Experimentelle Klausur - Moiré-Effekt

(Bearbeitungszeit: 3 Stunden, maximal zu erreichende Punktzahl: 25 Punkte)

Einleitung

Wenn man zwei periodische, teilweise transparente Muster überlagert, kann es zu einem so genannten Moiré-Effekt kommen. Das durch die Überlagerung entstehende Muster weist dabei regelmäßige Strukturen auf, die in den ursprünglichen Mustern nicht erkennbar waren. Abbildung 1 zeigt die Überlagerung von zwei identischen, aber leicht gegeneinander verdrehten Gittermustern. Neben den eher in senkrechter Richtung verlaufenden Gitterlinien ist in annähernd horizontaler Richtung ein Moiré-Muster in Form von regelmäßigen Streifen zu erkennen.

Die Streifen im Moiré-Muster weisen einen sehr viel größeren Abstand auf als die Gitterlinien. Durch eine Untersuchung des Moiré-Musters lassen sich die Eigenschaften des Gitters sehr genau bestimmen.

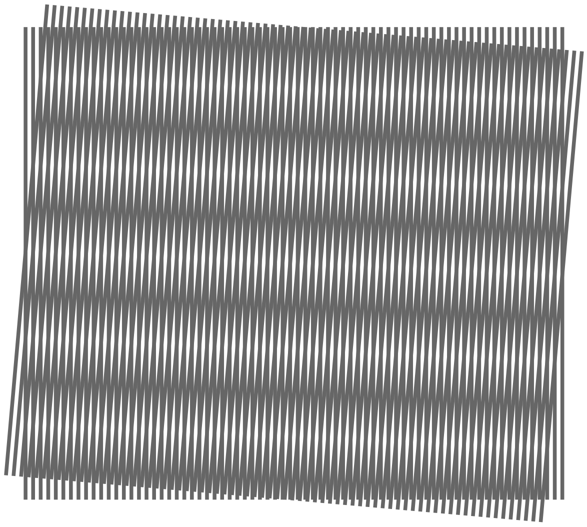

Abb. 1: *Zwei identische, gegeneinander um* 5,0° *verdrehte Gitter erzeugen ein Moiré-Muster.*

Theoretische Vorbetrachtung

Betrachte zwei periodische Gitter, deren Transmissionsgrade beschrieben werden durch

$$T_1 = \frac{1+\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{x})}{2} \qquad \text{und} \qquad T_2 = \frac{1+\cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{x})}{2}\,.$$

Die Gittervektoren $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ stehen senkrecht auf den Gitterlinien und besitzen einen Betrag $|\vec{k}_{1,2}| = 2\pi/g_{1,2}$ mit Gitterkonstanten g_1 und g_2. Die Gitterkonstanten seien dabei sehr viel größer als die Wellenlänge von sichtbarem Licht.

Werden die beiden Gitter überlagert, so ergibt sich der Transmissionsgrad T der überlagerten Gitter zu

$$\begin{aligned} T = T_1 \cdot T_2 &= \frac{1+\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{x})}{2} \cdot \frac{1+\cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{x})}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left\{1 + \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{x}) + \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{x}) + \frac{1}{2}\cos((\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\cdot \vec{x}) + \frac{1}{2}\cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\cdot \vec{x})\right\}\,. \end{aligned}$$

Das Produkt enthält vier periodische Terme. Die ersten beiden repräsentieren die ursprünglichen Gitter, wohingegen die letzten beiden andere Gittervektoren besitzen. Für kleine Winkel θ zwischen den Gittervektoren $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ führt der Gittervektor $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ zu einem Gitter mit größerer Gitterkonstante, das als Moiré-Muster beobachtbar ist.

Nebenstehend sind die durch die Überlagerung entstehenden Gittervektoren für den Fall zweier Gitter mit identischen Gitterkonstanten graphisch dargestellt.

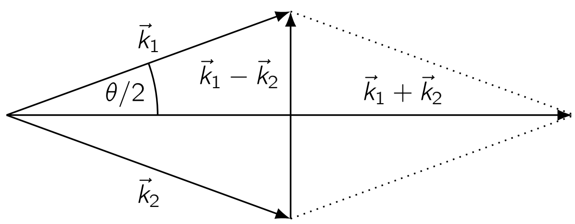

Abb. 2: *Vektordarstellung der Überlagerung zweier Gitter mit Gittervektoren* $\vec{k}_1$ *und* $\vec{k}_2$ *mit* $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2|$ *und eingeschlossenem Winkel* θ.

Im Folgenden sollst du die Moiré-Muster von überlagerten Liniengittern untersuchen. Deren Transmissionsgrad wird durch eine Stufenfunktion beschrieben. Durch die Überlagerung entstehen aber auch hier Muster mit gleichen Gittervektoren wie bei der obigen Betrachtung.

Materialien

Für die Versuche stehen die folgenden Materialien zur Verfügung:

- Transparentfolie mit Gitter **A**
- 4 Ausdrucke auf Papier mit Gittern **A**, **B** und **C** sowie einem Muster **D**
- Transparentfolie mit einem Gitter zur Untersuchung von Muster **D**
- Geodreieck
- Lineal
- Pinwandnadel oder Reißzwecke
- Unterlage aus Holz
- 4 Blatt Millimeterpapier

Hinweise zum Experimentieren und zu den Aufgaben

- Beschreibe und dokumentiere dein Vorgehen so ausführlich, dass jeder Schritt gut nachvollziehbar ist. Skizziere insbesondere deinen Versuchsaufbau.
- Die Folien und Ausdrucke sollten möglichst flach aufeinander liegen, um genaue Messungen zu ermöglichen.
- Durch den nicht immer ganz gleichen Einzug des Druckers können die Muster in Richtung der langen Papierseite leicht gestaucht oder gedehnt sein. Ebenso können auf den einzelnen Ausdrucken in dem Gitter Linien druckbedingt dicker oder dünner erscheinen. Beide Effekte beeinflussen die Messergebnisse nicht maßgeblich.
- Die Ausdrucke mit den Gittern besitzen jeweils eine Winkel- und eine Zentimeterskala. Insbesondere die Winkelskala sollte für genaue Messungen verwendet werden.
- Führe die Versuche so durch, dass die Ergebnisse so genau wie möglich sind und schätze jeweils die Unsicherheiten deiner Ergebnisse ab.

Bei Fragen oder Problemen melde dich bitte. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Bestimmung der Gitterkonstanten von Gitter A (8.0 Pkt.)

Die Gitter auf der mit Gitter **A** beschriebenen Transparentfolie und auf dem entsprechendem Ausdruck sind identisch und besitzen eine Gitterkonstante g_{A}. Wenn du die Folie passend auf den Ausdruck legst und sie um einen kleinen Winkel θ drehst, kannst du ein Moiré-Muster erkennen.

1.a) Die Dicke der Linien der aufgedruckten Winkelskalen beträgt 0,10 mm. Schätze die Ungenauigkeit der Winkelmessung mit diesen Skalen ab. *(1.0 Pkt.)*

1.b) Bestimme für mindestens 10 verschiedene Winkel θ die Gitterkonstante g_{M} des Moiré-Musters. *(3.0 Pkt.)*

1.c) Bestimme daraus mit Hilfe eines geeigneten Graphen die Gitterkonstante g_{A}. *(4.0 Pkt.)*

Aufgabe 2 Bestimmung der Gitterkonstanten von Gitter B (5.0 Pkt.)

Das Gitter **B** besitzt eine geringfügig von g_A abweichende Gitterkonstante g_B.

2.a) Lege Die Folie mit Gitter **A** auf den Ausdruck mit Gitter **B**, ohne die beiden Gitter gegeneinander zu verdrehen. Bestimme die Gitterkonstante g'_M des Moiré-Musters. *(1.0 Pkt.)*

2.b) Bestimme daraus und mit Hilfe deines Ergebnisses aus der ersten Aufgabe den Betrag der Differenz der Gitterkonstanten $\Delta g = |g_\mathrm{A} - g_\mathrm{B}|$. *(2.5 Pkt.)*

2.c) Rotiere die Gitter nun leicht gegeneinander und beobachte, wie sich das Moiré-Muster ändert. Verwende ein Vektordiagramm, um zu begründen, welches der beiden Gitter die größere Gitterkonstante besitzt. Berechne die Gitterkonstante g_B. *(1.5 Pkt.)*

Aufgabe 3 Untersuchung von Gitter C (8.0 Pkt.)

Gitter **C** besitzt die gleiche Gitterkonstante wie Gitter **A**. Allerdings ist die Position der Linien mit Hilfe einer Sinusfunktion verschoben. Wenn die x-Achse in Richtung des Gittervektors festgelegt wird, findet sich damit die n-te Gitterlinie bei der Position

$$x_n = n\, g_\mathrm{A} + a\, \sin(\omega\, n)\,. \tag{1}$$

Dabei bezeichnen a die Amplitude und ω die Winkelfrequenz der sinusförmigen Verschiebung.

Wenn das Gitter **A** auf das Gitter **C** gelegt und gegenüber diesem um einen kleinen Winkel θ verdreht wird, lässt sich die y-Position der einzelnen Moiré-Streifen bis auf einen eventuellen zusätzlichen Offset beschreiben durch

$$y(x) = \frac{m\, g_\mathrm{A} + a\, \sin(\omega\, \frac{x}{g_\mathrm{A}})}{\sin\theta} + x\, \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\,. \tag{2}$$

Dabei nummeriert der Index m die einzelnen Moiré-Streifen. Die Amplitude der sinusförmigen Verschiebungen ist im Moiré-Muster also um einen Faktor $1/\sin\theta$ vergrößert.

3.a) Bestimme experimentell die Winkelfrequenz ω der sinusförmigen Verschiebung. *(2.5 Pkt.)*

3.b) Miss für mindestens 5 verschiedene Winkel θ die Amplitude a' der sinusförmigen Verschiebungen im Moiré-Muster. *(1.5 Pkt.)*

3.c) Bestimme daraus mit Hilfe eines geeigneten Graphen die Amplitude a der Verschiebungen der Gitterlinien. *(4.0 Pkt.)*

Aufgabe 4 Eine Rechenaufgabe (4.0 Pkt.)

Das auf Papier gedruckte Muster **D** besteht aus vielen identischen Zeilen einer sehr stark gestauchten Rechenaufgabe. Ähnlich wie in der vorigen Aufgabe, kann ein Liniengitter mit einer Gitterkonstanten ähnlich dem Zeilenabstand genutzt werden, um die Rechenaufgabe zu vergrößern.

4.a) Lege die Transparentfolie mit dem Gitter für Muster **D** auf den Ausdruck mit dem Muster **D**. Verschiebe die Folie langsam nach oben und anschließend nach unten. Beschreibe deine Beobachtung. *(1.0 Pkt.)*

Ohne Bewertung: Schreibe die in Muster **D** abgedruckte Rechenaufgabe auf und löse sie.

4.b) Gib an, ob der Zeilenabstand der Rechenaufgabe größer oder kleiner als die Gitterkonstante des Liniengitters ist. Begründe deine Antwort *(1.0 Pkt.)*

4.c) Erläutere, was mit dem zu sehenden Muster passieren würde, wenn die Gitterkonstante und der Zeilenabstand vertauscht würden. Berücksichtige dabei auch das Verhalten bei Verschiebung des Liniengitters wie im ersten Aufgabenteil. *(2.0 Pkt.)*