Lernmaterialien PhysikOlympiade

Themenblock 2: Strahlen-optik

Reflexion, Abbildungen durch Linsen und Lichtbrechung

Dieses Vorbereitungsmodul richtet sich an alle Schüler/innen, die sich aktiv auf die PhysikOlympiade vorbereiten wollen oder auch einfach nur Spaß an physikalischen Themen haben. Der vorgestellte Stoff befasst sich zu einem Großteil mit schulischen Inhalten, kann diese aber in einigen Bereichen auch übersteigen, da dieses Modul an das Niveau der Aufgaben aus der 1. und 2. Runde der Olympiade angepasst ist. Das Modul umfasst einen Theorieteil mit Formeln, Übungsaufgaben und einen abschließenden Test um das gelernte Wissen zu überprüfen.

Block 2 befasst sich mit der Strahlenoptik und umfasst Reflexion, Abbildungen durch Linsen und Lichtbrechung. Der Strahloptik liegt das Modell des Lichtstrahls zugrunde. Dies bedeutet, dass die Ausbreitung von Licht, mithilfe von Strahlen modelliert wird. Im Gegenzug dazu werden in der Wellenoptik physikalische Phänomene mit Welleneigenschaften erklärt. Viel Spaß beim Bearbeiten des Lernmaterials!

IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie und Formeln

Licht breitet sich von einer Lichtquelle in alle Richtungen aus. In der Strahlenoptik wird diese Ausbreitung mit Lichtstrahlen modelliert. Einen idealen Lichtstrahl, mit unendlich kleinem Durchmesser, gibt es natürlich nicht, aber das Modell eignet sich um folgende Phänomene zu erklären.

1.1 Reflexionsgesetz und Entstehung von Spiegelbildern

Der Einfallswinkel α (Winkel zwischen einfallendem Lichtstrahl und Einfallslot) und der Reflexionswinkel β (Winkel zwischen reflektiertem Lichtstrahl und Einfallslot) sind gleich groß. Das Lot steht dabei senkrecht auf der Spiegelebene.

Das Licht des Gegenstands, der hier als Pfeil dargestellt ist, wird vom Spiegel gemäß dem Reflexionsgesetz, Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel, reflektiert und fällt ins Auge des Betrachters. Für den Betrachter sieht es so aus, als ob sich das Spiegelbild seitenverkehrt und unterhalb des Spiegels befindet.

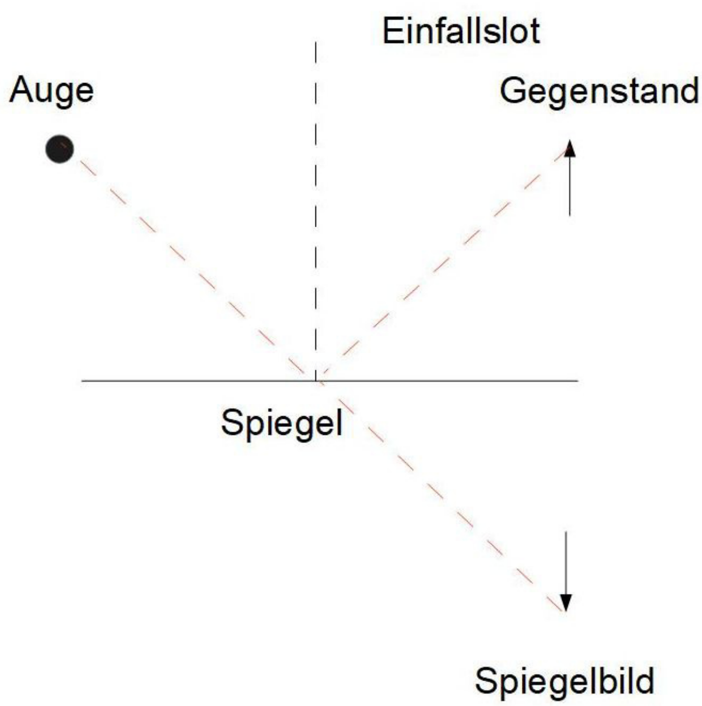


Abb. 1. *Entstehung eines Spiegelbilds*

1.2 Abbildungsmaßstab, Linsengleichung und Brennweite von zwei dünnen Linsen

Für die Abbildung eines Gegenstandes (z.B. mit einer Linse) folgt aus dem Strahlensatz der **Abbildungsmaßstab**:

$$\boxed{\frac{B}{G} = \frac{b}{g}}. \tag{1.1}$$

G ist die Gegenstandsgröße und B die Bildgröße. Die Entfernung des Gegenstands von der Linse (Gegenstandsweite) wird mit g und die Entfernung des Bilds von der Linse (Bildweite) wird mit b bezeichnet.

Bei der Betrachtung von Linsen wird oft das Modell der dünnen Linse verwendet. Das bedeutet, es wird die Dicke des Glases vernachlässigt und davon ausgegangen, dass die Lichtstrahlen an der Mittelebene gebrochen werden. In Wahrheit werden die Lichtstrahlen natürlich zweimal gebrochen, jeweils beim Ein- und Austritt in das Material. Für eine dünne Linse gilt die im Folgenden hergeleitete **Linsengleichung**.

Wie du der Abbildung 2 entnehmen kannst gilt nach dem Strahlensatz für die Brennweite f:

$$\frac{G}{f} = \frac{B}{b-f}$$
$$\Leftrightarrow \frac{B}{G} = \frac{b-f}{f}.$$

Mit dem Abbildungsmaßstab 1.1 folgt dann:

$$\frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} = \frac{b}{f} - \frac{f}{f} = \frac{b}{f} - 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{g} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b}.$$

Auf diese Weise erhält man die **Linsengleichung**:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}}.$$

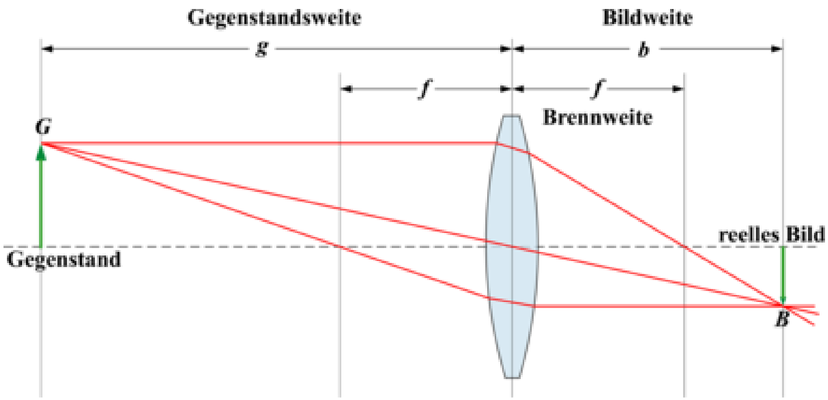


Abb. 2. *Skizze zur Linsengleichung von Anastasius zwerg, CC BY-SA 3.0*

Befinden sich **zwei dünne Linsen** mit den Brennweiten f_1 und f_2 in einem **sehr kleinen Abstand** zueinander, so dass dieser vernachlässigt werden kann, können die beiden Linsen als Linsensystem mit der Brennweite f betrachtet werden. Für diese Brennweite gilt näherungsweise:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}}.$$

1.3 Brechungsindex, Snelliussches Brechungsgesetz und Totalreflexion

Der **Brechungsindex** ist das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit in einem Medium zur Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Er wird auch als optische Dichte bezeichnet. Glas hat einen höheren Brechungsindex als Wasser. Dies siehst du im Bild daran, dass das Geländer am Übergang von Luft zu Wasser scheinbar einen Knick hat. Da Wasser einen höheren Brechungsindex als Luft hat, wird der sich im Wasser befindliche Teil des Geländers optisch angehoben (siehe Abbildung 3).

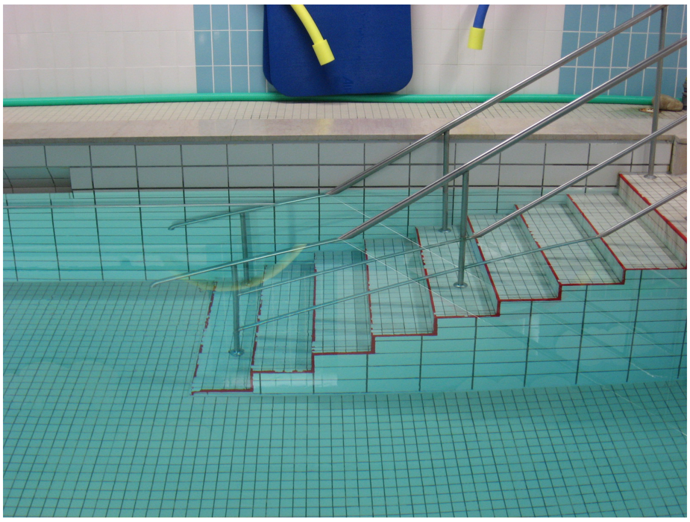


Abb. 3. *Lichtbrechung im Schwimmbad von Panoga, CC BY-SA 4.0*

Am Übergang von zwei unterschiedlichen Medien mit Brechungsindex n_1 und n_2 wird ein Lichtstrahl gebrochen. Das **Snelliussches Brechungsgesetz** besagt:

$$\boxed{n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2}.$$

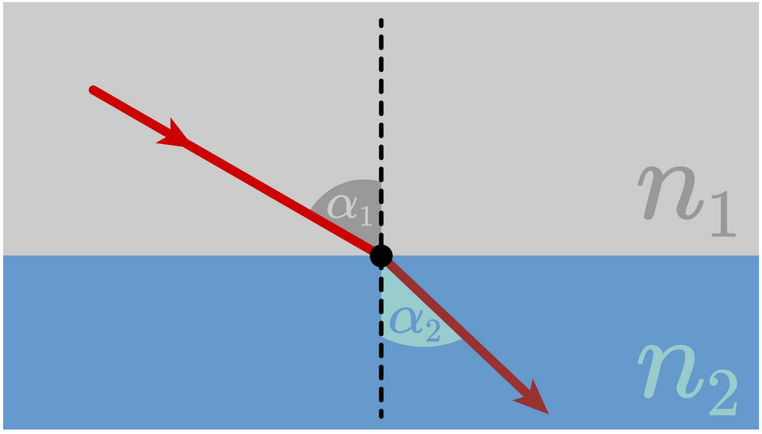


Abb. 4. *Skizze Snelliussches Brechungsgesetz von FufaeV, CC BY 4.0*

Mit dieser Formel kann man z.B. berechnen, in welchem Winkel das Licht beim Übergang von Wasser zu Luft gebrochen wird. Je mehr sich Einfallswinkel und Brechungswinkel unterscheiden, desto größer ist der Knick, den du in Abbildung 3 siehst.

Wenn du vor dem Fenster stehst, kannst du dich selbst im Fenster sehen. Das Licht, dass von dir reflektiert wird geht zum Teil durch das Fenster hindurch, wird zum Teil aber auch reflektiert, wie an einem Spiegel. Es kann aber auch vorkommen, dass Licht vollständig reflektiert wird. Dies nennt man **Totalreflexion**.

Ist beim Übergang von einem optisch dichten (Brechungsindex n_1) in ein optisch dünnes Material (Brechungsindex n_2) der Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel, so wird das Licht vollständig reflektiert. Für den Grenzwinkel α_G ab dem **Totalreflexion** auftritt gilt:

$$\boxed{\sin \alpha_G = \frac{n_2}{n_1}}.$$

Totalreflexion wird bei Glasfaserkabeln, die für Highspeed Internetanschlüsse benötigt werden, genutzt und erklärt das Phänomen der Fata Morgana.

1.4 Linsenschleiferformel

Bei dünnen sphärischen Linsen besteht zwischen der Brennweite f, dem Brechungsindex des Materials n und den Krümmungsradien R_1 und R_2 der Zusammenhang

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})}.$$

Bei einer bikonvexen oder bikonkaven Linse haben R_1 und R_2 unterschiedliche Vorzeichen. Für eine symmetrische bikonvexe Linse mit Krümmungsradius R gilt also $R = R_1 = -R_2$ und damit

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1)\frac{2}{R}}.$$

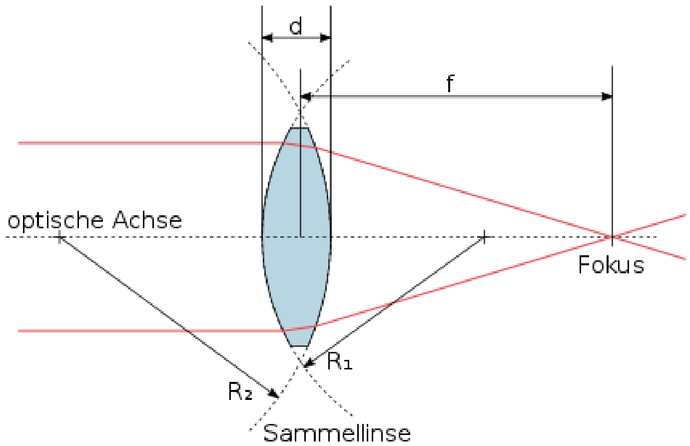


Abb. 5. *Skizze zur Linsenschleiferformel von Michael Schreiter, CC BY-SA 3.0*

1.5 Weiterführende Links

LEIFIphysik
Auf LEIFIphysik findest du viele anschauliche Erklärungen, mit vielen Graphiken, Beispielen, Aufgaben mit Lösungen. Zudem findest du auch Informationen zur Wellenoptik.

Online-Brückenkurs Physik
Ebenfalls viele Graphiken und Aufgaben findest du im Online-Brückenkurs Physik. Wenn du dich dort anmeldest, kannst du auch einen Abschlusstest zum Thema absolvieren.

Orpheus-Verein
Das Skript zur Optik vom Orpheus-Verein ist in Anlehnung an einen Vortrag des Orpheus-Seminars entstanden. Hier werden viele Formel und Gesetze hergeleitet.

Optik - Universität Wien

Das Angebot zum Thema Optik der Universität Wien enthält umfangreiche Informationen, Anwendungen (Mikroskop, Präparation und Färbung) und Linsenfehler, wie z.B. sphärische und chromatische Aberration. Zudem findest du auch Informationen zur Wellenoptik.

2 Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind aus vergangenen Auswahlwettbewerben. Anhand der Aufgaben kannst du die Inhalte vertiefen und dich auf kommende Runden vorbereiten. Die Kreise oben rechts neben der Aufgabe geben den Schwierigkeitsgrad an. Je mehr Kreise ausgefüllt sind, desto schwieriger ist die Aufgabe. Die Lösungen der Aufgaben findest du im Anhang.

Aufgabe 1 Ein unscharfes Bild ●●○

(1. Runde zur 47. IPhO 2016)

Ein Lineal wird fotografiert. Weit hinter dem Lineal befindet sich eine Lichterkette, deren kleine Lämpchen auf dem Foto unscharf erscheinen.

Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Abbildung durch eine einzelne, dünne Linse erzeugt wird.

Bestimme mit Hilfe des Fotos den Durchmesser der Kameralinse.

Abb. 6. *Unscharfes Foto einer Lichterkette.*

Aufgabe 2 Schärfentiefe ●●○

(3. Runde zur 39. IPhO 2008)

Bei einer Kamera wird ein fokussiertes Punktobjekt im Abstand g vor der Linse auf die Filmebene abgebildet. Mit der „Schärfentiefe“ Δg bezeichnet man die maximal zulässige Verschiebung des Objektes entlang der optischen Achse, bei der das von dem Objekt auf die Filmebene fallende Licht immer noch nah der ursprünglichen Stelle auftrifft.

Bestimme die Schärfentiefe Δg als Funktion der Gegenstandsweite, der Brennweite f der Kameralinse, der maximal zulässigen Verschiebung in der Filmebene l und dem Durchmesser D der Kamerablende.

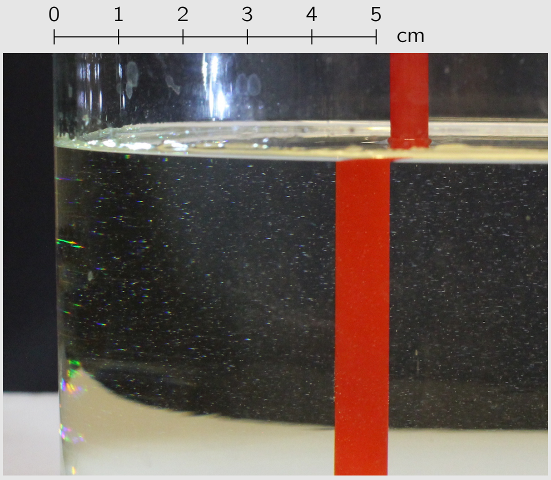
Gehe in dieser Aufgabe von achsennahen Strahlen aus und nehme an, dass sowohl der Objektabstand groß im Vergleich zur Brennweite der Kameralinse ist als auch D groß gegenüber l ist.

Aufgabe 3 Verschobener Strohhalm

(1. Runde zur 49. IPhO 2018)

Ein Strohhalm wird mittig in ein teilweise mit einer transparenten Flüssigkeit gefülltes Glas getaucht. Beobachtet man das Glas von der Seite und verschiebt den Strohhalm senkrecht zur Blickrichtung und entlang des Durchmessers, scheint sich der Strohhalm in der Flüssigkeit gegenüber dem Strohhalm oberhalb der Flüssigkeit zu verschieben.

Das mit einem Maßstab versehene Foto zeigt die Situation, bei der sich der Strohhalmteil in der Flüssigkeit gerade von dem Teil oberhalb zu lösen scheint. Der Durchmesser des dabei verwendeten dünnwandigen Glases beträgt 14,4 cm. Nimm an, dass das Glas aus einer Entfernung betrachtet wird, die groß verglichen mit dem Durchmesser des Glases ist.



Bestimme näherungsweise den Brechungsindex der Flüssigkeit.

Aufgabe 4 Totalreflexion über einer Straße

(3. Runde zur 48. IPhO 2017)

Wenn man mit dem Auto über eine lange gerade Straße fährt, so lassen sich an heißen, sonnigen Tagen manchmal in einiger Entfernung Spiegelungen über dem heißen Asphalt beobachten, bei denen es so aussieht, als würden Objekte an der Straßenoberfläche gespiegelt.

Nimm an, dass deine Augen sich etwa 1,5 m über dem Asphalt befinden und dass du die Spiegelungen ab einer Entfernung von etwa 200 m beobachtest.

Bestimme die Lufttemperatur direkt über dem Asphalt.

Du kannst annehmen, dass isotherme Luftschichten immer parallel zum Boden verlaufen. Für den Brechungsindex n der Luft gilt, dass $n-1$ proportional zur Dichte der Luft ist. Den Luftdruck p kannst du konstant zu 1 atm annehmen.

Darüber hinaus können die folgenden Daten für die Bearbeitung hilfreich sein:

- Lufttemperatur in einer Höhe von 1,5 m über der Straße: 25 °C
- Brechungsindex von Luft bei $T = 20\,°\mathrm{C}$ und $p = 1\,\mathrm{atm}$: $n_0 = 1 + 2{,}92 \cdot 10^{-4}$
- Dichte ρ von Luft bei verschiedenen Temperaturen und $p = 1\,\mathrm{atm}$:

$T/°\mathrm{C}$	5	10	15	20	25	30
$\rho/\mathrm{kg\,m^{-3}}$	1,270	1,247	1,225	1,204	1,184	1,164

Aufgabe 5 Achromatische Linse

(3. Runde zur 43. IPhO 2012)

Der Brechungsindex der meisten Materialien ist abhängig von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes. Oft kann man diese Abhängigkeit im Bereich des sichtbaren Lichtes gut durch eine lineare Näherung modellieren. So gilt für die Brechungsindizes von Kronglas (n_1) und Flintglas (n_2) näherungsweise

$$n_1 = n_{1,0} + \alpha_1 \Delta\lambda \quad \text{mit} \quad n_{1,0} = 1,550 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{nm}^{-1}\,,$$
$$n_2 = n_{2,0} + \alpha_2 \Delta\lambda \quad \text{mit} \quad n_{2,0} = 1,750 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{nm}^{-1}\,.$$

Der Ausdruck $\Delta\lambda$ bezeichnet dabei die Differenz der Wellenlänge zu einer Referenzwellenlänge λ_0 mit $\lambda_0 = 600\,\mathrm{nm}$.

Für die Anwendung in optischen Geräten ist es oft wünschenswert, Linsensysteme so zu konstruieren, dass ihre Brennweite unabhängig von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes ist, die also achromatisch sind. Dazu kann man mehrere Linsen z.B. aus Kron- und Flintglas hintereinandersetzen.

Betrachte ein System, bei dem Licht auf die plane Seite einer dünnen Kronglaslinse fällt, die ohne irgendeinen Luftspalt direkt mit einer ebenfalls dünnen Linse aus Flintglas verbunden ist. Die Brennweite dieses Linsensystems soll für Licht im optischen Wellenlängenbereich konstant 30 cm betragen. Für das System sollen außerdem sphärische Linsen verwendet werden, so dass sich die Brennweite f einer Linse durch den Brechungsindex n des Linsenmaterials und die Krümmungsradien der Begrenzungsflächen mit Hilfe der Linsenschleiferformel ausdrücken lässt durch

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_{\text{ein}}} - \frac{1}{R_{\text{aus}}}\right)\,.$$

Hierbei trägt ein Radius ein negatives Vorzeichen, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der Einfallsseite liegt.

Gebe an, ob es sich bei den Linsen um Sammel- oder Zerstreuungslinsen handelt und bestimmen Sie deren Krümmungsradien.

Hinweis: Für diese Aufgabe ist eine Übersicht über die verschiedenen Linsenarten und die Bedeutung der Krümmungsradien hilfreich. Diese findest du in folgendem Artikel bei Wikipedia: Linse (Optik)

Aufgabe 6 Unsichtbares Glasröhrchen

(Auswahlwettbewerb zur IPhO 1979, 1. Runde)

Ein Glasröhrchen mit dem inneren Radius r und dem äußeren Radius R ($r < R$) ist mit einer lumineszierenden Flüssigkeit gefüllt, die unter dem Einfluss von Röntgenstrahlung grünes Licht aussendet. Für grünes Licht beträgt der Brechungsindex des Glases n_1, derjenige der Flüssigkeit n_2. Das Röhrchen befindet sich in Luft. Du kannst annehmen, dass der Brechungsindex von Luft 1 beträgt.

Leite eine Bedingung für das Verhältnis $\frac{r}{R}$ ab, die erfüllt sein muss, damit es bei Betrachtung des Röhrchens von der Seite so aussieht, als sei die Dicke von dessen Glaswand Null.

Aufgabe 7 Augenoperation

(3. Runde zur 42. IPhO 2011)

Eine stark kurzsichtige Frau trägt eine Brille mit einer Stärke von -10 Dioptrien auf beiden Augen. Der Dioptriewert gibt dabei den Brechwert einer Linse, also den Kehrwert ihrer Brennweite in Metern an. Linsen mit negativem Dioptriewert sind Zerstreuungslinsen. Die als dünn anzunehmenden Linsen der Brille befinden sich etwa 2,0 cm vom Auge entfernt. Bei einer Operation werden der Frau künstliche Linsen eingesetzt, so dass sie anschließend einen Text, der 30 cm von ihrem Auge entfernt ist ohne Brille scharf sehen kann. Ihr erscheinen die Buchstaben dabei ebenfalls größer zu sein als vor der Operation.

Finde heraus, ob sie die Buchstaben verglichen mit der Situation vor der Operation im gleichen Abstand zum Auge tatsächlich größer sieht. Berechne ggf., um wie viel sie die Buchstaben im Vergleich zu vorher vergrößert sieht.

3 Abschlusstest

Fühlst du dich im Bereich Strahlenoptik nun fit? Teste dich selbst: Hier geht es zum Test.

Lernmaterialien PhysikOlympiade

Themenblock 2: Strahlenoptik

Lösungen der Aufgaben

Inhaltsverzeichnis

IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik

Aufgabe 1 Ein unscharfes Bild

(1. Runde zur 47. IPhO 2016)

Ein Lineal wird fotografiert. Weit hinter dem Lineal befindet sich eine Lichterkette, deren kleine Lämpchen auf dem Foto unscharf erscheinen.

Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Abbildung durch eine einzelne, dünne Linse erzeugt wird.

Bestimme mit Hilfe des Fotos den Durchmesser der Kameralinse.

Abb. 1. *Unscharfes Foto einer Lichterkette.*

Lösung

Da die Lichterkette weit weg ist, treffen nahezu parallele Lichtstrahlen auf die Linse, deren Durchmesser L betrage. Die als Punktquellen annehmbaren Lichter erzeugen auf dem Bildsensor Kreise mit einem Durchmesser D. Die folgende Skizze veranschaulicht den Strahlenverlauf bei der Abbildung.

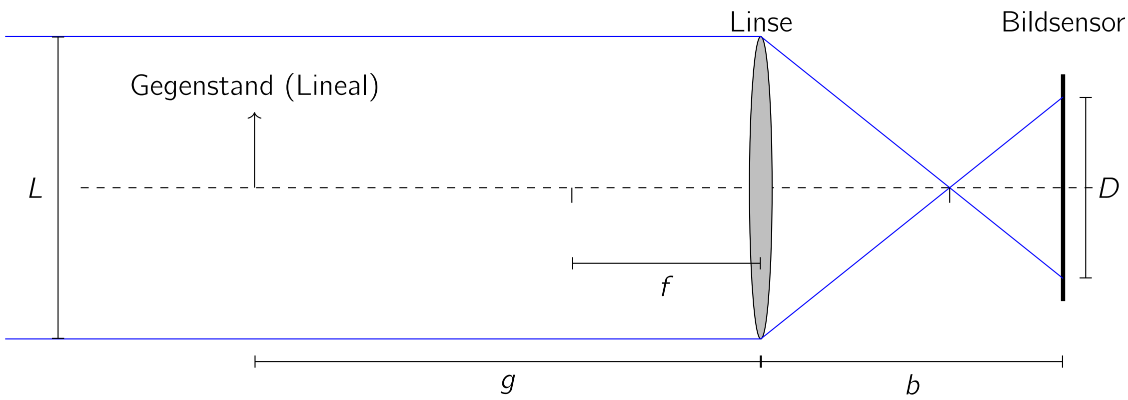


Abb. 2. *Strahlenverlauf bei der Abbildung einer Lampe der Lichterkette.*

Der Abstand des Lineals zur Linse wird dabei mit g und der Abstand des Bildes des Lineals auf dem Bildsensor zur Linse mit b bezeichnet. Außerdem werden die Gegenstandsgröße des Lineals (cm-Maßstab) mit G und die entsprechende Bildgröße mit B bezeichnet.

Mit diesen Bezeichnungen gilt aufgrund des Strahlensatzes

$$\frac{L}{f} = \frac{D}{b-f} \tag{1.1}$$

und außerdem für die Abbildung des Lineals

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{b}\frac{B}{G}\,. \tag{1.2}$$

Dies lässt sich in der Abbildungsgleichung für dünne Linsen nutzen, um diese umzuschreiben zu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b}\left(\frac{B}{G} + 1\right) \qquad \text{bzw.} \qquad b = f\left(1 + \frac{B}{G}\right) . \tag{1.3}$$

Eingesetzt in (1.1) ergibt sich damit für den Linsendurchmesser

$$\boxed{L = \frac{G}{B}D} . \tag{1.4}$$

Vermisst man also die Kreise mit dem scharf abgebildeten Lineal, erhält man den Linsendurchmesser.

Im vorliegenden Fall lässt sich der Durchmesser der Kreise zu etwa $(36{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mm}$ auf der Skala des Lineals bestimmen. Damit besitzt die Linse einen Durchmesser von

$$\boxed{L = (36{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mm}} . \tag{1.5}$$

Hinweis: Der ermittelte Linsendurchmesser stimmt bei dem verwendeten Objektiv nicht sehr gut mit dem aus Brennweite (85 mm) und Blendenzahl (1,8) zu berechnenden Wert von $L = 85\,\mathrm{mm}/1{,}8 \approx 47\,\mathrm{mm}$ überein. Die Annahme einer einfachen dünnen Linse scheint in diesem Fall also keine gute Näherung zu sein.

Bewertung - Ein unscharfes Bild		**Punkte**
1	Beschreibung der Situation (Skizze o.ä.)	2
	Verwendung des Strahlensatzes (1.1)	1
	Verwendung des Abbildungsmaßstabes (1.2) und der Abbildungsgleichung (1.3)	2
	Angabe eines Ausdrucks für den Linsendurchmesser (1.4)	3
	Numerische Bestimmung des Ergebnisses (1.5)	2
		10

Aufgabe 2 Schärfentiefe

(3. Runde zur 39. IPhO 2008)

Bei einer Kamera wird ein fokussiertes Punktobjekt im Abstand g vor der Linse auf die Filmebene abgebildet. Mit der „Schärfentiefe" Δg bezeichnet man die maximal zulässige Verschiebung des Objektes entlang der optischen Achse, bei der das von dem Objekt auf die Filmebene fallende Licht immer noch nah der ursprünglichen Stelle auftrifft.

Bestimme die Schärfentiefe Δg als Funktion der Gegenstandsweite, der Brennweite f der Kameralinse, der maximal zulässigen Verschiebung in der Filmebene l und dem Durchmesser D der Kamerablende.

Gehe in dieser Aufgabe von achsennahen Strahlen aus und nehme an, dass sowohl der Objektabstand groß im Vergleich zur Brennweite der Kameralinse ist als auch D groß gegenüber l ist.

Lösung

Aus der Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{2.1}$$

folgt

$$\frac{\delta b}{\delta g} = \frac{\delta}{\delta g}\frac{f g}{g-f} = -\frac{b^2}{g^2} \tag{2.2}$$

Bei einer kleinen Verschiebung des Gegenstandes auf der optischen Achse verschiebt sich demnach das Bild um

$$\Delta b = -\Delta g \frac{b^2}{g^2} \tag{2.3}$$

auf der optischen Achse. Aus der Geometrie der durch die Linse am Rand der Kamerablende verlaufenden Strahlen erhält man mit dem Strahlensatz $\frac{\Delta b}{2l} = \frac{b \pm \Delta b}{D}$ und damit $\Delta b = \frac{2l}{D \pm 2l}$. Der größere Wert für Δb ergibt sich bei Verwendung des Minuszeichens im Nenner, also für eine Verschiebung des Bildes von der Linse weg bzw. bei Verschiebung des Gegenstandes zur Linse hin. Eingesetzt in Gleichung 2.3 und mit Hilfe der Abbildungsgleichung erhalten wir schließlich

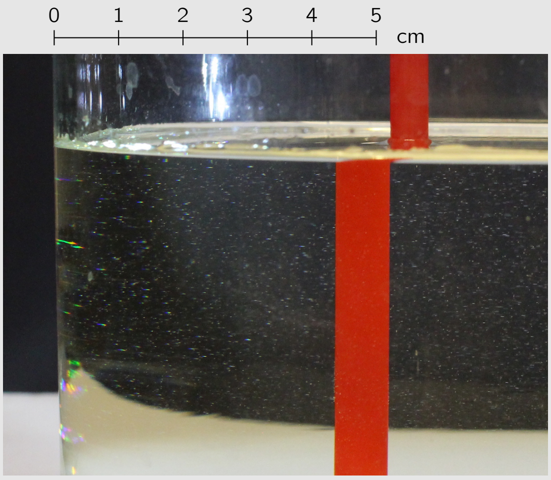
$$\Delta g = \Delta b \frac{g^2}{b^2} = \frac{2l}{D-l}\frac{(g-f)g}{f} \approx \frac{2l}{D}\frac{g^2}{f} \tag{2.4}$$

Schärfentiefe	Punkte
Abbildungsgleichung	0,5
Ableiten der Abbildungsgleichung	1
Benutzung der Geometrie und Strahlensatz	1
Zusammenhang zwischen l und Δb	1
Einsetzen und Lösung	1
	4,5

Aufgabe 3 Verschobener Strohhalm

(1. Runde zur 49. IPhO 2018)

Ein Strohhalm wird mittig in ein teilweise mit einer transparenten Flüssigkeit gefülltes Glas getaucht. Beobachtet man das Glas von der Seite und verschiebt den Strohhalm senkrecht zur Blickrichtung und entlang des Durchmessers, scheint sich der Strohhalm in der Flüssigkeit gegenüber dem Strohhalm oberhalb der Flüssigkeit zu verschieben.



Das mit einem Maßstab versehene Foto zeigt die Situation, bei der sich der Strohhalmteil in der Flüssigkeit gerade von dem Teil oberhalb zu lösen scheint. Der Durchmesser des dabei verwendeten dünnwandigen Glases beträgt 14,4 cm. Nimm an, dass das Glas aus einer Entfernung betrachtet wird, die groß verglichen mit dem Durchmesser des Glases ist.

Bestimme näherungsweise den Brechungsindex der Flüssigkeit.

Lösung

Für die Brechung muss das dünnwandige Glas nicht mit berücksichtigt werden, so dass es ausreichend ist, den Übergang zwischen Luft und dem Flüssigkeitskörper zu untersuchen. Die nebenstehende Skizze zeigt eine Aufsicht auf das Glas. Dabei ist der Radius des Glases mit R bezeichnet, und d gibt den Durchmesser des Strohhalmes an. Die beiden roten Rechtecke symbolisieren die Querschnitte des Strohhalms (rechts) und des in der Flüssigkeit wahrgenommenen Bildes des Strohhalmes (links). Der Abstand zwischen dem rechten Rand des Strohhalms und dem Rand des Glases in dieser Situation wird mit a bezeichnet.

Da das Glas aus einer größeren Entfernung beobachtet wird, müssen die zum Beobachter laufenden Lichtstrahlen das Glas in dieser Aufsicht senkrecht nach unten verlassen. Mit den Bezeichnungen in der Abbildung ist

$$\frac{R-a}{R} = \sin\varphi' = n\sin\varphi \approx n\,\frac{R-a-d}{R}\,. \qquad (3.1)$$

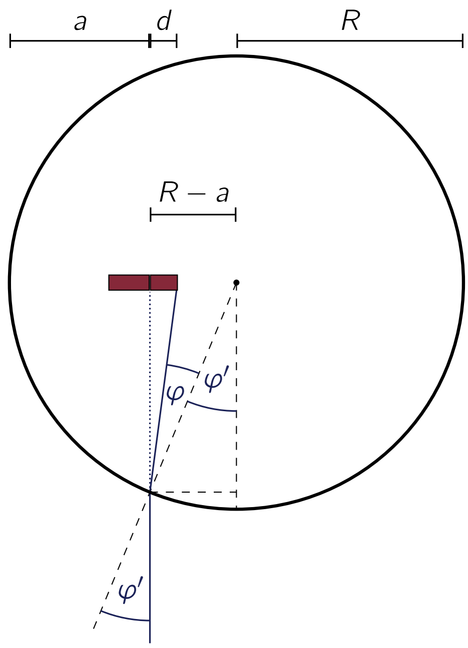


Abb. 3. *Aufsicht auf das Glas mit dem verschobenen Strohhalm.*

Dabei wurde das Brechungsgesetz nach Snellius verwendet und es wurde ausgenutzt, dass die Entfernung vom Übergangspunkt zwischen Luft und Flüssigkeit zum linken Rand des Strohhalms etwa gleich groß ist wie die entsprechende Entfernung zum rechten Rand des Strohhalms[1].

[1]Der Winkel φ lässt sich auch ohne diese Näherung bestimmen. Es ist $\tan(\varphi'-\varphi) = d/\sqrt{R^2-(R-a)^2}$ und damit $\varphi = \varphi' - \arctan\frac{d}{\sqrt{R^2-(R-a)^2}}$. Daraus folgt der Brechungsindex

$$n = \frac{\frac{R-a}{R}}{\sin\left(\arcsin\frac{R-a}{R} - \arctan\frac{d}{\sqrt{R^2-(R-a)^2}}\right)} \approx 1{,}44\,.$$

Der Radius des Glases beträgt laut Aufgabenstellung $R = 7{,}2\,\text{cm}$. Die in Abbildung 3 eingeführten Größen a und d lassen sich in dem gegebenen Foto mit einem Lineal vermessen und mit Hilfe des Maßstabes in der Abbildung bestimmen zu

$$a = (5{,}24 \pm 0{,}06)\,\text{cm} \qquad \text{und} \qquad d = (0{,}59 \pm 0{,}06)\,\text{cm}\,. \tag{3.2}$$

Mit dem Ergebnis (3.1) und den bestimmten Werten folgt daraus für den Brechungsindex der Flüssigkeit

$$\boxed{n = \frac{R-a}{R-a-d} \approx (1{,}43 \pm 0{,}08)}\,. \tag{3.3}$$

Hinweis: Von den Teilnehmenden wird keine Abschätzung der Unsicherheit des Ergebnisses erwartet. Die verwendete Flüssigkeit war 86,5 % Glycerin mit einem Brechungsindex von etwa 1,45. Der bestimmte Wert ist im Rahmen der Fehlergrenzen gut mit diesem Wert vereinbar.

Bewertung - Verschobener Strohhalm		**Punkte**
3	Beschreiben des Strahlenverlaufs (Skizze o.ä.)	2
	Verwenden des Brechungsgesetzes	1
	Nutzen sinnvoller Näherungen (dünnwandiges Glas, ggf. geometrische Näherung)	1
	Aufstellen einer Beziehung zwischen Brechungsindex und messbaren Größen ähnlich zu (3.3)	2
	Bestimmen notwendiger Größen aus Foto mit Hilfe des Maßstabes	2
	Angeben des Ergebnisses mit $1{,}40 \leq n \leq 1{,}50$ (noch 1 Pkt. bei $1{,}35 \leq n < 1{,}40$ oder $1{,}50 < n \leq 1{,}55$)	2
		10

Literatur: Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus dem Artikel Gluck, P. (2011). A simple method to measure the refractive index of a liquid. *Physics Education, 46* (3), 253.

Aufgabe 4 Totalreflexion über einer Straße

(3. Runde zur 48. IPhO 2017)

Wenn man mit dem Auto über eine lange gerade Straße fährt, so lassen sich an heißen, sonnigen Tagen manchmal in einiger Entfernung Spiegelungen über dem heißen Asphalt beobachten, bei denen es so aussieht, als würden Objekte an der Straßenoberfläche gespiegelt.

Nimm an, dass deine Augen sich etwa 1,5 m über dem Asphalt befinden und dass du die Spiegelungen ab einer Entfernung von etwa 200 m beobachtest.

Bestimme die Lufttemperatur direkt über dem Asphalt.

Du kannst annehmen, dass isotherme Luftschichten immer parallel zum Boden verlaufen. Für den Brechungsindex n der Luft gilt, dass $n-1$ proportional zur Dichte der Luft ist. Den Luftdruck p kannst du konstant zu 1 atm annehmen.

Darüber hinaus können die folgenden Daten für die Bearbeitung hilfreich sein:

- Lufttemperatur in einer Höhe von 1,5 m über der Straße: 25 °C
- Brechungsindex von Luft bei $T = 20\,°\mathrm{C}$ und $p = 1\,\mathrm{atm}$: $n_0 = 1 + 2{,}92 \cdot 10^{-4}$
- Dichte ρ von Luft bei verschiedenen Temperaturen und $p = 1\,\mathrm{atm}$:

$T/°\mathrm{C}$	5	10	15	20	25	30
$\rho/\mathrm{kg\,m^{-3}}$	1,270	1,247	1,225	1,204	1,184	1,164

Lösung

Die Sonnenstrahlung heizt den Asphalt der Straße auf, so dass die Luft am Boden am heißesten ist. Ein von einer Luftschicht direkt am Boden kommender Lichtstrahl durchläuft aufgrund der bei niedrigeren Temperaturen zunehmenden Dichte der Luft Schichten mit zunehmenden Brechungsindex. Wegen des Brechungsgesetzes bleibt während des Durchgangs das Produkt $n \cdot \sin\alpha$ konstant.

Für den Einfallswinkel α auf Augenhöhe ist aufgrund der Vorgaben $\tan\alpha = \frac{400}{3}$. Damit erhält man

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1}} = \left(\left(\frac{3}{400}\right)^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{9}{320000}\,. \tag{4.1}$$

Da dies der Winkel ist, unter dem man den Anfang der Totalreflexion beobachtet, muss auf dem Boden gerade der Grenzwinkel der Totalreflexion erreicht sein.

Nun ist mit den gegebenen Daten

$$n(\rho) = 1 + c \cdot \rho \qquad \text{mit} \qquad c = \frac{n_0 - 1}{\rho(20\,°\mathrm{C})} \approx 2{,}43 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}}\,. \tag{4.2}$$

Mit Hilfe der Temperaturabhängigkeit der Luftdichte lässt sich der Brechungsindex n der Luft durch die Lufttemperatur ausdrücken. Die Luftdichte ist bei konstantem Druck nach der idealen Gasgleichung invers zur Temperatur, d.h. sie lässt sich ausdrücken durch $\rho(T) = d/T$, wobei sich die Konstante d aus den gegebenen Daten zu $d \approx 353\,\mathrm{kg\,m^{-3}\,K}$ bestimmen lässt. Damit ist

$$n(T) = 1 + \frac{c \cdot d}{T}\,. \tag{4.3}$$

Schließlich lässt sich mit $T_{\text{oben}} := 25\,°\text{C}$ aus

$$\sin\alpha \cdot n(T_{\text{oben}}) = \sin\alpha \left(1 + \frac{c \cdot d}{T_{\text{oben}}}\right) = 1 + \frac{c \cdot d}{T_{\text{Boden}}} = 1 \cdot n(T_{\text{Boden}}) \tag{4.4}$$

die Bodentemperatur T_{Boden} bestimmen zu

$$\boxed{T_{\text{Boden}} = \left(\frac{\sin\alpha}{T_{\text{oben}}} - \frac{1 - \sin\alpha}{c \cdot d}\right)^{-1} \approx 331\,\text{K} = 58\,°\text{C}}\,. \tag{4.5}$$

Die Bodenlufttemperatur entspricht also etwa 58 °C.

Bemerkung:
Die gegebenen Daten zur Luftdichte lassen im Bereich von 5 °C - 30 °C eine lineare Approximation zu, d.h. die Luftdichte lässt sich ausdrücken durch

$$\rho(T) = a - b\,T\,, \tag{4.6}$$

wobei sich die Konstanten a und b aus den gegebenen Daten bestimmen lassen zu $a \approx 2{,}44\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ und $b \approx 4{,}23 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}\,\text{K}^{-1}$.

Wenn man mit dieser Näherung rechnet ergibt sich

$$n(T) = 1 + a\,c - b\,c\,T\,. \tag{4.7}$$

Damit erhält man

$$T_{\text{Boden}} = T_{\text{oben}}\,\sin(\alpha) + \frac{1 + a\,c}{b\,c}\,(1 - \sin(\alpha)) \approx 326\,\text{K} = 52\,°\text{C}\,. \tag{4.8}$$

Die so bestimmte Bodenlufttemperatur weicht damit von dem korrekten ab und die Approximation ist nicht gut zu verwenden.

Bewertung - Totalreflexion über einer Straße		**Punkte**
4	Qualitatives Betrachten der Temperaturschichtung	0.5
	Erkennen der Konstanz von $n\,sin\alpha$ (Brechungsgesetz)	1.5
	Bestimmen des Einfallswinkels auf Augenhöhe (4.1)	0.5
	Bestimmen des Parameters für Dichteabhängigkeit des Brechungsindexes (4.2)	0.5
	Nutzen der idealen Gasgleichung zum Ausdrücken der Dichte durch Temperatur	1.0
	Aufstellen einer Bedingung für Totalreflexion (4.4)	1.0
	Berechnen der Bodentemperatur (4.5)	1.0
		6.0

Hinweis: Wenn Teilnehmende die Abhängigkeit der Luftdichte von der Temperatur linear approximieren, sollte der Punkt für das Nutzen der Gasgleichung nicht gegeben werden. In diesem Fall können dann also maximal 5.0 Punkte für die Aufgabe erreicht werden.

Aufgabe 5 Achromatische Linse

(3. Runde zur 43. IPhO 2012)

Der Brechungsindex der meisten Materialien ist abhängig von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes. Oft kann man diese Abhängigkeit im Bereich des sichtbaren Lichtes gut durch eine lineare Näherung modellieren. So gilt für die Brechungsindizes von Kronglas (n_1) und Flintglas (n_2) näherungsweise

$$n_1 = n_{1,0} + \alpha_1 \Delta\lambda \quad \text{mit} \quad n_{1,0} = 1,550 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{nm}^{-1}\,,$$
$$n_2 = n_{2,0} + \alpha_2 \Delta\lambda \quad \text{mit} \quad n_{2,0} = 1,750 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{nm}^{-1}\,.$$

Der Ausdruck $\Delta\lambda$ bezeichnet dabei die Differenz der Wellenlänge zu einer Referenzwellenlänge λ_0 mit $\lambda_0 = 600\,\mathrm{nm}$.

Für die Anwendung in optischen Geräten ist es oft wünschenswert, Linsensysteme so zu konstruieren, dass ihre Brennweite unabhängig von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes ist, die also achromatisch sind. Dazu kann man mehrere Linsen z.B. aus Kron- und Flintglas hintereinandersetzen.

Betrachte ein System, bei dem Licht auf die plane Seite einer dünnen Kronglaslinse fällt, die ohne irgendeinen Luftspalt direkt mit einer ebenfalls dünnen Linse aus Flintglas verbunden ist. Die Brennweite dieses Linsensystems soll für Licht im optischen Wellenlängenbereich konstant 30 cm betragen. Für das System sollen außerdem sphärische Linsen verwendet werden, so dass sich die Brennweite f einer Linse durch den Brechungsindex n des Linsenmaterials und die Krümmungsradien der Begrenzungsflächen mit Hilfe der Linsenschleiferformel ausdrücken lässt durch

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_{\mathrm{ein}}} - \frac{1}{R_{\mathrm{aus}}}\right)\,.$$

Hierbei trägt ein Radius ein negatives Vorzeichen, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der Einfallsseite liegt.

Gebe an, ob es sich bei den Linsen um Sammel- oder Zerstreuungslinsen handelt und bestimmen Sie deren Krümmungsradien.

Lösung

Für die Brennweite f eines Systems aus zwei dünnen, direkt hintereinander stehenden Linsen der Brennweiten f_1 und f_2 gilt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\,. \tag{5.1}$$

Mit Hilfe der Linsenschleiferformel und den gegebenen Wellenlängenabhängigkeiten der Brechungsindizes folgt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{1,0}} + \frac{1}{f_{2,0}} + \Delta\lambda\left\{\alpha_1\left(\frac{1}{R_{1\,\mathrm{e}}} - \frac{1}{R_{1\,\mathrm{a}}}\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{R_{2\,\mathrm{e}}} - \frac{1}{R_{2\,\mathrm{a}}}\right)\right\}\,, \tag{5.2}$$

wobei $f_{1,0}$ und $f_{2,0}$ die Brennweiten der einzelnen Linsen bei der Referenzwellenlänge bezeichnen.

Die Gesamtbrennweite f soll wellenlängenunabhängig sein. Daher muss der zu $\Delta\lambda$ proportionale Term verschwinden. Es muss also gelten:

$$0 = \alpha_1\left(\frac{1}{R_{1\,\mathrm{e}}} - \frac{1}{R_{1\,\mathrm{a}}}\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{R_{2\,\mathrm{e}}} - \frac{1}{R_{2\,\mathrm{a}}}\right) = \frac{1}{f_{1,0}}\,\frac{\alpha_1}{n_{1,0}-1} + \frac{1}{f_{2,0}}\,\frac{\alpha_2}{n_{2,0}-1}\,. \tag{5.3}$$

Aus (5.1) ergibt sich damit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{1,0}} + \frac{1}{f_{2,0}} = \frac{1}{f_{1,0}}\left(1 - \frac{n_{2,0}-1}{n_{1,0}-1}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) . \tag{5.4}$$

Beachte außerdem, dass $R_{1,e} = \infty$, da die Einfallsseite der Kronglaslinse plan sein soll. Daher gilt mit der Linsenschleiferformel

$$\frac{1}{f_{1,0}} = -\frac{n_{1,0}-1}{R_{1,a}} = \frac{1}{f}\frac{1}{1-\frac{n_{2,0}-1}{n_{1,0}-1}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} , \tag{5.5}$$

und es ergibt sich für den Radius $R_{1,a}$

$$R_{1,a} = -f\,(n_{1,0}-1)\left(1 - \frac{n_{2,0}-1}{n_{1,0}-1}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = -12\,\mathrm{cm} = R_{2,e} . \tag{5.6}$$

Mit diesem Ergebnis[2] und (5.1) ergibt sich schließlich für $R_{2,a}$

$$R_{2,a} = \left(\frac{1}{n_{2,0}-1}\left(\frac{1}{f_{1,0}} - \frac{1}{f}\right) - \frac{1}{R_{1,a}}\right)^{-1} = f\,\frac{\alpha_2\,(n_{1,0}-1) - \alpha_1\,(n_{2,0}-1)}{\alpha_1-\alpha_2} \approx -15\,\mathrm{cm} \tag{5.7}$$

Bei der ersten Linse, der Kronglaslinse, handelt es sich also um eine Sammellinse und bei der Flintglaslinse um eine Zerstreuungslinse.

[2] Alternativ kann man auch das Verschwinden des zu $\Delta\lambda$ proportionalen Terms in (5.2) zu dem Ergebnis umformen, dass $R_{1,a}/R_{2,a} = 1 - \alpha_1/\alpha 2 = 4/5$ ist.

Aufgabe 6 Unsichtbares Glasröhrchen

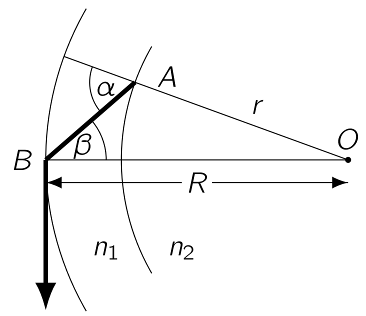
(Auswahlwettbewerb zur IPhO 1979, 1. Runde)

Ein Glasröhrchen mit dem inneren Radius r und dem äußeren Radius R ($r < R$) ist mit einer lumineszierenden Flüssigkeit gefüllt, die unter dem Einfluss von Röntgenstrahlung grünes Licht aussendet. Für grünes Licht beträgt der Brechungsindex des Glases n_1, derjenige der Flüssigkeit n_2. Das Röhrchen befindet sich in Luft. Du kannst annehmen, dass der Brechungsindex von Luft 1 beträgt.

Leite eine Bedingung für das Verhältnis $\frac{r}{R}$ ab, die erfüllt sein muss, damit es bei Betrachtung des Röhrchens von der Seite so aussieht, als sei die Dicke von dessen Glaswand Null.

Lösung

Der Eindruck, die Glasdicke sei Null, entsteht dann, wenn die äußeren Strahlen, die aus dem Röhrchen kommen und zum Auge gelangen, tangential zur äußeren Oberfläche des Glases verlaufen. Die Strahlen, die aus der Flüssigkeit auf den Punkt A fallen, werden in einen Flächenwinkel $2\alpha_{\text{max}}$ gebrochen. Für den äußeren aus dem Röhrchen tangential austretenden Strahl gilt:



$$\sin\beta = \frac{1}{n_1}\,. \tag{6.1}$$

Der Sinussatz im Dreieck ABO ergibt

$$\frac{r}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r}{R} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,. \tag{6.2}$$

Die Bedingung der Aufgabe ist erfüllt, wenn $\alpha \leq \alpha_{\text{max}}$ ist:

$$\frac{r}{R} \geq \frac{1/n_1}{\sin\alpha_{\text{max}}}\,. \tag{6.3}$$

Der Wert α_{max} hängt vom Verhältnis der Brechungsindizes n_1 und n_2 ab. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $n_2 < n_1$, dann ist $\sin\alpha_{\text{max}} = \frac{n_2}{n_1}$ und man erhält:

$$\boxed{\frac{r}{R} \geq \frac{1}{n_2}}\,. \tag{6.4}$$

b) $n_2 \geq n_1$, dann ist $\alpha_{\text{max}} = 90^\circ$, also $\sin\alpha_{\text{max}} = 1$, und damit

$$\boxed{\frac{r}{R} \geq \frac{1}{n_1}}\,. \tag{6.5}$$

Bewertung - Unsichtbares Glasröhrchen		**Punkte**
6	Sinnvolle Idee zur Lösung der Aufgabe	0.5
	Brechungsgesetz	0.5
	Anwenden des Sinussatzes	1
	Fallunterscheidung für Endergebnis, je 1 pro Fall	2
		4

Aufgabe 7 Augenoperation

(3. Runde zur 42. IPhO 2011)

Eine stark kurzsichtige Frau trägt eine Brille mit einer Stärke von -10 Dioptrien auf beiden Augen. Der Dioptriewert gibt dabei den Brechwert einer Linse, also den Kehrwert ihrer Brennweite in Metern an. Linsen mit negativem Dioptriewert sind Zerstreuungslinsen. Die als dünn anzunehmenden Linsen der Brille befinden sich etwa 2,0 cm vom Auge entfernt. Bei einer Operation werden der Frau künstliche Linsen eingesetzt, so dass sie anschließend einen Text, der 30 cm von ihrem Auge entfernt ist ohne Brille scharf sehen kann. Ihr erscheinen die Buchstaben dabei ebenfalls größer zu sein als vor der Operation.

Finde heraus, ob sie die Buchstaben verglichen mit der Situation vor der Operation im gleichen Abstand zum Auge tatsächlich größer sieht. Berechne ggf., um wie viel sie die Buchstaben im Vergleich zu vorher vergrößert sieht.

Lösung

Die Brennweite der Linse in der Brille beträgt mit den Angaben in der Aufgabe $f = -\frac{1}{10}\,\mathrm{m} = -10\,\mathrm{cm}$. Die Abbildungen mit und ohne Brille sind in den beiden Zeichnungen skizziert.

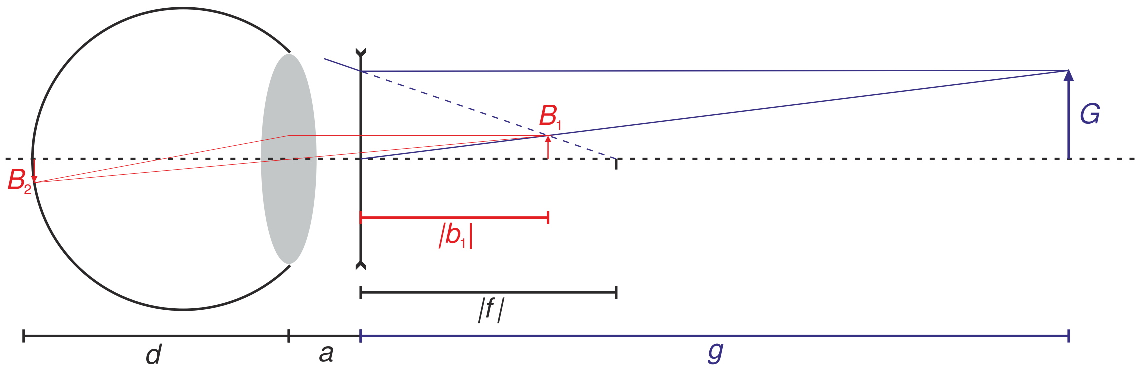


Abb. 4. *Abbildung mit Brille.*

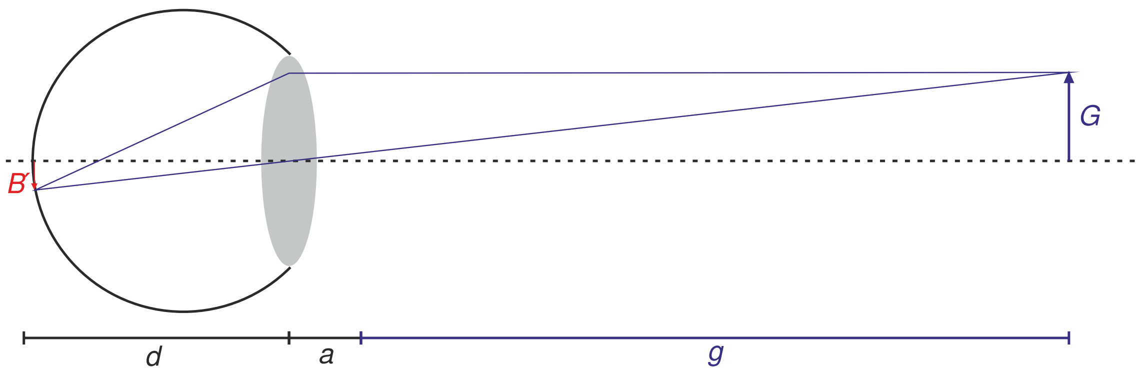


Abb. 5. *Abbildung ohne Brille.*

Hierbei bezeichnen

d	Durchmesser des Auges (als konstant angenommen)
$a = 2{,}0\,\mathrm{cm}$	Abtand der Brillenlinse von dem Auge
$g = 28\,\mathrm{cm}$	Abstand der Buchstaben von der Brillenlinse
b_1	Bildweite des virtuellen Zwischenbildes bei der Zerstreuungslinse
G	Gegenstandsgröße (der Buchstaben)
B_1, B_2 und B'	Bildgrößen der (Zwischen-)Bilder

Für die Situation mit Brille betrachte zunächst die Abbildung durch die Brillenlinse. Für den Vergrößerungsfaktor gilt in diesem Fall mit der Abbildungsgleichung $1/f = 1/g + 1/b_1$

$$V_1 = \frac{B_1}{G} = \frac{|b_1|}{g} = \left|\frac{f}{g-f}\right| = \frac{-f}{g-f} \approx 0,26\,. \tag{7.1}$$

Die Vergrößerung bei der anschließenden Abbildung durch die Augenlinse lässt sich bestimmen zu

$$V_2 = \frac{B_2}{B_1} = \frac{d}{|b_1| + a} = \frac{d}{a - \frac{g\,f}{g-f}}\,. \tag{7.2}$$

Die Augenlinse wurde dabei ebenfalls als dünne Linse angenommen. Daraus ergibt sich die Gesamtvergrößerung für die Situation mit Brille in Abhängigkeit von dem unbekannten Augendurchmesser zu

$$V_{\text{vor OP}} = V_1\,V_2 = \frac{f\,d}{g\,f - a\,(g-f)} \approx \frac{d}{0{,}36\,\mathrm{m}}\,. \tag{7.3}$$

Für die Situation nach der Operation ergibt sich aus Abbildung 5

$$V_{\text{nach OP}} = \frac{B'}{G} = \frac{d}{g+a} = \frac{d}{0{,}30\,\mathrm{m}}\,. \tag{7.4}$$

Damit ergibt sich das Verhältnis der Vergrößerungen zu

$$\frac{V_{\text{nach OP}}}{V_{\text{vor OP}}} \approx \frac{0,36}{0,30} = 1,2\,. \tag{7.5}$$

Die Frau sieht die Buchstaben nach der Operation tatsächlich um etwa 20% größer.