stabenden: 60 °C und 30 °C
Stab III - Durchmesser: 4,0 cm, Länge: 80 cm, Temperaturen der Stabenden: 70 °C und 40 °C

Wie verhalten sich die durch die Stäbe aufgrund von Wärmeleitung übertragenen Wärmeleistungen P_{I}, P_{II} und P_{III} zueinander (Die Leistungen können alle als positiv angenommen werden)?

A $P_{\text{I}} < P_{\text{II}} = P_{\text{III}}$ B $P_{\text{I}} = P_{\text{II}} < P_{\text{III}}$ C $P_{\text{II}} < P_{\text{I}} = P_{\text{III}}$ D $P_{\text{III}} < P_{\text{II}} < P_{\text{I}}$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die übertragene Wärmeleistung P ist nach dem Fourierschen Gesetz proportional zur Querschnittsfläche des Stabes und damit zum Quadrat des Durchmessers d. Außerdem ist sie proportional zur Temperaturdifferenz ΔT zwischen den Stabenden und invers proportional zur Länge des Stabes ℓ. Es gilt also:

$$P \sim \frac{d^2}{\ell}\,\Delta T\,. \tag{7.1}$$

Die Temperaturdifferenz ist für alle Stäbe identisch. Entscheidend ist daher das Verhältnis d^2/ℓ. Dieses ist für Stab I und III identisch und beträgt für Stab II nur 9/10 des Wertes der anderen beiden Stäbe. Damit ist $P_{\text{II}} < P_{\text{I}} = P_{\text{III}}$

Korrekte Antwort: *C*

Bewertung - Wärmeleitung (MC-Aufgabe)		**Punkte**
7	Nutzen der relevanten Proportionalitäten aus (7.1)	1.5
	Erkennen, dass die Temperaturdifferenz gleich ist	0.5
	Vergleichen der Verhältnisse d^2/ℓ für die Stäbe	1.0
	Angeben des korrekten Ergebnisses	2.0
		5.0

Langaufgaben

Bearbeite die folgenden drei Aufgaben ebenfalls in den dafür vorgesehenen Boxen. Anders als bei den Multiple-Choice Aufgaben sind keine Lösungsmöglichkeiten gegeben. Beschreibe deinen Lösungsweg so, dass er gut nachvollziehbar aber nicht unnötig lang ist. Wenn du also zum Beispiel den Energieerhaltungssatz verwendest, schreibe dies kurz hin.

Aufgabe 8 Beschichtete Linse (17 Pkt.)

Bei der Herstellung von optischen Linsen werden diese oft mit einer dünnen Schicht versehen, um Reflexionen in bestimmten Wellenlängenbereichen zu verringen.

Betrachte eine Linse aus einem Material mit einem Brechungsindex von 1,40. Diese soll mit einer möglichst dünnen Schicht eines transparenten Materials mit Brechungsindex 1,24 überzogen werden, um Reflexionen bei senkrechtem Einfall von Licht einer Wellenlänge von 500 nm zu minimieren.

8.a) Bestimme, wie dick diese Schicht sein sollte, um die Intensität des reflektierten Lichtes zu minimieren. *(5 Pkt.)*

Wenn Licht senkrecht auf einen Übergang von einem Medium mit Brechungsindex n_A zu einem mit Brechungsindex n_B einfällt, wird ein Anteil

$$R_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \left(\frac{n_\mathrm{B} - n_\mathrm{A}}{n_\mathrm{B} + n_\mathrm{A}}\right)^2$$

der eintreffenden Lichtintensität reflektiert. Da die reflektierten Anteile bei den vorliegenden Bedingungen sehr klein sind, ist es ausreichend, nur einfache Reflexionen zu betrachten.

8.b) Vergleiche die Intensität des an der beschichteten Linse bei der angegebenen Wellenlänge insgesamt reflektierten Lichtes mit der Intensität des Lichtes, das an einer unbeschichteten Linse reflektiert wird. Berechne dafür das Verhältnis dieser Intensitäten. *(7 Pkt.)*

Trotz der beschriebenen Beschichtung ist die Intensität des reflektierten Lichtes zwar gering aber nicht Null.

8.c) Gib an und begründe, wie die Beschichtung verändert werden müsste, um eine deutlich bessere Antireflexionswirkung bei der betrachteten Wellenlänge zu erzielen. *(5 Pkt.)*

Lösung

8.a)

Rechnungen und Erläuterungen

Die Reflexionen werden minimiert, wenn die an der Beschichtung und die direkt an der Oberfläche der Linse reflektierten Lichtstrahlen destruktiv miteinander interferieren, die Differenz der optischen Weglängen also gerade einer halben Wellenlänge entspricht. Für die Dicke d der Beschichtung muss also gelten:

$$\boxed{d = \frac{\lambda}{4\,n_1} \approx 0{,}101\,\mu\mathrm{m}}\,. \tag{8.1}$$

Hierbei wurde der Brechungsindex der Beschichtung mit n_1 bezeichnet und ausgenutzt, dass an beiden Übergängen ein identischer Phasensprung der Lichtwellen auftritt.

8.b)

Rechnungen und Erläuterungen

Bezeichne mit R_1 den reflektierten Anteil der einfallenden Intensität für den Übergang von Luft zur Beschichtung und mit R_2 den für den Übergang von der Beschichtung zur Linse (Brechungsindex n_2). Dann sind

$$R_1 = \left(\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}\right)^2 \approx 1{,}15\,\%\,, \qquad \text{sowie} \qquad R_2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 \approx 0{,}367\,\%\,. \tag{8.2}$$

Bei der Interferenz überlagern sich die an der Oberseite der Beschichtung reflektierte und die an der Grenzfläche von der Beschichtung zur Linse reflektierte Welle. Die Intensität des insgesamt an der beschichteten Linse reflektierten Lichtes ergibt sich aus einer Überlagerung der Amplituden der reflektierten Anteile. Da die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist, müssen für die Interferenz die Wurzeln der reflektierten Intensitäten betrachtet werden. Daher ergibt sich die mit Beschichtung reflektierte Lichtintensität zu[a]

$$R_\text{mit} = \left(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}\right)^2 = \left(\left|\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}\right| - \left|\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right|\right)^2 \approx 0{,}22\,\%\,. \tag{8.3}$$

Ohne Beschichtung tritt keine Interferenz auf und die Linse reflektiert einen Anteil

$$R_\text{ohne} = \left(\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1}\right)^2 \approx 2{,}8\,\% \tag{8.4}$$

der auftreffenden Lichtintensität. Das Verhältnis der Intensitäten beträgt

$$\boxed{\frac{R_\text{mit}}{R_\text{ohne}} \approx 0{,}078}\,. \tag{8.5}$$

Die Beschichtung führt also zu einer Reduzierung der Reflexionen um mehr als 92 %.

[a] Eigentlich müsste hier $\sqrt{R_1}$ mit $\sqrt{(1 - R_1)^2\,R_2}$ verglichen werden, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass die Intensität des an der Grenzfläche zur Linse reflektierten Lichtes um die Reflexionsverluste an der Beschichtungsoberseite reduziert wird. Da die reflektierten Anteile aber sehr klein sind, führt dies nur zu geringfügigen Abweichungen (weniger als 3 % in R_mit).

8.c)

Rechnungen und Erläuterungen

Um eine noch bessere Antireflexionsbeschichtung zu erzielen, muss der Brechungsindex des Beschichtungsmaterials so angepasst werden, dass die reflektierten Intensitätsanteile R_1 und R_2 identisch sind, da dann nahezu das gesamte reflektierte Licht (ohne Berücksichtigung von Mehrfachreflexionen) durch Interferenz ausgelöscht wird. Damit die reflektierten Anteile gleich sind, muss gelten:

$$\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}\,. \tag{8.6}$$

Damit ergibt sich für den notwendigen Brechungsindex n_1 des Beschichtungsmaterials

$$\boxed{n_1 = \sqrt{n_2} \approx 1{,}18}\,. \tag{8.7}$$

Bewertung - Beschichtete Linse		**Punkte**
8.a)	Erkennen, dass Reflexion durch destruktive Interferenz unterdrückt wird	2.0
	Angeben der Interferenzbedingung (8.1)	2.0
	Bestimmen der notwendigen Schichtdicke in (8.1)	1.0
8.b)	Berücksichtigen, dass sich Intensität des an der beschichteten Linse reflektierten Lichts aus den Amplituden bestimmt	2.0
	Bestimmen der reflektierten Intensität mit Beschichtung	2.0
	Bestimmen der reflektierten Intensität ohne Beschichtung	2.0
	Berechnen des Verhältnisses der Intensitäten (8.5)	1.0
8.c)	Formulieren und Begründen der Idee identischer Reflexionsintensitäten	2.0
	Aufstellen der Bedingung (8.6)	1.0
	Bestimmen des notwendigen Brechungsindexes der Beschichtung (8.7)	2.0
		17.0

Hinweis: Wenn Teilnehmende die Intensität des an der beschichteten Linse reflektierten Lichts direkt aus den Intensitäten der reflektierten Anteile berechnen, ergibt sich $R_{\text{mit}} = R_1 - R_2 \approx 0{,}78\,\%$. In diesem Fall sollten die ersten beiden Punkte für den Aufgabenteil nicht gegeben werden.

Aufgabe 9 Schneller als der Wind (20 Pkt.)

Das Foto rechts zeigt das Versuchsfahrzeug *Blackbird*. Das Fahrzeug besitzt keine eigenen Energiespeicher wie Batterien oder Treibstoffe, sondern wird alleine durch den Wind angetrieben. In dem Fahrzeug befindet sich für den Antrieb lediglich ein Getriebe, das Energie zwischen den Rädern und dem Propeller übertragen kann.

Mit dem *Blackbird* wurden Testfahrten auf ebenem Grund bei konstanter Windrichtung und -geschwindigkeit durchgeführt - sowohl mit als auch direkt gegen den Wind. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Fahrzeugs war dabei also die ganze Zeit parallel bzw. antiparallel zur Windgeschwindigkeit $\vec{v}_\mathrm{W}$. Du kannst annehmen, dass bei den Testfahrten jeweils eine konstante Geschwindigkeit erreicht wurde.

Abbildung 5: *Foto des durch Wind angetriebenen Blackbird. (Quelle en.wikipedia.org; Stephen Morris; CC BY-SA 3.0).*

Die Konstrukteure des *Blackbird* behaupteten, dass sie bei Fahrten in Richtung der Windgeschwindigkeit schneller als der Wind, also mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ gefahren wären, für die $|\vec{v}| > |\vec{v}_\mathrm{W}|$ ist. Dies wurde von einigen Personen als unphysikalisch und damit unmöglich kritisiert. Aber ist es das auch?

9.a) Begründe, warum es bei konstanter Windgeschwindigkeit v_W grundsätzlich möglich ist, mit einer konstanten Geschwindigkeit $v > v_\mathrm{W}$ in Richtung des Windes zu fahren. Gib an, ob dabei Energie von dem Propeller auf die Räder oder umgekehrt übertragen wird. *(8,0 Pkt.)*

Nimm für eine Abschätzung der erreichbaren Geschwindigkeit an, dass bei der Übertragung von Energie zwischen der umgebenden Luft zu dem Boden und umgekehrt ein Anteil α der verfügbaren Leistung für die weitere Nutzung verloren geht. Wenn also beispielsweise Energie von der umgebenden Luft über den Propeller, das Getriebe und die Räder auf den Boden übertragen wird, kann von der durch den Wind an das Fahrzeug übertragenen Energie nur ein Anteil $1-\alpha$ für den Antrieb genutzt werden.

9.b) Bestimme die Geschwindigkeit v, die das Fahrzeug bei der Fahrt in Windrichtung erreichen kann. Drücke dein Ergebnis durch v_W und α aus. *(6,0 Pkt.)*

9.c) Bestimme die erreichbare Geschwindigkeit für die Fahrt direkt gegen den Wind. Drücke auch diese durch v_W sowie α aus und begründe, ob es auch in diesem Fall möglich ist, schneller zu sein als der Wind. *(6,0 Pkt.)*

Lösung

9.a) Rechnungen und Erläuterungen

Wenn sich das Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, müssen sich die auf das Fahrzeug in horizontaler Richtung wirkenden Kräfte aufheben. Die Kraft F, mit der der Wind auf das Fahrzeug wirkt, muss also betragsmäßig gleich groß sein, wie die Kraft, die an der Kontaktfläche der Räder mit dem Boden auf das Fahrzeug in horizontaler Richtung wirkt.

Die bei der Bewegung durch den Wind bzw. den Boden zur Verfügung gestellte oder absorbierte Energie ist proportional zu dem Produkt der Kraft F und der relativen Geschwindigkeit des Fahrzeugs gegenüber der umgebenden Luft bzw. dem Boden.

$$E \sim F\, v_{\text{relativ}}\,. \tag{9.1}$$

Wenn $v > v_{\text{W}}$ die Fahrtgeschwindigkeit des Fahrzeugs gegenüber dem Boden bezeichnet, ist die relative Geschwindigkeit zur umgebenden Luft bei Fahrt in Windrichtung gegeben durch $v - v_{\text{W}} < v$. Trotz des Kräftegleichgewichtes ist es daher möglich, dass durch die Kraft am Boden eine größere Energie eingebracht wird als durch die Kraft, mit der der Wind auf das Fahrzeug wirkt, absorbiert wird. Dies ist notwendig, um Energieübertragungsverluste auszugleichen. Das Fahrzeug kann bei dieser Geschwindigkeit also grundsätzlich betrieben werden. Dabei wird Energie durch die Kraft mit der größeren relativen Geschwindigkeit eingespeist. Bei Fahrt in Windrichtung wird also Energie von den Rädern zum Propeller übertragen.

9.b)

Rechnungen und Erläuterungen

Die bei Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit von dem Boden in einer Zeit t auf das Fahrzeug übertragene Energie E_{B} und die an den Wind übetragene Energie E_{W} sind entsprechend der Ausführungen im vorigen Aufgabenteil gegeben durch

$$E_{\text{B}} = F\, v\, t \qquad \text{und} \qquad E_{\text{W}} = F\,(v - v_{\text{W}})\, t\,. \tag{9.2}$$

Da die Energie in diesem Fall von dem Boden auf den Wind übertragen wird, gilt

$$E_{\text{W}} = (1-\alpha)\, E_{\text{B}} \qquad \text{und damit} \qquad F\,(v - v_{\text{W}}) = (1-\alpha)\, F\, v\,. \tag{9.3}$$

Unabhängig von der Größe der Kraft F folgt daraus für die erreichbare Geschwindigkeit

$$\boxed{v = \frac{v_{\text{W}}}{\alpha}}\,. \tag{9.4}$$

Für große Verluste α ist die erreichbare Geschwindigkeit also nahe der Windgeschwindigkeit. Durch hinreichend kleine Verluste können aber auch sehr große Geschwindigkeiten erreicht werden.

9.c)

Rechnungen und Erläuterungen

Die zwischen Fahrzeug und Boden übertragene Energie E_{B} und die zwischen Wind und Fahrzeug übetragene Energie E_{W} sind nun

$$E_{\text{B}} = F\, v\, t \qquad \text{und} \qquad E_{\text{W}} = F\,(v + v_{\text{W}})\, t\,. \tag{9.5}$$

Bei Fahrt gegen den Wind wird daher Energie von dem Propeller auf die Räder übertragen, so dass gilt

$$E_{\text{B}} = (1-\alpha)\, E_{\text{W}} \qquad \text{bzw.} \qquad F\, v = (1-\alpha)\, F\,(v + v_{\text{W}})\,. \tag{9.6}$$

Damit ergibt sich die bei Fahrt gegen den Wind erreichbare Geschwindigkeit zu

$$\boxed{v = v_{\text{W}}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)}\,. \tag{9.7}$$

Für große Leistungsverluste geht die erreichbare Geschwindigkeit damit gegen Null. Durch hinreichend kleine Verluste können aber auch in diesem Fall sehr große Geschwindigkeiten erreicht werden. Insbesondere ist auch eine Fahrt mit Geschwindigkeiten größer als der Windgeschwindigkeit möglich.

Hinweis: Mit dem *Blackbird* wurden in beide Fahrtrichtungen tatsächlich Geschwindigkeiten größer als die Windgeschwindigkeit erreicht (de.wikipedia.org/wiki/Blackbird_(Landsegler))

Bewertung - Schneller als der Wind		**Punkte**
9.a)	Erkennen des Kräftegleichgewichtes bei Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit	2.0
	Erkennen der Proportionalität von Energie zur Kraft	1.0
	Erkennen der Proportionalität von Energie zur relativen Geschwindigkeit	1.0
	Verwenden der korrekten relativen Geschwindigkeiten	1.0
	Begründen, dass bei Fahrt mit dem Wind mehr Energie eingebracht als absorbiert werden kann, so dass die Fahrt mit $v > v_W$ grundsätzlich möglich ist	2.0
	Angeben, dass dabei Energie von den Rädern zu dem Propeller übertragen wird	1.0
9.b)	Angeben der übertragenen Energien (9.3)	2.0
	Verwenden des Verlustfaktors und Aufstellen der Bilanz (9.3)	2.0
	Bestimmen der erreichbaren Geschwindigkeit (9.4)	2.0
9.c)	Angeben der übertragenen Energien (9.6)	2.0
	Verwenden des Verlustfaktors und Aufstellen der Bilanz (9.6)	2.0
	Bestimmen der erreichbaren Geschwindigkeit (9.7)	2.0
		20.0

Aufgabe 10 Kernfusion (22 Pkt.)

Die kontrollierte Kernfusion könnte in Zukunft einen wichtigen Beitrag zur Energieversorgung leisten und wird daher in der Plasmaphysik intensiv beforscht.

Im Folgenden sollst du die Verschmelzung oder Fusion von Kernen der beiden Wasserstoffisotope Deuterium (^{2}H) und Tritium (^{3}H) untersuchen. Als Produkt der Fusion entstehen ein Heliumkern ^{4}He und ein Neutron ^{1}n. Die Reaktion kann dargestellt werden als

$$^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \longrightarrow {}^4\mathrm{He} + {}^1\mathrm{n} + E\,.$$

Dabei bezeichnet E die bei der Fusion in Form von kinetischer Energie freigesetzte Energie. Die Ruhemassen der Teilchen und Kerne betragen:

Deuteriumkern:	$m_\mathrm{D} = 3{,}344\,494 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Tritiumkern:	$m_\mathrm{T} = 5{,}008\,268 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Heliumkern:	$m_\mathrm{He} = 6{,}646\,477 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Neutron:	$m_\mathrm{n} = 1{,}674\,927 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

10.a) Berechne die bei einer einzelnen Kernfusion durch obige Reaktion freigesetzte Energie E. Bestimme die jeweils auf den Heliumkern und auf das Neutron entfallenden Anteile der Energie E_He und E_n für den Fall, dass die anfängliche kinetische Energie der Wasserstoffisotope vernachlässigbar ist. Gib deine Ergebnisse in der Einheit MeV mit $1\,\mathrm{MeV} \approx 1{,}602\,177 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}$ an. *(8,0 Pkt.)*

Damit die Fusionsreaktion stattfinden kann, müssen die Wasserstoffkerne nah genug zusammen kommen. Dies kann dadurch erreicht werden, dass ein anfänglich elektrisch neutrales Gas dieser Isotope auf sehr große Temperaturen aufgeheizt wird. Das Gas ist dann vollständig ionisiert und wird Plasma genannt.

10.b) Schätze ab, wie groß die Temperatur des Plasmas mindestens sein muss, damit die Wasserstoffkerne auf einen Abstand von unter $10^{-14}\,\mathrm{m}$ zusammenkommen können und damit eine Fusionsreaktion möglich wird. Nimm dazu an, dass sich alle Kerne eines Isotops mit dem gleichen Geschwindigkeitsbetrag bewegen. *(4,0 Pkt.)*

Tatsächlich ist der Geschwindigkeitsbetrag der Kerne nicht für alle Kerne identisch. Dadurch, dass einige Kerne mehr kinetische Energie besitzen als andere, kann die Kernfusion auch schon bei geringeren Temperaturen einsetzen. Betrachte im Folgenden ein Plasma, das zu gleichen Teilen aus Deuterium- und Tritiumkernen mit einer Teilchendichte von jeweils $n = 1{,}0 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}$ besteht. Die Temperatur des Plasmas betrage $T = 1{,}0 \cdot 10^{8}\,\mathrm{K}$.

Um das Plasma auf diesen hohen Temperaturen zu halten und damit die Kernfusion über einen längeren Zeitraum aufrecht zu erhalten, müssen die Energieverluste des Plasmas ausgeglichen werden. Die bei der Fusion freigesetzten, elektrisch neutralen Neutronen verlassen das Plasma sehr schnell und ihre kinetische Energie steht dem Plasma nicht mehr zur Verfügung. Zusätzlich treten Energieverluste durch Strahlung und Transport auf. Die insgesamt resultierende Verlustleistung P_V des Plasmas lässt sich mit Hilfe der inneren thermischen Energie des Plasmas U und der so genannten Energieeinschlusszeit τ ausdrücken durch

$$P_\mathrm{V} = \frac{U}{\tau}\,.$$

Du kannst annehmen, dass sich das Plasma in guter Näherung wie ein ideales Gas verhält und für die Energieeinschlusszeit den Wert $\tau = 1{,}0\,\mathrm{s}$ verwenden.

Die bei der Fusion erzeugten Heliumkerne hingegen verbleiben im Plasma und ihre kinetische Energie heizt das Plasma. Die Heizleistung P_{H} ist eine Funktion der Kernreaktionsratendichte r, also der mittleren Anzahl der Fusionsreaktionen pro Zeit- und Volumeneinheit, des Plasmavolumens V sowie der kinetischen Energie E_{He} der Heliumkerne und beträgt

$$P_{\mathrm{H}} = r\,E_{\mathrm{He}}\,V\,.$$

10.c) Bestimme die mittlere Kernreaktionsratendichte r für das Plasma bei konstanter Temperatur. Beachte dabei, dass das insgesamt elektrisch neutrale Plasma neben den Ionen auch Elektronen enthält. *(4,0 Pkt.)*

Für die technische Nutzung der Kernfusion ist es über das Aufrechterhalten der Temperatur hinaus auch erforderlich, das Plasma möglichst lange räumlich einzuschließen. Zur Kompensation des Plasmadruckes und damit zum Einschließen des Plasmas wird ein magnetisches Feld angelegt. Der durch dieses Feld erzeugte Druck lässt sich in einer vereinfachten Abschätzung durch die magnetische Flussdichte B und μ_0 ausdrücken (auftretende numerische Faktoren können zu 1 gesetzt werden).

10.d) Schätze ab, wie groß die magnetische Flussdichte B sein muss, um das beschriebene Plasma einzuschließen. *(6,0 Pkt.)*

Lösung

10.a) Rechnungen und Erläuterungen

Mit Hilfe der Masse-Energieäquivalenz lässt sich die frei werdende Energie ΔE ausdrücken als

$$\Delta E = (m_{\mathrm{D}} + m_{\mathrm{T}} - m_{\mathrm{He}} - m_{\mathrm{n}})\,c^2 \approx 2{,}822 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 17{,}61\,\mathrm{MeV}\,. \tag{10.1}$$

Selbst wenn diese Energie vollständig auf das Neutron übergehen würde, hätte dieses eine Geschwindigkeit von „nur“ etwa 20% der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Es ist also für die folgenden Betrachtungen ausreichend, eine klassische Betrachtung anzustellen und relativistische Effekte zu vernachlässigen.

Der Energie- und Impulserhaltungssatz liefern

$$\Delta E = E_{\mathrm{He}} + E_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{He}}\, v_{\mathrm{He}}^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{n}}\, v_{\mathrm{n}}^2 \quad \text{und} \quad m_{\mathrm{He}}\, v_{\mathrm{He}} = m_{\mathrm{n}}\, v_{\mathrm{n}}\,. \tag{10.2}$$

Damit ergibt sich durch Umformen für die Energieanteile

$$\boxed{\begin{aligned} E_{\mathrm{He}} &= \frac{m_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{n}}}\,\Delta E \approx 0{,}2013 \cdot \Delta E \approx 3{,}55\,\mathrm{MeV}\,,\\ E_{\mathrm{n}} &= \frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{n}}}\,\Delta E \approx 0{,}7987 \cdot \Delta E \approx 14{,}07\,\mathrm{MeV}\,. \end{aligned}} \tag{10.3}$$

10.b)

Rechnungen und Erläuterungen

Die mittlere kinetische Energie der Teilchen bei der Temperatur T beträgt $\frac{3}{2}\,k_\text{B}\,T$. Die mittlere kinetische Energie muss näherungsweise mindestens gleich dem Betrag der potentiellen Energie im Coulombfeld bei einem Abstand von $a = 1 \cdot 10^{-14}\,\text{m}$ sein, um die Teilchen nah genug für eine Fusionsreaktion zu bringen, d.h.

$$\frac{3}{2}\,k_\text{B}\,T \geq \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,. \tag{10.4}$$

Damit ergibt sich für die Temperatur die Abschätzung

$$\boxed{T \geq \frac{e^2}{6\,\pi\,\varepsilon_0\,a\,k_\text{B}} \approx 1{,}1 \cdot 10^9\,\text{K}}\,. \tag{10.5}$$

Hinweis: Für die Abschätzung kann auch die Summe der kinetischen Energien der beiden stoßenden Kerne oder die Schwerpunktsenergie als maximal zur Verfügung stehende kinetische Energie genommen werden. Dadurch ergibt sich jeweils ein kleinerer Wert für die Abschätzung Temperatur, der ebenfalls als korrekt angesehen werden sollte.

10.c)

Rechnungen und Erläuterungen

Das Plasma besteht aus Wasserstoffionen und einer gleichen Anzahl an Elektronen, die ebenfalls zur inneren Energie des Plasmas beitragen. Damit ist die Verlustleistung

$$P_\text{V} = \frac{4\,n\,\frac{3}{2}\,k_\text{B}\,T}{\tau}\,V = \frac{6\,n\,k_\text{B}\,T}{\tau}\,V\,. \tag{10.6}$$

Diese muss gleich der mittleren Heizleistung sein, um das Plasma bei einer konstanten Temperatur zu halten. Es muss also gelten:

$$P_\text{V} = P_\text{H} = r\,E_\text{He}\,V \quad \text{und damit} \quad \boxed{r = \frac{6\,n\,k_\text{B}\,T}{\tau\,E_\text{He}} \approx 1{,}5 \cdot 10^{18}\,\text{m}^{-3}\,\text{s}^{-1}}\,. \tag{10.7}$$

10.d)

Rechnungen und Erläuterungen

Der thermische Druck des Plasmas beträgt gemäß der Zustandsgleichung idealer Gase

$$p_\text{th} = 4\,n\,k_\text{B}\,T\,, \tag{10.8}$$

wobei $n = 10^{20}\,\text{m}^{-3}$ ist und der Druck erneut zu gleichen Teilen von den Wasserstoffkernen und den Elektronen herrührt.

Der durch das Magnetfeld erzeugte Druck p_B ist gemäß dem Hinweis in der Aufgabenstellung eine Funktion von B und μ_0. Dabei müssen in dem funktionalen Zusammenhang beide Seiten der Gleichung die gleiche physikalische Dimension und damit auch die gleichen SI-Einheiten besitzen.

Der Druck p_B wird in Newton pro Quadratmeter, also in der Einheit $\text{kg}\,\text{m}^{-1}\,\text{s}^{-2}$ angegeben. Dies wird durch $[p_B] = \text{kg}\,\text{m}^{-1}\,\text{s}^{-2}$ ausgedrückt. Die beiden anderen physikalischen Größen besitzen die folgenden SI-Einheiten: $[B] = \text{kg}\,\text{A}^{-1}\,\text{s}^{-2}$ und $[\mu_0] = \text{kg}\,\text{m}\,\text{A}^{-2}\,\text{s}^{-2}$. Ein

Ausdruck für p_B in Abhängigkeit von B und μ_0 lässt sich nun mit Hilfe eines Dimensionsvergleiches bestimmen. Bezeichne mit α und β die Exponenten, mit denen die Größen B und μ_0 in der Formel vorkommen. Dann gilt

$$\left[B^\alpha\,\mu_0^\beta\right] = \mathrm{kg}^{\alpha+\beta}\,\mathrm{m}^\beta\,\mathrm{s}^{-2\alpha-2\beta}\,\mathrm{A}^{-\alpha-2\beta} \overset{!}{=} \mathrm{kg}\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2} = [p_B]\,. \tag{10.9}$$

Ein Vergleich des Exponenten für die Längeneinheit ergibt, dass $\beta = -1$ und damit $\alpha = +2$ sein muss. Außerdem lassen sich B und μ_0 nicht zu einer einheitenlosen Größe kombinieren. Damit ist aufgrund der Dimensionsanalyse für den Druck durch das Magnetfeld nur die Kombination

$$p_B = \frac{B^2}{\mu_0} \tag{10.10}$$

möglich (weitere evtl. auftretende numerische Faktoren wurden zu 1 gesetzt).

Im Fall der Kompensation sind diese beiden Drücke gleich und wir erhalten für die dazu notwendige Flussdichte des Magnetfeldes

$$\boxed{B = 2\sqrt{\mu_0\,n\,k_\mathrm{B}\,T} = 0{,}83\,\mathrm{T}}\,. \tag{10.11}$$

Bewertung - Kernfusion		**Punkte**
10.a)	Verwenden der Masse-Energieäquivalenz	1.0
	Aufstellen der Energiedifferenz (10.1)	1.0
	Berechnen des Wertes der Energiedifferenz (10.1) und Angeben in MeV	1.0
	Begründen einer nichtrelativistischen Rechnung oder Durchführen einer relativistischen Betrachtung	1.0
	Aufstellen von Energie- und Impulssatz (10.2)	2.0
	Auflösen nach E_He und Berechnen des Wertes für E_He	1.0
	Auflösen nach E_n und Berechnen des Wertes von E_n	1.0
10.b)	Ausdrücken der mittleren kinetischen Energie durch die Temperatur	1.0
	Gleichsetzen mit der potentiellen Energie im Coulombfeld (10.4)	2.0
	Auflösen nach der Temperatur und Angeben des Ergebnis (10.5)	1.0
10.c)	Ausdrücken der inneren Energie durch die Temperatur	1.0
	Berücksichtigen des Beitrages der Elektronen	1.0
	Aufstellen einer Bilanzgleichung (10.7)	1.0
	Auflösen nach r und Bestimmen der mittleren Kernreaktionsratendichte	1.0
10.d)	Ausdrücken des Plasmadrucks mit Hilfe der Zustandsgleichung (10.8)	1.0
	Berücksichtigen des Beitrages der Elektronen	1.0
	Durchführen eines Dimensionsvergleichs zum Aufstellen des Ausdrucks (10.10)	3.0
	Auflösen nach B und Bestimmen der magnetischen Flussdichte (10.11)	1.0
		22.0