

47. Internationale PhysikOlympiade Zürich, Schweiz 2016



Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen
Tel.: 0431 / 880 - 5120
email: petersen@ipho.info

Sekretariat

Lulu Hoffmeister
Tel.: 0431 / 880 - 5387
email: sekretariat@ipho.info

Anschrift: IPN an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel

Fax: 0431 / 880 - 3148
Webseite: www.ipho.info

Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 47. IPhO 2016

Diese Musterlösungen und Bepunktungsrichtlinien waren die Grundlage der Bewertung der Arbeiten der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur Internationalen PhysikOlympiade 2016. Bei abweichenden Lösungswegen wurden die Bewertungen entsprechend angepasst.

Die Lösungen enthalten möglicherweise noch Fehler. Für Hinweise und Verbesserungsvorschläge unter petersen@ipho.info sind wir sehr dankbar.



Aufgabe 1 Beschleunigte Teilchen

(14+16 Pkt.)

Teilchenbeschleuniger werden in der Physik aber auch in anderen Gebieten zu vielfältigen Zwecken verwendet. Neben der Untersuchung der Struktur der Materie finden sie zum Beispiel auch in der Medizin Anwendung. In dieser Aufgabe sollen zwei Arten von Teilchenbeschleunigern untersucht werden.

1.1 Zyklotron

Die Idee des Zyklotrons stammt von dem amerikanischen Physiker Ernest O. Lawrence, der dafür 1939 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde. Bis in die 50er Jahre des letzten Jahrhunderts war diese Art der Teilchenbeschleuniger „the most powerful atom-smasher in the world“.

Ein Zyklotron besteht aus zwei hohlen, halbkreisförmigen Elektroden in einem homogenen magnetischen Feld der Flussdichte B , das senkrecht zu den Elektroden orientiert ist. Zwischen den Elektroden befindet sich ein sehr schmaler Spalt über den eine Hochfrequenzspannung der Form

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

angelegt ist. Dabei bezeichnen U_0 die Amplitude und ω die Kreisfrequenz der Spannung. Die Zeit wird mit t bezeichnet.

Geladene Teilchen werden in die Mitte der Anordnung eingebracht. Die Frequenz der Spannung ist so eingestellt, dass die Teilchen bei jedem Durchqueren des Spaltes beschleunigt werden. Dadurch bewegen sie sich näherungsweise auf einer Spiralbahn nach außen, bis sie nach vielen Umläufen an den Rand der Anordnung gelangen, wo sie das Zyklotron verlassen (vgl. Abb. 1).

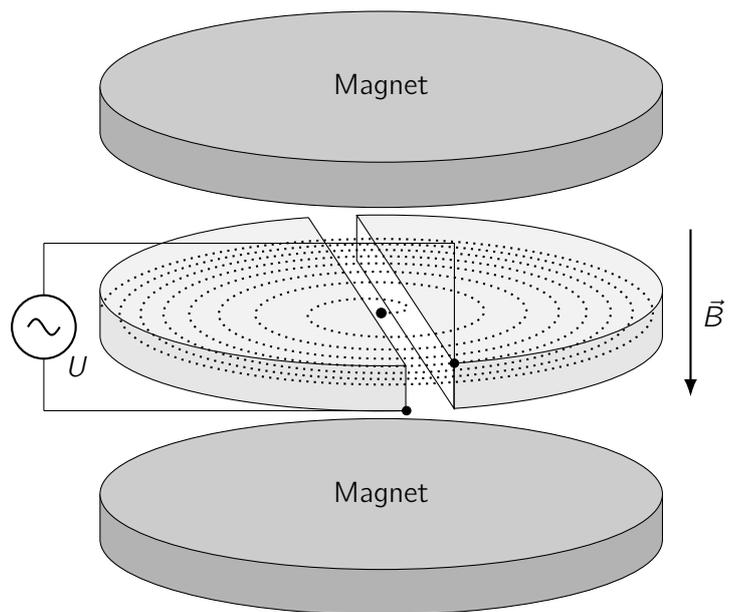


Abbildung 1: Nicht maßstabsgerechte Skizze eines Zyklotrons. Die Vakuumkammer, die die Elektroden einschließt, ist nicht mit eingezeichnet.

Betrachten Sie im Folgenden ein Zyklotron, wie es von E.O. Lawrence Ende der 30er Jahre des letzten Jahrhunderts in Berkeley entwickelt wurde. Die Elektroden des Zyklotrons besaßen einen Radius von $R = 0,76 \text{ m}$ und die über den gesamten Zyklotronquerschnitt als konstant annehmbare magnetische Flussdichte betrug $B = 0,71 \text{ T}$. In dem Zyklotron wurden Protonen mit einer Ladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ und einer Masse $m = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ beschleunigt. Die Amplitude der Hochfrequenzspannung betrug dabei $U_0 = 87 \text{ kV}$. Vernachlässigen Sie bei Ihrer Betrachtung relativistische Effekte.

- 1.a) Leiten Sie einen Ausdruck für die zum Beschleunigen der Protonen notwendige Kreisfrequenz ω her und geben Sie den Wert der Kreisfrequenz an. (3 Pkt.)
- 1.b) Bestimmen Sie die kinetische Energie sowie die Geschwindigkeit der Protonen beim Verlassen des Zyklotrons und beurteilen Sie, inwieweit es zulässig ist, relativistische Effekte zu vernachlässigen. (3 Pkt.)
- 1.c) Berechnen Sie die Anzahl der Umläufe, die ein Proton in dem Zyklotron mindestens macht, bevor es aus diesem austritt, und ebenfalls die Zeit, die es sich dabei in dem Zyklotron aufhält. (3 Pkt.)

Wenn statt der Protonen Elektronen, die eine Masse von $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ besitzen, beschleunigt werden, gelangt man sehr viel schneller in Bereiche, in denen relativistische Effekte eine Rolle spielen.

- 1.d) Betrachten Sie Elektronen, die auf die in Aufgabe 1.b) bestimmte kinetische Energie beschleunigt wurden und zeigen Sie, dass deren Geschwindigkeit sehr nah an der Lichtgeschwindigkeit liegt. (3 Pkt.)

Bei diesen sehr hohen Geschwindigkeiten muss die relativistische Massenzunahme der Elektronen berücksichtigt werden, die dazu führt, dass die Geschwindigkeit der Elektronen in dem Zyklotron nicht mehr in jedem Umlauf in dem Maße zunimmt, wie es erforderlich wäre, um beim nächsten Umlauf erneut beschleunigt zu werden. Eine Möglichkeit, dies zu umgehen, ist, das Magnetfeld bei fester Hochspannungsfrequenz nach außen hin stärker werden zu lassen.

- 1.e) Leiten Sie einen Ausdruck für die Abhängigkeit der dafür notwendigen magnetischen Flussdichte von dem Abstand r vom Zentrum des Zyklotrons ab. (2 Pkt.)

1.2 Betatron

Das Betatron ist in gewisser Weise eine Weiterentwicklung des Zyklotrons, bei dem die Beschleunigung der Teilchen nicht über eine angelegte Hochspannung, sondern durch zeitliche Variation des magnetischen Feldes erfolgt. Die Bewegung in einem solchen Feld soll im Folgenden untersucht werden.

Betrachten Sie ein Elektron, das sich in einem zylindersymmetrischen magnetischen Feld bewegt. Der Betrag $B = |\vec{B}|$ der magnetischen Flussdichte hängt damit nur von der Zeit t , der z -Koordinate und dem Abstand r von der z -Achse, nicht aber von dem Winkel θ ab (vgl. Abb. 2). In der Ebene mit $z = 0$ sei das Magnetfeld in z -Richtung orientiert. In dieser Ebene bewegen sich Elektronen damit auf einer Kreisbahn. Der Radius der Kreisbahn für das betrachtete Elektron ist in der Skizze mit R bezeichnet.

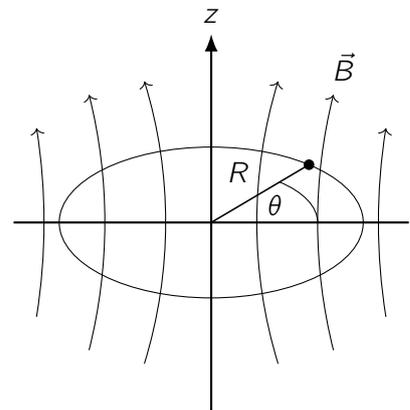


Abbildung 2: Skizze zum Verlauf der Magnetfeldlinien im Betatron mit Elektronenkreisbahn bei $z = 0$.

Zur Beschleunigung des Elektrons auf dieser Kreisbahn wird die magnetische Flussdichte verändert. Bezeichne mit $\Delta \vec{B}$ die Änderung der magnetischen Flussdichte in einem kleinen Zeitraum Δt . Durch die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes lässt sich das Elektron auf dieser Kreisbahn auf sehr große Energien beschleunigen. Zur Vereinfachung der Rechnungen können Sie aber auch hier nichtrelativistisch rechnen.

- 1.f) Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen der Änderung ΔB des Betrages der magnetischen Flussdichte B auf der Kreisbahn, also bei $z = 0$ und $r = R$, und der Änderung $\Delta \Phi$ des magnetischen Flusses durch die von der Kreisbahn eingeschlossene Fläche her, die notwendig ist, damit das Elektron beim Beschleunigen auf der Kreisbahn bleibt. (5 Pkt.)

Nehmen Sie an, dass sich die z -Komponente des magnetischen Feldes in der Nähe der Kreisbahn in der Form

$$B_z(\vec{r}) = B_0 \left(\frac{R}{r} \right)^n$$

mit einer Konstanten $n \in \mathbb{R}$ darstellen lässt. Dabei bezeichne B_0 die magnetische Flussdichte auf der Kreisbahn. Die z -Komponente der Flussdichte hängt in diesem Fall also nur von dem Abstand von der z -Achse ab.

- 1.g) Bestimmen Sie, für welche Werte von n die Kreisbahn sowohl bei kleinen radialen als auch bei kleinen vertikalen Störungen stabil ist. Nehmen Sie dabei an, dass sich die Geschwindigkeit des Elektrons bei der Bahnstörung nicht ändert und die Störungen getrennt voneinander untersucht werden können. (11 Pkt.)

Lösung

- 1.a) Während des Umlaufens in den Elektroden bewegen sich die Protonen auf Kreisbahnen. Dazu muss eine Zentripetalkraft wirken, die von dem Magnetfeld aufgrund der Lorentzkraft hervorgerufen wird. Für die Bewegung auf einer Kreisbahn mit Radius r muss also gelten:

$$m\omega^2 r = e v B = e \omega r B. \quad (1.1)$$

Dabei wurde die auf einer Kreisbahn geltende Beziehung $v = \omega r$ ausgenutzt. Die daraus resultierende notwendige Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{e B}{m} \approx 6,8 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}. \quad (1.2)$$

ist unabhängig vom Radius der Kreisbahn. Sie wird als Zyklotronfrequenz bezeichnet.

- 1.b) Beim Verlassen des Zyklotrons bewegen sich die Protonen auf einer Kreisbahn, deren Radius dem der Elektroden entspricht. Damit lässt sich die kinetische Energie beim Verlassen aus der Winkelfrequenz (1.2) bestimmen zu

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m \omega^2 R^2}{2} = \frac{e^2 B^2 R^2}{2 m} \approx 2,2 \cdot 10^{-12} \text{ J} \approx 14 \text{ MeV}. \quad (1.3)$$

Die Geschwindigkeit mit der die Protonen aus dem Zyklotron austreten ergibt sich damit zu

$$v = \frac{e B R}{m} \approx 5,2 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1} \approx 0,17 \cdot c. \quad (1.4)$$

Damit beträgt der Lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1,015 \quad (1.5)$$

und die Vernachlässigung relativistischer Effekte erscheint noch angemessen¹.

- 1.c) Die Anzahl der Umläufe errechnet sich aus der kinetischen Energie der Protonen beim Austritt aus dem Zyklotron. Diese erhalten die Protonen beim Durchlaufen des Spaltes zwischen den Elektroden. In jedem Umlauf werden diese zwei Mal durch die Hochfrequenzspannung beschleunigt. Bezeichne mit N die Anzahl der Umläufe des Protons im Zyklotron. Wenn die Protonen in dem Spalt jedes Mal mit der maximalen Spannung beschleunigt werden, gilt beim Austritt:

$$2 N U_0 e = E_{\text{kin}} = \frac{e^2 B^2 R^2}{2 m} \quad (1.6)$$

und damit für die mindestens notwendige Anzahl der Umläufe

$$N = \frac{e B^2 R^2}{4 m U_0} \approx 80. \quad (1.7)$$

Die Zeit t , die das Proton im Zyklotron umläuft, beträgt demnach

$$t = N \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi B R^2}{2 U_0} \approx 7,4 \cdot 10^{-6} \text{ s}. \quad (1.8)$$

¹Selbstverständlich sind Fragestellungen denkbar, in denen diese relativistische Korrektur relevant wird. In der vorliegenden Aufgabe sind aber bereits einige der gemachten Angaben, wie zum Beispiel die mit zwei signifikanten Stellen angegebene magnetische Flussdichte, mit größeren relativen Unsicherheiten behaftet.

- 1.d) Die relativistische Energie des Elektrons setzt sich aus der Ruheenergie $m_e c^2$ des Elektrons und dessen kinetischer Energie zusammen. Es gilt

$$E = m_e c^2 + E_{\text{kin}} = \gamma m_e c^2. \quad (1.9)$$

Einsetzen des Lorentzfaktors und Auflösen nach der Geschwindigkeit v des Elektrons liefert

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{E}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{m_e c^2 + E_{\text{kin}}}\right)^2} \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \approx c. \quad (1.10)$$

Die Geschwindigkeit des Elektrons ist bei dieser Energie also bereits nahezu gleich der Lichtgeschwindigkeit.

- 1.e) Um auch relativistische Teilchen auf einer Kreisbahn zu halten, muss in der Zentripetalkraft die relativistische Massenzunahme berücksichtigt werden und (1.1) wird zu

$$\gamma m_e \omega^2 r = e v B = e \omega r B. \quad (1.11)$$

Umstellen führt auf den gesuchten Ausdruck für die magnetische Flussdichte

$$B = \gamma \frac{m_e \omega}{e} = \frac{m_e \omega}{e \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}. \quad (1.12)$$

- 1.f) Die Änderung des magnetischen Flusses $\Delta\Phi$ durch die von der Kreisbahn eingeschlossene Fläche führt zu einem induzierten elektrischen Feld E entlang der Kreisbahn, das zur Beschleunigung des Elektrons führt. Nach dem Induktionsgesetz gilt:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -U_{\text{ind}} = -2\pi R E = \frac{2\pi R}{e} \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (1.13)$$

wobei Δp die durch die Beschleunigung hervorgerufene Änderung des Elektronenimpulses bezeichnet. Die Änderung ΔB der magnetischen Flussdichte auf der Kreisbahn muss nun so groß sein, dass das Elektron trotz des größeren Impulses immer noch auf der Kreisbahn bleibt. Das Kraftgleichgewicht (1.1) zwischen Zentripetal- und Lorentzkraft lässt sich für das Elektron auf der Kreisbahn schreiben als $p = e B R$. Für das beschleunigte Elektron muss demnach gelten:

$$p + \Delta p = e(B + \Delta B) R \quad \text{bzw.} \quad \Delta B = \frac{\Delta p}{e R} = \frac{\Delta\Phi}{2\pi R^2}. \quad (1.14)$$

Die Änderung der magnetischen Flussdichte auf der Kreisbahn muss also gerade der Hälfte der Änderung der mittleren magnetischen Flussdichte in der von der Bahn eingeschlossenen Fläche entsprechen, damit das Elektron auch bei der Beschleunigung auf der Kreisbahn verbleibt. Diese Bedingung wird auch als Widerøe-Bedingung bezeichnet.

- 1.g) **Radiale Störungen**

Wenn das auf der Kreisbahn umlaufende Elektron in radialer Richtung gestört wird, ändert sich sein Abstand zur z -Achse von R auf einen Wert $R + \Delta r$ mit $\Delta r \ll R$. Die in radialer Richtung auf das Elektron wirkende Lorentzkraft beträgt dann

$$F_L = -e v B_z = -e v B_0 \left(\frac{R}{R + \Delta r}\right)^n \approx -e v B_0 \left(1 - n \frac{\Delta r}{R}\right). \quad (1.15)$$

Die für den Umlauf der Elektrons auf einer Kreisbahn mit Radius $R + \Delta r$ notwendige Zentripetalkraft beträgt hingegen

$$F_z = -\frac{m_e v^2}{R + \Delta r} \approx -\frac{m_e v^2}{R} \left(1 - \frac{\Delta r}{R}\right). \quad (1.16)$$

Auf der Kreisbahn mit Radius R sind die Kräfte gerade gleich. Damit die Bahn stabil unter radialen Störungen ist, muss die Auslenkung in radialer Richtung zu einer resultierenden Kraft in Richtung der ursprünglichen Kreisbahn führen, d.h. es muss gelten

$$n \frac{\Delta r}{R} \stackrel{!}{<} \frac{\Delta r}{R} \quad \text{bzw.} \quad n < 1. \quad (1.17)$$

Vertikale Störungen

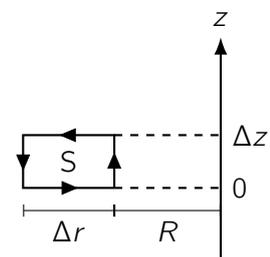
Bei kleinen Auslenkungen Δz des Elektrons in Richtung der z -Achse muss berücksichtigt werden, dass die magnetische Flussdichte \vec{B} für $z \neq 0$ auch Komponenten in radiale und azimuthale Richtung besitzt. Da die Geschwindigkeit des Elektrons aber tangential zur ursprünglichen Kreisbahn gerichtet ist, also nur eine azimuthale Komponente besitzt, führt die azimuthale Komponente der magnetischen Flussdichte zu keiner Kraft auf das Elektron. Die radiale Komponente B_r führt hingegen zu einer Änderung des Impulses in z -Richtung mit

$$\frac{dp_z}{dt} = e v B_r. \quad (1.18)$$

Das positive Vorzeichen erklärt sich daraus, dass das Elektron bei nach oben gerichteter magnetischer Flussdichte in der Ebene $z = 0$ entgegen dem Uhrzeigersinn umläuft und damit eine in radialer Richtung orientierte magnetische Flussdichte bei $z \neq 0$ zu einer Kraft weg von der Ebene mit $z = 0$ führen würde.

Um nun die Radialkomponente der magnetischen Flussdichte in der Nähe der ursprünglichen Kreisbahn zu bestimmen, kann das Ampèresche Gesetz verwendet werden. Betrachte, wie nebenstehend skizziert, eine kleine Schleife S , deren Unterkante bei $z = 0$ liegt. Für das Linienintegral entlang der Schleife ist

$$\oint_S d\vec{l} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.19)$$



Für $z = 0$ besitzt die magnetische Flussdichte keine radiale Komponente. In dem betrachteten Bereich hängt außerdem die z -Komponente der Flussdichte nur von dem Abstand zur z -Achse ab.

Abbildung 3: Skizze der betrachteten Schleife.

Daher folgt aus dem Ampèreschen Gesetz für sehr kleines Δr

$$0 = B_z(r = R) \Delta z + B_r(r = R, z = \Delta z) \Delta r - B_z(r = R + \Delta r) \Delta z. \quad (1.20)$$

Damit ist

$$B_r(r = R, z = \Delta z) = \frac{B_z(r = R + \Delta r) - B_z(r = R)}{\Delta r} \Delta z = -\frac{n B_0}{R} \Delta z. \quad (1.21)$$

Bei positiven Werten von B_0 , n und Δz ist B_r damit negativ, so dass nach (1.18) die Änderung des Impulses in z -Richtung negativ ist. Wenn die Bahn unter dieser Störung stabil sein soll, muss demnach $n > 0$ sein.

Insgesamt ist die Kreisbahn also stabil, wenn für den Exponenten n gilt:

$$\boxed{0 < n < 1}. \quad (1.22)$$

Bewertung - Beschleunigte Teilchen		Punkte
1.a)	Betrachtung des Gleichgewichtes zwischen Zentripetal und Lorentzkraft (1.1)	2
	Angabe des Ergebnisses für Zyklotronfrequenz (1.2)	1
1.b)	Bestimmung der kinetischen Energie der Protonen beim Austritt (1.3)	1
	Bestimmung der Geschwindigkeit der Protonen beim Austritt (1.4)	1
	Begründung zur (nicht)-Zulässigkeit der Vernachlässigung relativistischer Effekte	1
1.c)	Aufstellen einer Energiebilanz bei Austritt (1.6)	1
	Bestimmung der Zahl der Umläufe im Zyklotron (1.7)	1
	Bestimmung der Umlaufzeit im Zyklotron (1.8)	1
1.d)	Relativistische Energiebetrachtung und Ableiten eines Ausdruckes für die Elektronengeschwindigkeit (1.10)	2
	Angabe des numerischen Wertes für die Elektronengeschwindigkeit und Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit	1
1.e)	Aufstellen der relativistischen Kraftbilanz für Kreisbahn (1.11)	1
	Bestimmung der magnetischen Flussdichte (1.12)	1
1.f)	Nutzung des Induktionsgesetzes	1
	Verbinden mit dem Elektronenimpuls und (1.13)	2
	Herleiten eines Ausdruckes für die Änderung der Flussdichte (1.14)	2
1.g)	Abschätzung der Lorentzkraft bei radialer Störung (1.15)	2
	Abschätzung der Zentripetalkraft bei radialer Störung (1.16)	2
	Ableiten einer Bedingung für Exponenten n bei radialer Störung (1.17)	1
	Erkennen, dass radiale B-Feld-Komponente den Impuls in z -Richtung ändert (1.18)	1
	Bestimmung der radialen B-Feld-Komponente in der Nähe der Kreisbahn (1.21)	3
	Ableiten einer Bedingung für Exponenten n bei vertikaler Störung	1
	Zusammenfassung der Bedingungen an Exponenten n (1.22)	1
		30

Aufgabe 2 Schwimmende Scheibe

(30 Pkt.)

(Idee: Fabian Bühler)

Die Meisten haben vermutlich schon einmal einen Zierbrunnen gesehen, bei dem eine Steinkugel auf einem dünnen Wasserfilm gelagert ist. Durch das Wasserpolster lässt sich die meist tonnenschwere Kugel in einem solchen Brunnen sogar von Hand drehen.

In dieser Aufgabe sollen Sie anhand einer etwas einfacheren Anordnung untersuchen, wie es dazu kommt, dass ein Steinkörper auf einem Wasserfilm gleitet. Betrachten Sie dazu, wie in Abbildung 5 skizziert, eine zylinderförmige Granitscheibe mit einem Radius R und einer Dicke D über einer steinernen Unterlage. Von unten strömt Wasser mit einer Rate Q in den Spalt zwischen der Scheibe und der Unterlage, so dass die Scheibe auf einem Wasserfilm gelagert ist. Beschränken Sie sich auf die Betrachtung einer nicht-rotierenden Scheibe.



Abbildung 4: Kugelbrunnen in Breisach.

Die Unterlage überdeckt die Mantelfläche im Winkelbereich $-\vartheta_{\max} \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}$ und ist so geformt, dass der Spalt an jeder Stelle gleich breit ist. In dem Spalt fließt das Wasser mit unterschiedlicher Strömungsgeschwindigkeit u . Längs eines in radialer Richtung verlaufenden Querschnitts hängt die Strömungsgeschwindigkeit vom Abstand x zur Mantelfläche der Scheibe ab (vgl. den rechten Teil in Abb. 5). Direkt an der Scheibe ($x = 0$) und an der Unterlage ($x = h$) ist die Strömungsgeschwindigkeit jeweils gleich Null. Der Spalt ist sehr schmal, die Spaltbreite h ist also sehr viel kleiner als R .

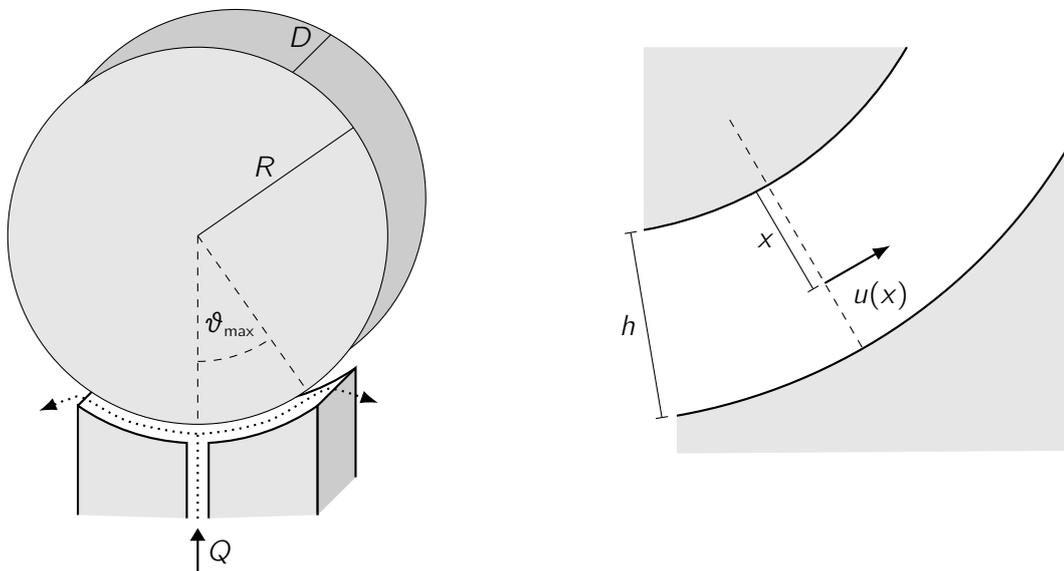


Abbildung 5: Skizze der wassergelagerten Scheibe auf der Unterlage (links) und vergrößerter Ausschnitt des wassergefüllten Spaltes (rechts). Die Spaltbreite ist zur Veranschaulichung übertrieben dargestellt.

Nehmen Sie für die folgenden Betrachtung an, dass sich das Wasser im Spalt nur tangential zur Mantelfläche bewegt, also, wie in Abbildung 5 angedeutet, weder in radiale Richtung noch entlang der Zylinderachse. Der Wasserdruck p im Spalt hängt vom Winkel ϑ ab. Sie können aber annehmen, dass der Wasserdruck im Spalt in radialer Richtung, also bei festem Winkel ϑ , konstant ist und dass der hydrostatische Druck des Wassers vernachlässigt werden kann.

- 2.a) Bestimmen Sie einen Ausdruck für das Geschwindigkeitsprofil $u(x)$ im Spalt in Abhängigkeit von der Spaltbreite h , der Rate Q , mit der Wasser in den Spalt strömt, und der Dicke D der Scheibe. Skizzieren Sie die Form des Geschwindigkeitsprofils. (14 Pkt.)
- 2.b) Leiten Sie einen Ausdruck für den Wasserdruck $p(\vartheta)$ im Spalt in Abhängigkeit von den angegebenen Größen, der dynamischen Viskosität η des Wassers und dem Umgebungsdruck p_0 ab. (4 Pkt.)

Betrachten Sie nun im Folgenden eine Granitscheibe mit einem Radius $R = 50$ cm und einer Dicke $D = 30$ cm, die bis zu einem Winkel $\vartheta_{\max} = 35^\circ$ von dem Wasserspalt bedeckt ist. Die Dichte von Granit beträgt $\rho_{\text{Granit}} = 2,75 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ und für die Viskosität von Wasser können Sie den Wert $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$ annehmen. Die Rate, mit der Wasser in den Spalt strömt, beträgt $Q = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

- 2.c) Berechnen Sie mit den gegebenen Werten die Spaltbreite h sowie den Überdruck $p(0) - p_0$ an der Wassereinlassstelle. (7 Pkt.)
- 2.d) Begründen Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse, dass die Druckdifferenz in radialer Richtung und der Schweredruck des Wassers in diesem Fall tatsächlich sehr klein gegen den Überdruck an der Wassereinlassstelle sind und die Vernachlässigung dieser Beiträge daher zulässig war. (5 Pkt.)

Lösung

- 2.a) Betrachte, wie nebenstehend dargestellt, ein sehr kleines, annähernd quaderförmiges Wasservolumen in dem Spalt, das sich in einem Abstand x von der inneren Mantelfläche bei dem Winkel ϑ befindet. Das Wasservolumen besitze eine Dicke Δx , eine Länge $(R + x) \Delta \vartheta$ und eine Breite D .

Auf das Wasservolumen wirken sowohl Reibungskräfte aufgrund der Viskosität der Flüssigkeit als auch eine Kraft aufgrund der Druckdifferenz zwischen vorderem und hinterem Ende. Wenn sich ein stationäres Geschwindigkeitsprofil ausbildet, heben sich diese Kräfte gerade auf. Im Folgenden werden die einzelnen Kraftbeiträge bestimmt und daraus das Geschwindigkeitsprofil abgeleitet.

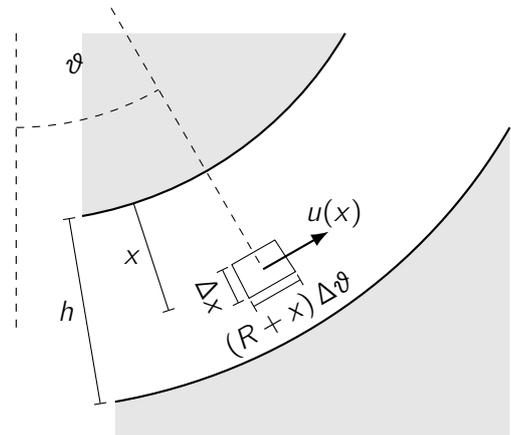


Abbildung 6: Ansicht des vergrößert dargestellten kleinen Wasservolumens.

Reibungskraft

Die Reibungskraft aufgrund einer viskosen Reibung ist proportional zur Fläche auf der die Kraft wirkt und zur Ableitung $du/dx = u'$ der Strömungsgeschwindigkeit entlang des Profils.

Damit wirkt auf die Oberfläche, die näher an der inneren Mantelfläche liegt, eine Reibungskraft

$$\Delta F_{R,\text{innen}} = -\eta D (R + x) \Delta \vartheta u'(x - \frac{\Delta x}{2}) \approx -\eta D R \Delta \vartheta u'(x - \frac{\Delta x}{2}). \quad (2.1)$$

Die Näherung ist zulässig, da $x < h \ll R$ gilt. Das negative Vorzeichen steht bei positivem Geschwindigkeitsgradienten für eine Kraft entgegengesetzt zur Strömungsrichtung. Analog ergibt sich für die auf die außen liegende Oberfläche wirkende Kraft

$$\Delta F_{R,\text{ausen}} = \eta D (R + x) \Delta \vartheta u'(x + \frac{\Delta x}{2}) \approx \eta D R \Delta \vartheta u'(x + \frac{\Delta x}{2}). \quad (2.2)$$

Mit Hilfe der linearen Näherung $u'(x \pm \Delta x/2) \approx u'(x) \pm u''(x) \Delta x/2$ lassen sich die Gleichungen (2.1) und (2.2) zusammenfassen zu

$$\Delta F_R = \Delta F_{R,\text{ausen}} + \Delta F_{R,\text{innen}} \approx \eta D R \Delta \vartheta \Delta x u''(x). \quad (2.3)$$

Kraft aufgrund der Druckdifferenz

Für den Wasserdruck auf der linken und der rechten Seite des Wasservolumens gilt

$$p_{\text{links}} = p(\vartheta - \Delta\vartheta/2) \approx p(\vartheta) - p'(\vartheta) \frac{\Delta\vartheta}{2} \quad \text{sowie} \quad p_{\text{rechts}} = p(\vartheta + \Delta\vartheta/2) \approx p(\vartheta) + p'(\vartheta) \frac{\Delta\vartheta}{2}. \quad (2.4)$$

Die gesamte aufgrund der Druckdifferenz auf das Wasservolumen wirkende Kraft ist somit

$$\Delta F_p \approx -D \Delta x p'(\vartheta) \Delta\vartheta. \quad (2.5)$$

Im Falle des gesuchten stationären Geschwindigkeitsprofils müssen sich die Reibungskräfte ΔF_R und die Kräfte ΔF_p aufgrund der Druckdifferenz gerade aufheben. Es muss also mit den Ergebnissen (2.3) und (2.5) gelten:

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta F_R + \Delta F_p \approx \eta D R \Delta\vartheta \Delta x u''(x) - D \Delta x p'(\vartheta) \Delta\vartheta. \quad (2.6)$$

Diese Beziehung muss für alle Werte von x und ϑ gelten. Teilen durch $D \cdot \Delta x \cdot \Delta\vartheta$ ergibt

$$\eta R u''(x) \stackrel{!}{=} p'(\vartheta). \quad (2.7)$$

Da sich das Wasser im Spalt nur tangential zur Mantelfläche bewegt, hängt die linke Seite in Gleichung (2.7) nur von x , nicht aber von ϑ ab, die rechte Seite hingegen nur von ϑ und nicht von x . Die Gleichung kann also nur für alle x und ϑ erfüllt sein, wenn die linke und die rechte Seite jeweils konstant sind, d.h. es existiert eine Konstante K mit

$$\eta R u''(x) = K = p'(\vartheta). \quad (2.8)$$

Durch zweimalige Integration der linken Seite von (2.8) ergibt sich für das Geschwindigkeitsprofil

$$u(x) = \frac{K}{2\eta R} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (2.9)$$

mit Integrationskonstanten C_1 und C_2 . Aus den gegebenen Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(h) = 0$ lassen sich diese bestimmen zu

$$C_1 = -\frac{hK}{2\eta R} \quad \text{und} \quad C_2 = 0. \quad (2.10)$$

Damit lautet die Gleichung für das Geschwindigkeitsprofil²

$$u(x) = \frac{K}{2\eta R} x(x-h). \quad (2.11)$$

Die Konstante K ist allerdings immer noch unbekannt. Sie lässt sich aber mit der Rate Q in Verbindung bringen.

Das in den Spalt strömende Wasser teilt sich symmetrisch nach links und rechts auf. Die Rate mit der Wasser in eine Spaltseite strömt beträgt also $Q/2$. Mit dieser Rate muss das Wasser auch in dem Spalt transportiert werden. Die Gesamtstromstärke Q_{Spalt} im Spalt ergibt sich durch Integration des Geschwindigkeitsprofils über den Querschnitt. Es ist:

$$Q_{\text{Spalt}} = \int_0^h dx u(x) D = \frac{KD}{2\eta R} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \right) = -\frac{KDh^3}{12\eta R} \stackrel{!}{=} \frac{Q}{2}. \quad (2.12)$$

²Die Herleitung bis zu diesem Punkt kann umgangen werden, da sich die Strömung mit den gegebenen Näherungen nicht von der Strömung zwischen zwei parallelen Platten unterscheidet. Für diese sind in der Literatur Ausdrücke für das Geschwindigkeitsprofil zu finden.

Damit gilt für die Konstante K

$$K = -\frac{6Q\eta R}{Dh^3}. \quad (2.13)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.11) ergibt sich daraus schließlich die Strömungsgeschwindigkeit zu

$$u(x) = \frac{3Q}{Dh^3} x(h-x). \quad (2.14)$$

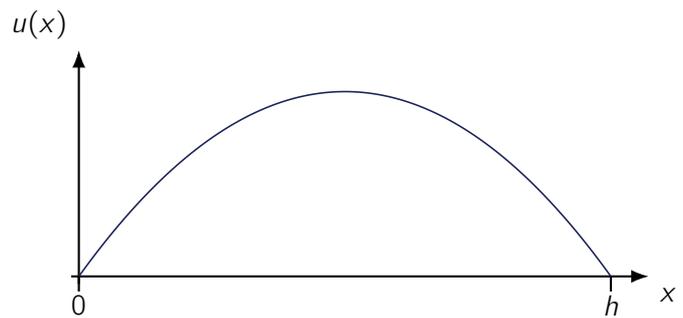


Abbildung 7: Geschwindigkeitsprofil in dem Spalt.

Die Form des Geschwindigkeitsprofils ist nebenstehend skizziert

2.b) Aus Gleichung (2.8) erhält man durch Integration einen Ausdruck für den Druck $p(\vartheta)$:

$$p(\vartheta) = K\vartheta + C_3 = -\frac{6Q\eta R}{Dh^3}\vartheta + C_3. \quad (2.15)$$

Wenn das Wasser bei ϑ_{\max} aus dem Spalt austritt, muss der Wasserdruck gleich dem Umgebungsdruck p_0 sein. Aus dieser Bedingung lässt sich die Integrationskonstante C_3 bestimmen.

$$C_3 = p(\vartheta_{\max}) + \frac{6Q\eta R}{Dh^3}\vartheta_{\max} = p_0 + \frac{6Q\eta R}{Dh^3}\vartheta_{\max}. \quad (2.16)$$

Daraus ergibt sich der gesuchte Ausdruck für den Wasserdruck in dem Spalt zu

$$p(\vartheta) = p_0 + \frac{6Q\eta R}{Dh^3}(\vartheta_{\max} - \vartheta). \quad (2.17)$$

2.c) Damit die Scheibe stabil auf dem Wasser liegen kann, muss die durch den Überdruck in dem Spalt hervorgerufene Kraft nach oben so groß sein wie die Gewichtskraft der Scheibe. Für die vertikale Kraftkomponente auf ein kleines Mantelflächenstück mit Oberfläche $D \cdot R \cdot \Delta\vartheta$ im Winkelbereich zwischen ϑ und $\vartheta + \Delta\vartheta$ gilt:

$$\Delta F_{\text{vert}} = (p(\vartheta) - p_0) \cos(\vartheta) D R \Delta\vartheta = \frac{6Q\eta R^2}{h^3} (\vartheta_{\max} - \vartheta) \cos(\vartheta) \Delta\vartheta, \quad (2.18)$$

wobei (2.17) für den Druck in dem Spalt benutzt wurde. Durch Integration ergibt sich die insgesamt aufgrund des Überdruckes nach oben wirkende Kraft zu

$$\begin{aligned} F_{\text{vert}} &= 2 \int_0^{\vartheta_{\max}} d\vartheta \frac{6Q\eta R^2}{h^3} (\vartheta_{\max} - \vartheta) \cos(\vartheta) \\ &= \frac{12Q\eta R^2}{h^3} \left[(\vartheta_{\max} - \vartheta) \sin(\vartheta) - \cos(\vartheta) \right]_0^{\vartheta_{\max}} \\ &= \frac{12Q\eta R^2}{h^3} (1 - \cos \vartheta_{\max}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

Aus der Bedingung $F_{\text{vert}} = F_g = \rho_{\text{Granit}} g \pi R^2 D$ ergibt sich damit für die Spaltbreite

$$h = \left(\frac{12Q\eta}{\rho_{\text{Granit}} g \pi D} (1 - \cos \vartheta_{\max}) \right)^{1/3} \approx 0,29 \text{ mm}. \quad (2.20)$$

Für den numerischen Wert wurden die gegebenen Zahlenwerte verwendet. Neben dem Überdruck erzeugt auch die Reibungskraft zwischen der Scheibe und dem Wasser eine vertikal nach oben gerichtete Kraft auf die Scheibe. Diese Kraft lässt sich mit Hilfe von (2.1) bei $x = 0$ und dem Geschwindigkeitsprofil (2.14) in analoger Weise bestimmen zu

$$F_{\text{vert,R}} = \frac{6Q\eta R}{h^2}(1 - \cos\vartheta_{\text{max}}), \quad (2.21)$$

Sie liegt damit einen Faktor $h/2R$ unter dem Wert in (2.19) und kann gegenüber diesem vernachlässigt werden.

Der Druck an der Einlassstelle ergibt sich ebenfalls mit den gegebenen Werten aus (2.17) zu

$$\boxed{p(0) - p_0 = \frac{6Q\eta R}{Dh^3}\vartheta_{\text{max}} \approx 72 \cdot 10^3 \text{ Pa}}. \quad (2.22)$$

Der Überdruck an der Einlassstelle ist damit niedriger als der Atmosphärendruck.

2.d) Druckdifferenz in radialer Richtung

Betrachte erneut ein Wasservolumen wie in dem ersten Aufgabenteil. Das Wasservolumen bewegt sich in dem Spalt auf einer Kreisbahn, daher muss eine Zentripetalkraft in Richtung Kreismittelpunkt wirken. Diese Zentripetalkraft wird von einer Druckdifferenz in radialer Richtung hervorgerufen, daher kann der Druck in radialer Richtung nicht ganz konstant sein. Da der Spalt sehr dünn ist, unterscheiden sich die Radien für die Kreisbahn nicht sehr stark voneinander und die größte Zentripetalkraft muss in der Mitte des Spaltes wirken, wo die Strömungsgeschwindigkeit am höchsten ist. Die Zentripetalkraft ΔF_z auf das Wasservolumen in der Mitte des Spaltes beträgt

$$\Delta F_z = \rho_{\text{Wasser}} D R \Delta\vartheta \Delta x \frac{u_{\text{max}}^2}{R} = \frac{9\rho_{\text{Wasser}} Q^2}{16 D h^2} \Delta\vartheta \Delta x. \quad (2.23)$$

Diese Kraft muss sich aus der Druckdifferenz zwischen Innen- und Außenseite des Wasservolumens ergeben:

$$\Delta F_z = \frac{dp}{dx} \Delta x D R \Delta\vartheta. \quad (2.24)$$

Gleichsetzen liefert

$$\frac{dp}{dx} = \frac{9\rho_{\text{Wasser}} Q^2}{16 R D^2 h^2}. \quad (2.25)$$

Das ist der maximale Druckgradient in radialer Richtung. Eine Multiplikation mit der Spaltbreite liefert eine obere Grenze für die Druckdifferenz in radialer Richtung über den gesamten Spalt.

$$\Delta p_{\text{max}} = \frac{dp}{dx} h = \frac{9\rho_{\text{Wasser}} Q^2}{16 R D^2 h} \approx 3,9 \text{ Pa}. \quad (2.26)$$

Das ist relativ zu $p(0) - p_0$ ein sehr geringer Wert und die Vernachlässigung der Druckdifferenz ist zulässig.

Hydrostatischer Druck

Der hydrostatische Druck an der tiefsten Stelle beträgt

$$\rho_{\text{Hydro}} = \rho_{\text{Wasser}} g R (1 - \cos\vartheta_{\text{max}}) \approx 8,9 \cdot 10^2 \text{ Pa}. \quad (2.27)$$

Dies entspricht ebenfalls nur etwa 1,2% des Überdrucks an der Einlassstelle, so dass auch die Vernachlässigung dieses Anteils gerechtfertigt ist.

Hinweis:

Neben diesen beiden Näherungen wurde vorausgesetzt, dass die Strömung laminar ist, also keine Turbulenzen aufweist. Die Reynolds-Zahl $Re = \frac{\rho u \ell}{\eta}$ gibt einen Anhaltspunkt, inwieweit diese Näherung zulässig ist. Dabei bezeichnet ℓ eine charakteristische Länge der betrachteten Konfiguration. Nimmt man für die Strömungsgeschwindigkeit den Wert $u = u_{\max} \approx 2,5 \text{ m s}^{-1}$ an und setzt $\ell = h$ (üblich für Rohrströmungen), so erhält man mit $Re \approx 750$ einen Wert, der tatsächlich auf eine laminare Strömung hindeutet. Verwendet man für ℓ hingegen die Länge des Spaltes, so liegt der Wert etwa um einen Faktor 1000 darüber und somit weit in dem Bereich, in dem eine turbulente Strömung zu erwarten ist. Diese Näherung kann daher in realen Situationen verletzt sein.

Anmerkung:

Diese Aufgabe ist angelehnt an die Betrachtung in dem Artikel Snoeijer, J. H. & van der Weele, K. (2014). Physics of the granite sphere fountain. *American Journal of Physics*, 82(11), 1029-1039.

Bewertung - Schwimmende Scheibe		Punkte
2.a)*	Erkennen, dass viskose Reibung und Druckdifferenz das Profil bestimmen	2
	Betrachtung der Reibungskräfte und Druckdifferenz bei einem kleinen Wasservolumen sowie Ergebnisse (2.3) und (2.5)	4
	Nutzung des Kraftgleichgewichtes im stationären Fall (2.6)	1
	Aufstellen einer Differentialgleichung und Idee der unabhängigen Betrachtung in x und ϑ (2.8)	1
	Aufstellen eines Ausdrucks für $u(x)$ (2.9) und Bestimmung der Integrationskonstanten aus Randbedingungen	2
	Nutzung der Kontinuitätsbedingung zur Bestimmung der verbleibenden Unbekannten (2.13)	1
	Angabe des Ergebnisses für die Strömungsgeschwindigkeit (2.14)	1
	Skizze des Geschwindigkeitsprofils	2
2.b)	Aufstellen einer Gleichung wie z.B. (2.8) und Formulierung einer Lösungsidee	1
	Ableiten eines Ausdrucks für $p(\vartheta)$ (2.15) und Bestimmung der Integrationskonstanten aus Randbedingung	2
	Angabe des Ergebnisses für den Druck (2.17)	1
2.c)	Idee des Gleichgewichts zwischen Kraft aufgrund des Überdrucks und Gewichtskraft	2
	Bestimmung der vertikalen Kraft aufgrund des Überdrucks (2.19) und Begründung zur Vernachlässigung des Reibungsbeitrages	2
	Bestimmung der Spaltbreite (2.20)	2
	Bestimmung des Überdrucks an der Einlassstelle (2.22)	1
2.d)	Abschätzung der Druckdifferenz in radiale Richtung (2.26)	3
	Abschätzung des maximalen hydrostatischen Druckes (2.27)	2
		30

* Aufgabenteil 2.a) sollte auch dann mit voller Punktzahl bewertet werden, wenn Teilnehmende (Zwischen-)Ergebnisse aus der Literatur mit Quellenangabe nutzen und begründen, warum der Fall einer Strömung zwischen zwei ebenen Platten auf diese Situation übertragbar ist.

Aufgabe 3 Experimentelle Aufgabe - Interferenzversuche

(21+19 Pkt.)

In dieser Aufgabe dreht sich alles um die Interferenz von Lichtwellen. Sie sollen zuerst die Wellenlänge des von einem Laserpointer emittierten Lichtes und anschließend die Dicke von Haaren bestimmen.

Neben dem mit diesen Aufgaben verschickten IPhO-Lineal können Sie die folgenden Materialien zum Experimentieren verwenden: einen Laserpointer, Lineal(e), ein Metermaß und andere haushaltstypische Dinge. Sollten Sie keinen Laserpointer besitzen, können Sie sicher in der Schule einen ausleihen.

Achtung! Blicken Sie auf keinen Fall in den Laserstrahl und richten Sie ihn auch nicht auf andere Personen!

3.1 Bestimmung der Wellenlänge des Laserpointers

Lassen Sie das Licht des Laserpointers unter einem flachen Winkel auf die Millimeterskala des IPhO-Lineals fallen. Wenn Sie die Anordnung geschickt einstellen, können Sie an einer Wand, auf die das Licht fällt, ein Interferenzmuster mit abwechselnden hellen und dunklen Bereichen beobachten.

- 3.a) Erklären Sie, wie dieses Interferenzmuster zustande kommt und leiten Sie einen Ausdruck ab, der die Wellenlänge λ des vom Laser emittierten Lichtes mit den im Interferenzmuster beobachtbaren Beugungsordnungen sowie anderen messbaren bzw. bekannten Größen in Beziehung setzt. (7 Pkt.)
- 3.b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Lineals und des hergeleiteten Zusammenhanges experimentell die Wellenlänge des verwendeten Laserlichts. Vergleichen Sie die ermittelte Wellenlänge entweder mit der vom Hersteller angegebenen Wellenlänge oder mit dem aufgrund der Farbe des Lichtes zu erwartenden Wert. (14 Pkt.)

Sie können dabei annehmen, dass der Abstand der mm-Markierungen auf dem Lineal 1,00 mm beträgt.

3.2 Bestimmung der Dicke von Haaren

Überreden Sie Freunde und Bekannte, Ihnen ein paar ihrer Kopfhare für das folgende Experiment zur Verfügung zu stellen³. Lassen Sie das Licht des Laserpointers auf ein leicht gespanntes Haar fallen. Auf einem in einiger Entfernung stehenden Schirm oder einer Wand können Sie nun erneut ein Interferenzmuster beobachten. Allerdings sieht es dieses Mal ein wenig anders aus. Da Sie nun die Wellenlänge des Laserlichtes kennen, können Sie aus dem Interferenzmuster auf die Dicke des verwendeten Haares schließen.

- 3.c) Erklären Sie, wie das Interferenzmuster in diesem Fall zustande kommt und leiten Sie nun einen Ausdruck ab, der die Wellenlänge λ des vom Laser emittierten Lichtes mit den im Interferenzmuster beobachtbaren Beugungsordnungen, der Dicke des Haares sowie anderen messbaren Größen in Beziehung setzt. (5 Pkt.)
- 3.d) Bestimmen Sie mit Hilfe des hergeleiteten Zusammenhanges experimentell die Dicke von mindestens drei unterschiedlichen menschlichen Haaren. (14 Pkt.)

Allgemeine Hinweise zur experimentellen Aufgabe

- Beschreiben und dokumentieren Sie Ihr Vorgehen so ausführlich, dass jeder Schritt gut nachvollziehbar ist. Skizzieren Sie insbesondere Ihre Versuchsaufbauten.
- Führen Sie alle Ihre Versuche so durch, dass die Ergebnisse so genau wie möglich sind.
- Schätzen Sie außerdem die Fehler aller Ergebnisse sinnvoll ab.

³Evtl. hilft es, wenn Sie darauf hinweisen, dass es für einen wissenschaftlichen Zweck ist.

Lösung

3.a) Entstehen des Interferenzmusters bei Reflektion an einem Lineal

An der glatten Linealoberfläche werden auftreffende Lichtstrahlen reflektiert. An den Stellen, an denen sich die Markierungen der Millimeterskala befinden, findet allerdings keine Reflektion statt. Dadurch kommt es bei der Überlagerung der reflektierten Wellen zu Interferenz.

Anschaulich kann man sich das nach der Reflektion auf einem Schirm eintreffende Licht als eine Überlagerung zweier Wellen vorstellen: Einer Welle, die an dem glatten Lineal reflektiert wurde sowie einer um eine halbe Wellenlänge phasenverschobenen Welle, die nur an den Markierungen reflektiert und ansonsten vom Lineal gestreut bzw. absorbiert wurde. Mit dieser phasenverschobenen Überlagerung entsteht genau eine Welle, die nur an den glatten Stellen des Lineals reflektiert wird, da sich die Wellen, die von den Markierungen stammen, gerade auslöschen. Die an dem glatten Lineal reflektierte Welle führt auf einem Schirm zu einem hellen Lichtpunkt. Die phasenverschobene, nur an den Markierungen reflektierte Welle, aber entspricht der an einem Reflektionsgitter reflektierten Welle und erzeugt ein entsprechendes Interferenzmuster. Dieses komplementäre Verhalten wird in der Wellenoptik auch als Babinetsches Prinzip bezeichnet.

Für die folgende theoretische Betrachtung des Interferenzmusters kann die reflektierte Welle daher als an einem Reflektionsgitter mit Gitterabstand $a = 1,00 \text{ mm}$ reflektierte Welle betrachtet werden.

Theoretische Betrachtung

Abbildung 8 veranschaulicht den Verlauf der auf das Lineal treffenden Strahlen. Wenn das Laserlicht unter einem flachen Winkel α_0 auf das Lineal fällt, wird der Strahl unter dem gleichen Winkel reflektiert und erzeugt einen hellen Punkt auf dem Schirm.

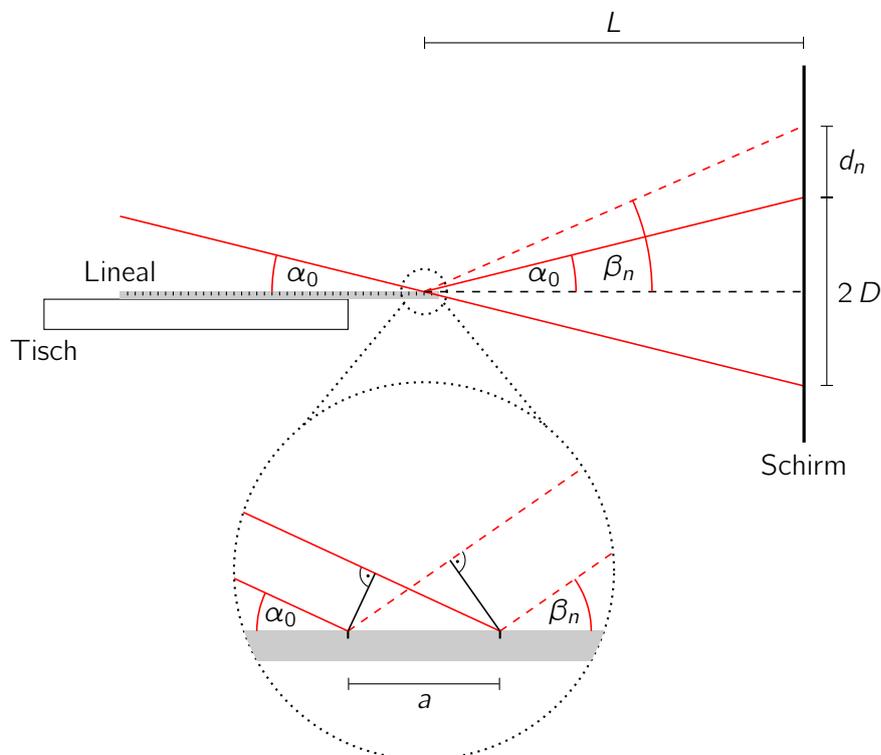


Abbildung 8: Skizze zur Interferenzzeugung bei der Reflektion am Lineal. Der vergrößerte Ausschnitt veranschaulicht die Unterschiede der optischen Weglängen.

Für andere Reflexionswinkel tritt konstruktive Interferenz auf, wenn die an zwei benachbarten Markierungen reflektierten Strahlen mit einem Wegunterschied Δx auf den Schirm treffen, der einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge λ des verwendeten Laserlichtes entspricht. Mit den Bezeichnungen in der Abbildung tritt dies bei Winkeln β_n mit $n \in \mathbb{Z}$ auf, für die gilt:

$$n\lambda \stackrel{!}{=} \Delta x = a(\cos \alpha_0 - \cos \beta_n) . \quad (3.1)$$

Bemerkenswerterweise kann also durch die Reflektion eines Laserstrahls an einem Lineal ein Interferenzmuster erzeugt werden, obwohl die Abstände der Markierungen auf dem Lineal Größenordnungen über der Wellenlänge des Laserlichtes liegen. Dies wird durch den sehr flachen Einfall auf das Lineal ermöglicht. Der Kosinus ändert sich für kleine Winkel nur langsam und die in (3.1) betrachtete Differenz wird für kleine Winkel so klein, dass sie in die Größenordnung der Lichtwellenlänge kommt.

Die in der Skizze eingezeichneten Winkel lassen sich durch die direkt messbaren Größen L , D und d_n ausdrücken. Es ist $\tan \alpha_0 = D/L$ sowie $\tan \beta_n = (D + d_n)/L$ und damit lässt sich der Kosinus von β_n ausdrücken durch

$$\cos \beta_n = \cos \alpha_0 - \frac{n\lambda}{a} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\cos \left(\arctan \frac{D + d_n}{L} \right) = \cos \left(\arctan \frac{D}{L} \right) - \frac{n\lambda}{a}} . \quad (3.2)$$

Der Wert von $\cos \beta_n$ hängt damit linear (genauer affin) von n ab. Misst man also L , D sowie für die einzelnen Beugungsordnungen d_n und trägt $\cos \beta_n$ über n auf, lässt sich aus der Steigung $b := -\lambda/a$ des obigen Zusammenhanges die Wellenlänge des Laserlichtes bestimmen.

3.b) Versuchsaufbau und Durchführung

Für die Bestimmung der Wellenlänge wird ein Aufbau wie in Abbildung 8 verwendet. Die nebenstehende Abbildung 9 zeigt ein typisches Interferenzmuster bei dieser Anordnung.

Der Laser wurde so positioniert, dass er auf das vordere, über die Tischkante ragende Ende des Lineals gerichtet war. Durch Entfernen des Lineals aus dem Strahlengang, konnte so auch die Position des nicht abgelenkten Strahls auf dem Schirm bestimmt werden. Die Länge D entspricht dann der Hälfte des Abstandes zwischen dieser Position und der Position des Hauptmaximums des reflektierten Strahls. Dies ist einfacher und genauer als die Bestimmung von D durch Verlängerung des Lineals bis zum Schirm. Die Länge L wurde mit einem Gliedermaßstab bestimmt und betrug in den folgenden Versuchen

$$L = (1,24 \pm 0,02) \text{ m} . \quad (3.3)$$

Die Bestimmung der Länge L ist mit einer relativ großen Unsicherheit behaftet, da der Strahl nicht an einem Punkt auf das Lineal trifft, sondern einen längeren Streifen abdeckt. Als Wert wurde die Mitte dieses Streifens genommen.

Der verwendete Laserpointer emittiert laut Herstellerangaben Licht einer Wellenlänge von $(635 \pm 10) \text{ nm}$. Die experimentelle Bestimmung der Wellenlänge des Laserlichtes wurde in zwei Versuchen mit unterschiedlichen Einfallswinkeln durchgeführt. Die folgenden Tabellen geben die gemessenen Werte wider.

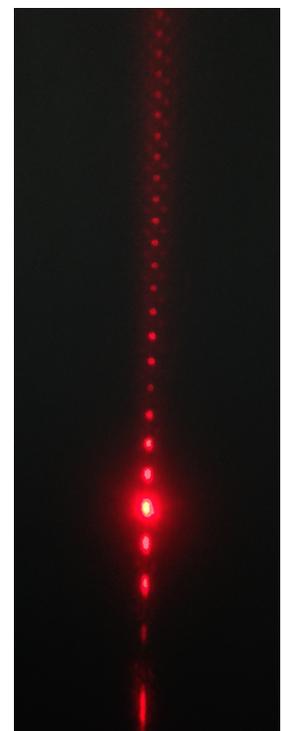


Abbildung 9: Interferenzmuster für Reflektion am Lineal.

Tabelle 1: Messwerte des ersten Versuches zur Bestimmung der Wellenlänge des vom Laserpointer emittierten Lichtes. Der Abstand D lag bei $D = (20,7 \pm 0,1)$ cm und der Einfallswinkel betrug damit $\alpha_0 = (9,5 \pm 0,2)^\circ$. In der Spalte mit der Überschrift $\cos(\dots)$ ist der Wert für $\cos(\arctan \frac{D+d_n}{L})$ eingetragen. Die Werte für β_n dienen nur der Information und werden nicht weiter verwendet.

n	d_n/cm	$\Delta d_n/\text{cm}$	$\beta_n/^\circ$	$\cos(\dots)$	$\Delta \cos(\dots)$	n	d_n/cm	$\Delta d_n/\text{cm}$	$\beta_n/^\circ$	$\cos(\dots)$	$\Delta \cos(\dots)$
0	0,00	0,00	9,5	0,986	0,0006						
1	0,60	0,10	9,7	0,986	0,0007	-1	-0,50	0,10	9,3	0,987	0,0007
2	1,10	0,10	10,0	0,985	0,0007	-2	-1,05	0,10	9,0	0,988	0,0006
3	1,55	0,10	10,2	0,984	0,0008	-3	-1,50	0,10	8,8	0,988	0,0006
4	2,00	0,05	10,4	0,984	0,0007	-4	-2,00	0,05	8,6	0,989	0,0005
5	2,45	0,05	10,6	0,983	0,0007	-5	-2,55	0,05	8,3	0,989	0,0005
6	2,90	0,05	10,8	0,982	0,0008	-6	-3,15	0,05	8,1	0,990	0,0005
7	3,35	0,05	11,0	0,982	0,0008	-7	-3,80	0,05	7,8	0,991	0,0005
8	3,75	0,05	11,2	0,981	0,0008	-8	-4,35	0,05	7,5	0,991	0,0004
9	4,15	0,05	11,3	0,981	0,0008	-9	-4,85	0,05	7,3	0,992	0,0004
10	4,60	0,05	11,5	0,980	0,0009	-10	-5,60	0,05	6,9	0,993	0,0004
11	5,05	0,05	11,7	0,979	0,0009	-11	-6,20	0,05	6,7	0,993	0,0004
12	5,40	0,05	11,9	0,979	0,0009	-12	-6,90	0,05	6,4	0,994	0,0003
13	5,80	0,05	12,1	0,978	0,0009	-13	-7,65	0,05	6,0	0,995	0,0003
14	6,20	0,05	12,2	0,977	0,0010	-14	-8,45	0,10	5,6	0,995	0,0003
15	6,55	0,05	12,4	0,977	0,0010	-15	-9,20	0,10	5,3	0,996	0,0003
16	7,00	0,05	12,6	0,976	0,0010						
17	7,35	0,10	12,7	0,975	0,0011						
18	7,70	0,10	12,9	0,975	0,0011						

Tabelle 2: Messwerte des zweiten Versuches zur Bestimmung der Wellenlänge des vom Laserpointer emittierten Lichtes. Der Abstand D lag bei $D = (6,35 \pm 0,05)$ cm und der Einfallswinkel betrug damit $\alpha_0 = (2,93 \pm 0,07)^\circ$. In der Spalte mit der Überschrift $\cos(\dots)$ ist der Wert für $\cos(\arctan \frac{D+d_n}{L})$ eingetragen. Die Werte für β_n dienen nur der Information und werden nicht weiter verwendet.

n	d_n/cm	$\Delta d_n/\text{cm}$	$\beta_n/^\circ$	$\cos(\dots)$	$\Delta \cos(\dots)$	n	d_n/cm	$\Delta d_n/\text{cm}$	$\beta_n/^\circ$	$\cos(\dots)$	$\Delta \cos(\dots)$
0	0,00	0,00	2,9	0,999	0,0001						
1	1,35	0,10	3,6	0,998	0,0001	-1	-1,80	0,10	2,1	0,999	0,0001
2	2,55	0,10	4,1	0,997	0,0002	-2	-5,40	0,10	0,4	1,000	0,0000
3	3,65	0,10	4,6	0,997	0,0002						
4	4,65	0,10	5,1	0,996	0,0002						
5	5,50	0,05	5,5	0,995	0,0002						
6	6,35	0,05	5,8	0,995	0,0002						
7	7,10	0,05	6,2	0,994	0,0003						
8	7,80	0,05	6,5	0,994	0,0003						
9	8,50	0,05	6,8	0,993	0,0003						
10	9,20	0,05	7,1	0,992	0,0003						
11	9,85	0,05	7,4	0,992	0,0004						
12	10,50	0,05	7,7	0,991	0,0004						
13	11,05	0,05	8,0	0,990	0,0004						
14	11,60	0,05	8,2	0,990	0,0004						
15	12,20	0,05	8,5	0,989	0,0005						
16	12,75	0,05	8,8	0,988	0,0005						
17	13,25	0,05	9,0	0,988	0,0005						
18	13,80	0,05	9,2	0,987	0,0005						

Die Unsicherheit bei der Bestimmung von d_n wurde für die meisten Messungen zu 0,5 mm, also einem halben Skalenteil, angenommen. Die ersten Nebenmaxima und die Maxima mit den höchsten Ordnungen waren aber etwas weniger genau zu lokalisieren. Der Fehler in $\cos\left(\arctan\frac{D+d_n}{L}\right)$ wurde aus den Unsicherheiten der Eingangsgrößen mit Hilfe einer linearen Fehlerfortpflanzung bestimmt. Dabei ist

$$\begin{aligned} \Delta \cos\left(\arctan\frac{D+d_n}{L}\right) &\approx \left|\frac{\partial \cos(\dots)}{\partial D}\right| \Delta D + \left|\frac{\partial \cos(\dots)}{\partial L}\right| \Delta L + \left|\frac{\partial \cos(\dots)}{\partial d_n}\right| \Delta d_n \\ &= \frac{\sin\left(\arctan\frac{D+d_n}{L}\right)}{1 + \left(\frac{D+d_n}{L}\right)^2} \left\{ \frac{\Delta D}{L} + \frac{\Delta L(D+d_n)}{L^2} + \frac{\Delta d_n}{L} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bemerkenswert an den Messergebnissen ist, dass die Maxima aufgrund des Zusammenhanges (3.2) asymmetrisch um das Hauptmaximum verteilt sind und dass in der Regel weniger Maxima negativer als positiver Ordnung beobachtet werden. Neben der Tatsache, dass diese mit zunehmender Ordnung schneller schwächer werden, liegt dies auch daran, dass es keine Maxima negativer Ordnung mit einem Ausfallswinkel kleiner oder gleich Null geben kann. Dies wird insbesondere bei dem zweiten Versuch deutlich, bei dem nur zwei Maxima negativer Ordnung auftreten.

Auswertung

In den folgenden Graphen sind die Werte für $\cos\left(\arctan\frac{D+d_n}{L}\right)$ über n aufgetragen.

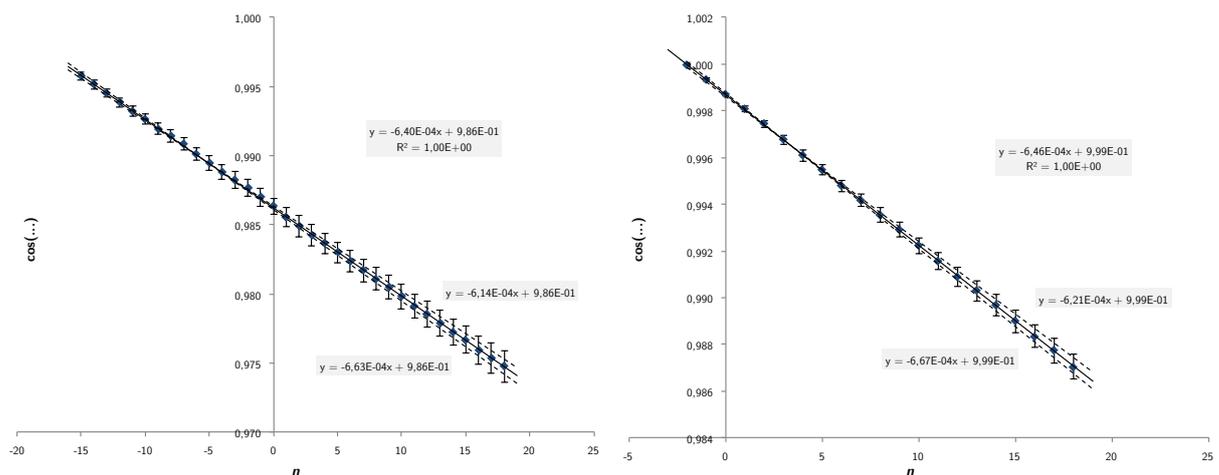


Abbildung 10: Graphen für $\cos\left(\arctan\frac{D+d_n}{L}\right)$ als Funktion der Beugungsordnung n .

In den Graphen sind weitere Ausgleichsgeraden minimaler und maximaler Steigung zur Abschätzung der Unsicherheit in der Steigung b eingezeichnet. Offensichtlich ist der theoretisch erwartete lineare Zusammenhang sehr gut erfüllt.

Für die Wellenlänge λ des verwendeten Laserpointers ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \text{Versuch 1: } \lambda &= -a b \approx (640 \pm 30) \text{ nm} \\ \text{Versuch 2: } \lambda &= -a b \approx (646 \pm 30) \text{ nm}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Der ermittelte Wert für die Wellenlänge stimmt also gut mit der Angabe von (635 ± 10) nm für den Laserpointer überein. Im Folgenden wird für die Wellenlänge der gerundete Mittelwert von 640 nm verwendet.

3.c) Entstehen des Interferenzmusters bei Beugung an einem Haar

Wenn Laserlicht auf ein Haar fällt, wird es von diesem gestreut oder absorbiert. Das Haar stellt also ein sehr schmales Hindernis für den Laserstrahl dar und führt so zu Interferenz.

Wie in dem vorherigen Aufgabenteil kann man sich die auf einem Schirm auftreffende Welle erneut als eine Überlagerung zweier Wellen vorstellen: Einer Welle, die sich ungestört ausbreitet sowie einer um eine halbe Wellenlänge phasenverschobenen Welle, die von einem Spalt an der Position des Haars ausgeht. Mit dieser phasenverschobenen Überlagerung entsteht genau eine Welle, die nur an dem Haar an der Ausbreitung gehindert wird. Die ungestörte Welle führt auf einem Schirm erneut zu einem hellen Lichtpunkt. Das Interferenzmuster der phasenverschobenen Welle aber entspricht genau dem bei einem Einfachspalt erwarteten Interferenzmuster. Die Breite des Spaltes entspricht dabei der Dicke des Haars. Anders als bei dem vorherigen Versuch sind die Bereiche größerer Intensität in diesem Fall deutlich breiter, dafür aber die Minima genauer zu lokalisieren.

Theoretische Betrachtung

Die Bedingung für das Auftreten von Intensitätsminima bei Beugung an einem Einfachspalt lautet (vgl. z.B. Grehn, J. & Krause, J. (Hrsg.) (1998). Metzler Physik. Hannover: Schroedel)

$$n\lambda \stackrel{!}{=} a \sin \beta_n \approx a \frac{d_n}{L}. \quad (3.6)$$

Hierbei bezeichnet a nun den zu bestimmenden Haardurchmesser und β_n den Ablenkungswinkel der Welle zur ungestörten Ausbreitungsrichtung (vgl. Abb. 11). Für kleine Ablenkungen lässt sich der Sinus in guter Näherung durch den Abstand L zum Schirm und dem Abstand d_n , den das n -te Intensitätsminimum auf dem Schirm zum Hauptmaximum auf dem Schirm besitzt, ausdrücken.

Um die Dicke des untersuchten Haars zu bestimmen, kann man also d_n als Funktion der Beugungsordnung untersuchen. Der Zusammenhang

$$d_n \approx n \frac{\lambda L}{a} \quad (3.7)$$

erlaubt dann die Bestimmung von a aus der Steigung $b := \frac{\lambda L}{a}$ in der obigen Gleichung.

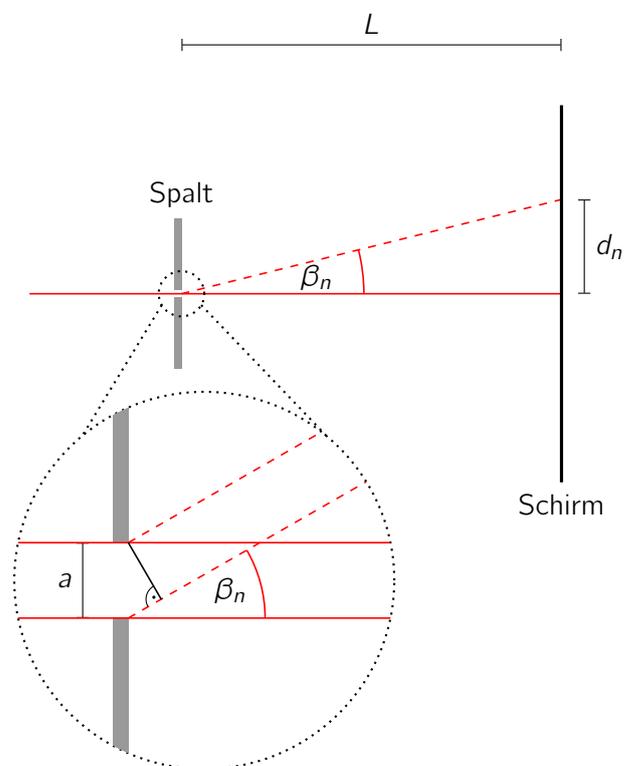
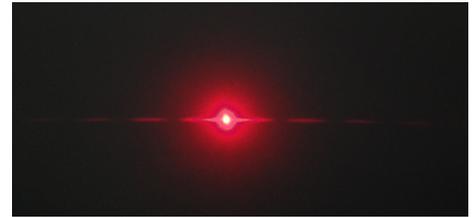


Abbildung 11: Skizze zur Interferenzzeugung bei der Beugung an einem Haar.

3.d) Versuchsaufbau und Durchführung

Für die Bestimmung der Dicke verschiedener Haare wird ein Aufbau wie in Abbildung 11 verwendet. Die nebenstehende Abbildung 12 zeigt ein typisches Interferenzmuster bei dieser Anordnung.



Die Länge L wurde mit einem Gliedermaßstab bestimmt und betrug in den folgenden Versuchen

$$L = (2,000 \pm 0,002) \text{ m} . \quad (3.8)$$

Abbildung 12: Interferenzmuster für die Beugung an einem Haar.

Die Unsicherheit der Längenbestimmung ist hier deutlich geringer als bei dem vorherigen Versuch.

Die experimentelle Bestimmung der Dicke von Haaren wurde mit drei Haaren von unterschiedlichen Personen durchgeführt. Die folgende Tabelle gibt die gemessenen Werte wider.

Tabelle 3: Messwerte zur Bestimmung der Haardicken von drei unterschiedlichen Haaren.

Haar 1			Haar 2			Haar 3		
n	d_n/cm	$\Delta d_n/\text{cm}$	n	d_n/cm	$\Delta d_n/\text{cm}$	n	d_n/cm	$\Delta d_n/\text{cm}$
0	0,00	0,1	0	0,00	0,1	0	0,00	0,1
1	2,30	0,2	1	1,40	0,2	1	1,60	0,2
2	4,60	0,2	2	2,70	0,2	2	3,35	0,2
3	6,80	0,2	3	4,15	0,2	3	4,85	0,2
4	9,40	0,2	4	5,65	0,2	4	6,35	0,2
			5	7,10	0,2	5	8,20	0,2
						6	9,75	0,2
-1	-2,30	0,2	-1	-1,40	0,2	-1	-1,65	0,2
-2	-4,65	0,2	-2	-2,75	0,2	-2	-3,35	0,2
-3	-6,80	0,2	-3	-4,00	0,2	-3	-4,80	0,2
-4	-9,35	0,2	-4	-5,45	0,2	-4	-6,55	0,2
			-5	-7,00	0,2	-5	-8,20	0,2
						-6	-9,90	0,2

Die Unsicherheit bei der Bestimmung von d_n wurde zu 1 mm bis 2 mm abgeschätzt.

Auswertung

In den folgenden Graphen sind für die einzelnen Haare die Werte für d_n über n aufgetragen.

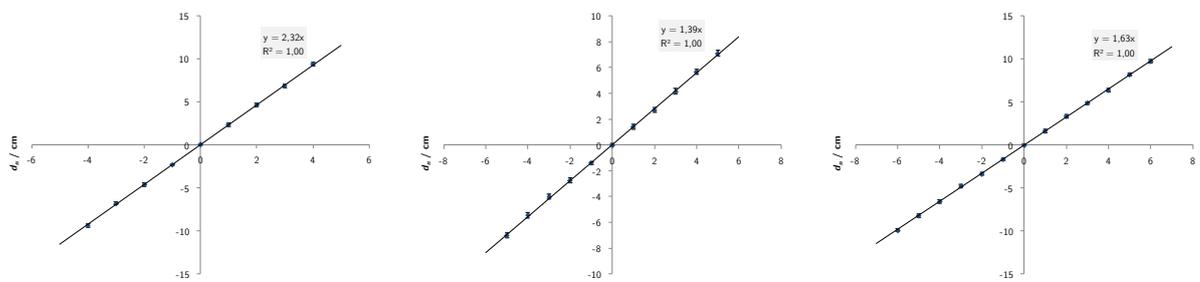


Abbildung 13: Graphen für d_n als Funktion der Beugungsordnung n für die Beugung an Haaren.

Die geringen Unsicherheiten in den Messungen von d_n und die sehr gute Linearität der Daten ermöglichen es kaum, Ausgleichsgeraden anderer Steigungen durch die Datenpunkte zu legen.

Daher wurde darauf verzichtet und die Unsicherheit in der Steigung vernachlässigt.

Für die Dicken a der untersuchten Haare ergibt sich mit (3.7) aus den Daten

$$\begin{aligned}
 \text{Haar 1 } (b = 2,32 \text{ cm}^{-1}): \quad a &= \frac{\lambda L}{b} \approx (56 \pm 3) \mu\text{m} \\
 \text{Haar 2 } (b = 1,39 \text{ cm}^{-1}): \quad a &= \frac{\lambda L}{b} \approx (92 \pm 4) \mu\text{m} \\
 \text{Haar 3 } (b = 1,63 \text{ cm}^{-1}): \quad a &= \frac{\lambda L}{b} \approx (79 \pm 4) \mu\text{m}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Der Fehler in den Ergebnissen wurde aus den Unsicherheiten der Eingangsgrößen in (3.7) mit Hilfe einer linearen Fehlerfortpflanzung bestimmt zu

$$\Delta a \approx a \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta b}{b} \right). \tag{3.10}$$

Dabei wurde der letzte Summand aufgrund der geringen Varianz der Steigungen nicht berücksichtigt.

Die ermittelten Werte für die Haardicken liegen in dem erwarteten Bereich für die Dicke menschlicher Haare, die mit $20 \mu\text{m}$ bis zu $120 \mu\text{m}$ angegeben wird (die Angaben für den Bereich variieren je nach Quelle).

Bewertung - Experimentelle Aufgabe - Interferenzversuche		Punkte
3.a)	Erklären der Entstehung des Interferenzmuster	3
	Ableiten eines Zusammenhanges wie (3.2)	4
3.b)*	Idee zur Bestimmung der Wellenlänge (Nutzung linearer Abhängigkeit o.ä.)	1
	Beschreiben des Versuchsaufbaus	2
	Aufnahme einer geeigneten Anzahl an Messwerten	3
	Auswerten der Messwerte	3
	Angabe eines sinnvollen Ergebnisses und Vergleich mit Referenzwerten	3
	Fehlerbetrachtung für Ergebnisse	2
3.c)	Erklären der Entstehung des Interferenzmuster	2
	Ableiten eines Zusammenhanges wie (3.6)	3
3.d)	Idee zur Bestimmung der Haardicke (Nutzung linearer Abhängigkeit o.ä.)	1
	Beschreiben des Versuchsaufbaus	2
	Aufnahme einer geeigneten Anzahl an Messwerten (2 Pkt. für erste Messreihe, je 1 Pkt. für zwei weitere)	4
	Auswerten der Messwerte	3
	Angabe eines sinnvollen Ergebnisses für Haardicken ($20 \mu\text{m} \leq a \leq 120 \mu\text{m}$)	2
	Fehlerbetrachtung für Ergebnisse	2
		40

* Es wird von den Teilnehmenden nicht erwartet, dass mehrere Messreihen für die Bestimmung der Wellenlänge aufgenommen werden.