

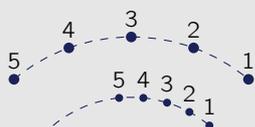
### Lösungen zu den Vorbereitungsaufgaben für die 2. Wettbewerbsrunde

#### Aufgabe 1 Erde und Mars (MC-Aufgabe)

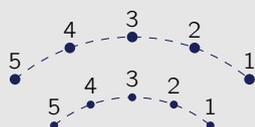
(4. Runde zur IPhO 2012 & 1. Runde zur IPhO 2017)

Die folgenden Abbildungen sollen, von rechts nach links, jeweils fünf Schnappschüsse der Bahnpositionen von Erde und Mars darstellen, die jeweils zu gleichen Zeiten aufgenommen worden sind. Die Verhältnisse der Bahnradien sind maßstabsgetreu, die Planeten aber stark vergrößert.

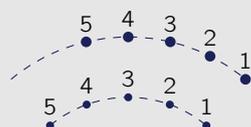
Gib an, welche der Abbildungen korrekt ist und begründe deine Antwort.



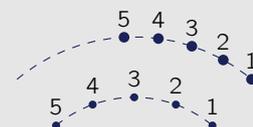
A



B



C



D



#### Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz gilt für die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_i$  von Mars und Erde sowie deren Abstände  $r_i$  zur Sonne

$$\omega_{\text{Erde}}^2 r_{\text{Erde}}^3 = \omega_{\text{Mars}}^2 r_{\text{Mars}}^3 \quad (1.1)$$

Da nach der Abbildung  $r_{\text{Mars}} \approx 1,5 r_{\text{Erde}}$  ist, gilt

$$\omega_{\text{Mars}} = \omega_{\text{Erde}} \left( \frac{r_{\text{Erde}}}{r_{\text{Mars}}} \right)^{3/2} \approx 0,54 \omega_{\text{Erde}}. \quad (1.2)$$

In der Zeit, in der die Erde den dargestellten Winkelbereich durchlaufen hat, muss der Mars somit etwa die Hälfte des Bereiches durchlaufen haben. Beachtet man auch noch, dass der Mars, wenn die Erde 75% des dargestellten Bereiches durchlaufen hat, nur etwa 41% des Bereiches durchlaufen haben soll, dann verbleibt nur die ganz rechte Abbildung als korrekte Darstellung.

Korrekte Antwort: **D**

## Aufgabe 2 Leistung von Gravitationswellen (MC-Aufgabe)

(2. Runde zur IPhO 2019)

Die allgemeine Relativitätstheorie sagt die Existenz von Gravitationswellen, also Wellen in der Struktur der Raumzeit voraus. Diese Wellen werden von beschleunigten Massen erzeugt und breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Für zwei Körper mit gleicher Masse  $m$ , die sich in einem Abstand  $r$  umkreisen, lässt sich die durch Gravitationswellen abgestrahlte Leistung  $P$  mit Hilfe der Gravitationskonstante  $G$  und der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  ausdrücken.

Welcher der folgenden Ausdrücke könnte einen passenden Ausdruck für die Leistung  $P$  darstellen?

A  $P = \frac{32}{5} \frac{G^5 m^5}{c^5 r^4}$

B  $P = \frac{32}{5} \frac{G^5 m^5}{c^4 r^5}$

C  $P = \frac{32}{5} \frac{G^5 m^4}{c^5 r^5}$

D  $P = \frac{32}{5} \frac{G^4 m^5}{c^5 r^5}$

### Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Für eine korrekte Formel müssen beide Seiten der Gleichung die gleiche physikalische Dimension und damit auch die gleichen SI-Einheiten besitzen.

Die Leistung  $P$  wird in Watt, also in der Einheit  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$  angegeben. Dies wird typischerweise durch  $[P] = \text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$  ausgedrückt. Die auf der rechten Seite der Gleichung vorkommenden physikalischen Größen besitzen die folgenden SI-Einheiten:

$$[G] = \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}, \quad [m] = \text{kg}, \quad [c] = \text{m s}^{-1}, \quad [r] = \text{m}. \quad (2.1)$$

Ein als korrekt in Frage kommender Ausdruck für  $P$  lässt sich nun mit Hilfe eines Dimensionsvergleiches bestimmen. Bezeichne mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  die Exponenten, mit der die Größen  $G$ ,  $m$ ,  $c$  und  $r$  auf der rechten Seite vorkommen. Dann gilt

$$[G^\alpha m^\beta c^\gamma r^\delta] = \text{kg}^{-\alpha+\beta} \text{m}^{3\alpha+\gamma+\delta} \text{s}^{-2\alpha-\gamma} \stackrel{!}{=} \text{kg m}^2 \text{s}^{-3} = [P]. \quad (2.2)$$

Durch Vergleichen des Exponenten für die Masseneinheit in Gleichung (2.2) ergibt sich, dass  $\beta$  um eins größer sein muss als  $\alpha$ . Dies ist nur in der Gleichung D der Fall.

Die dort auftretenden Werte  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 5$ ,  $\gamma = -5$  und  $\delta = -5$  für die Exponenten führen auch zu den korrekten Exponenten für die Einheiten der Länge und der Zeit, denn mit diesen Werte ergeben sich

$$3\alpha + \gamma + \delta = 12 - 5 - 5 = 2 \quad \text{sowie} \quad -2\alpha - \gamma = -8 + 5 = -3. \quad (2.3)$$

Damit kann nur die letzte Formel die Leistung  $P$  richtig beschreiben.<sup>a</sup>

Korrekte Antwort: **D**

<sup>a</sup>Hinweis: Der Ausdruck kann auch auf zwei ungleiche Massen  $m_1$  und  $m_2$  erweitert werden und lautet dann  $P = \frac{32}{5} \frac{G^4 (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2)}{c^5 r^5}$ . Im System Sonne-Erde beträgt die durch Gravitationswellen abgestrahlte Leistung damit knapp 200 W.

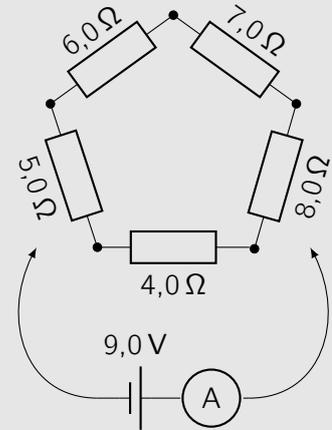
### Aufgabe 3 Fünfeck aus Widerständen (MC-Aufgabe)

(2. Runde zur IPhO 2019)

Eine Batterie mit einer Spannung von  $9,0\text{V}$  ist mit einem idealen Amperemeter in Reihe geschaltet. Die Reihenschaltung kann an zwei beliebige Ecken des abgebildeten Widerstandsfünfecks angeschlossen werden.

Wie groß ist die betragsmäßig kleinste Stromstärke, die dabei durch das Amperemeter fließt?

- A  $0,30\text{ A}$       B  $0,60\text{ A}$       C  $1,2\text{ A}$       D  $2,3\text{ A}$



### Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Wenn die Batterie mit dem Amperemeter an zwei verschiedene Ecken des Widerstandsfünfecks angeschlossen wird, fließt der Strom durch eine Parallelschaltung mit zwei Zweigen, in denen jeweils bis zu vier Widerstände in Reihe geschaltet sind. Die Zusammensetzung der beiden Parallelzweige ist davon abhängig, an welchen Ecken die Batterie angeschlossen wird. Die Stromstärke  $I$ , die durch das Amperemeter fließt, ergibt sich aus der Batteriespannung  $U = 9,0\text{V}$  und dem Ersatzwiderstand  $R_{\text{Ersatz}}$  der Parallelschaltung zu  $\frac{U}{R_{\text{Ersatz}}}$ .

Bei einer Parallelschaltung zweier Widerstände mit Widerstandswerten  $R_1$  und  $R_2$  beträgt der Wert des Ersatzwiderstandes  $R_{\text{Ersatz}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$  und ist damit immer kleiner als der kleinste Widerstandswert eines der Parallelzweige. Für einen möglichst geringen Strom muss daher die Batterie so angeschlossen werden, dass der Widerstandswert in dem Parallelzweig mit dem kleineren Widerstandswert möglichst groß wird. Die Summe der fünf Widerstände ist konstant. Daher ist diese Bedingung genau dann erfüllt, wenn beide Parallelzweige den gleichen Widerstandswert besitzen. Dies wird erreicht, wenn die Batterie mit dem Amperemeter an der Ecke zwischen dem  $6,0\Omega$  und  $7,0\Omega$  sowie zwischen dem  $4,0\Omega$  und  $8,0\Omega$  Widerstand angeschlossen wird.

In diesem Fall besitzen beide Parallelzweige einen Widerstandswert von  $15,0\Omega$  und der Ersatzwiderstand beträgt  $R_{\text{Ersatz}} = 7,5\Omega$ . Damit ist die Stromstärke:

$$I = \frac{U}{R_{\text{Ersatz}}} \approx 1,2\text{ A} \quad (3.1)$$

Korrekte Antwort: C

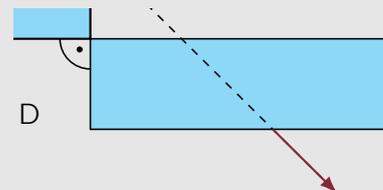
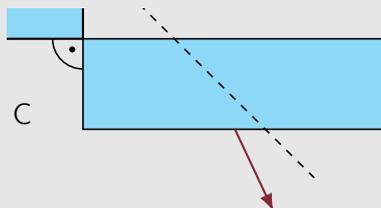
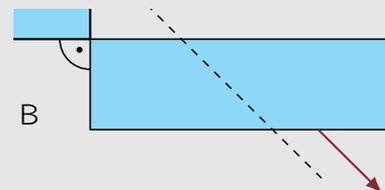
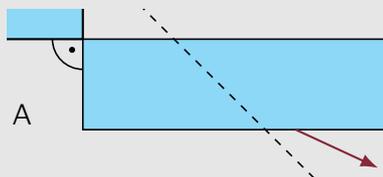
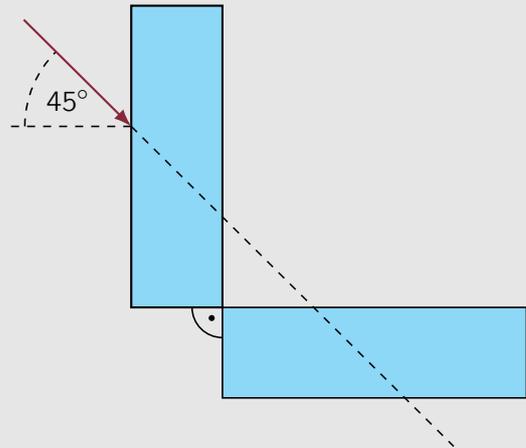
### Aufgabe 4 Lichtbrechung (MC-Aufgabe)

(2. Runde zur IPhO 2020)

Ein Lichtstrahl trifft, wie nebenstehend abgebildet, auf eine Anordnung von zwei gleich großen, senkrecht zueinander aufgebauten Glasquadern und wird beim Eintritt in den ersten Quader gebrochen. Der Brechungsindex des Glases beträgt 1,5. Außerhalb der Quader befindet sich Luft.

Welcher der folgenden Abbildungsausschnitte zeigt den Verlauf des gebrochenen Lichtstrahls nach dem Austritt aus dem zweiten Quader?

Der Verlauf des Lichtstrahls in dem Quader ist dabei nicht dargestellt und die gestrichelte Linie gibt den Verlauf des ungebrochenen Lichtstrahls wieder.



### Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Bei der Brechung eines Lichtstrahls an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  gilt für die Lotwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  des einfallenden bzw. des gebrochenen Strahles das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 .$$

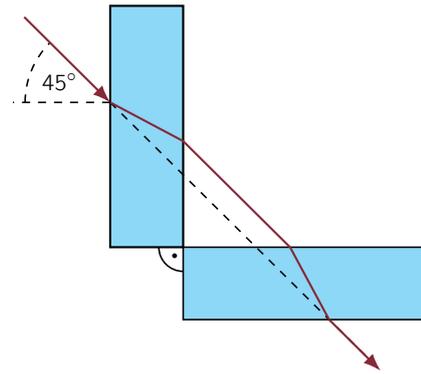
Bei Eintritt in den ersten Glasquader wird der Lichtstrahl zum Lot hin gebrochen. Beim Austritt aus diesem vom Lot weg. Durch zweimalige Anwendung des Brechungsgesetzes ist leicht einzusehen, dass der Lotwinkel nach Austritt aus dem ersten Glasquader erneut  $45^\circ$  beträgt. Der Lichtstrahl ist allerdings verglichen mit dem Verlauf des ungebrochenen Lichtstrahls nach oben parallel verschoben.

Der Lichtstrahl trifft dann unter einem Lotwinkel von ebenfalls  $45^\circ$  auf den zweiten Glasquader und wird analog durch diesen lediglich verschoben, dieses Mal zu dem gestrichelten Verlauf hin. Da beide Glasquader gleich groß sind, ist auch die Verschiebung gleich groß, so dass der Lichtstrahl nach dem Austritt aus dem zweiten Glasquader auf der gestrichelten Linie verläuft.

Damit ist Antwort D die richtige.

*Bemerkung:* Man kann die Lösung auch direkt durch Konstruktion des Verlaufs des Lichtstrahls mit Hilfe des Brechungsgesetzes in der Skizze herleiten. Dies ist nebenstehend skizziert. Der Lotwinkel in den Glasquadern beträgt dabei etwa  $28^\circ$ .

Korrekte Antwort: *D*

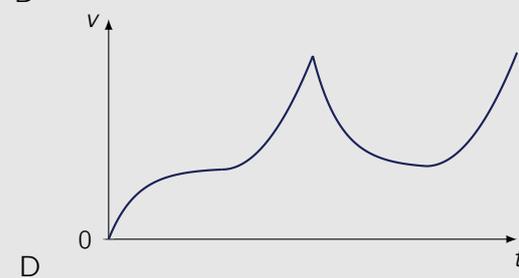
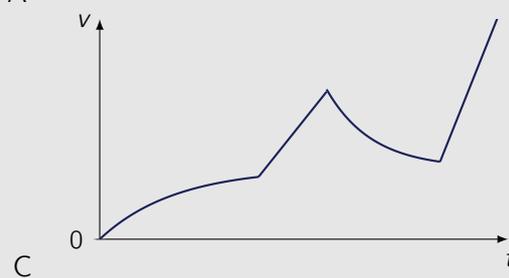
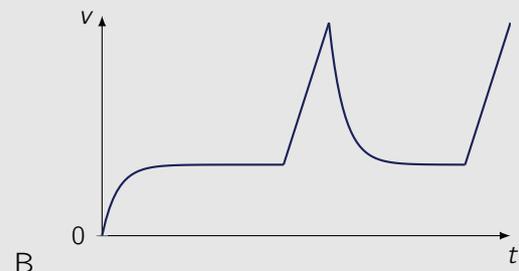
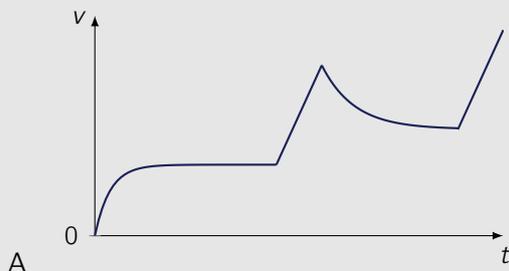
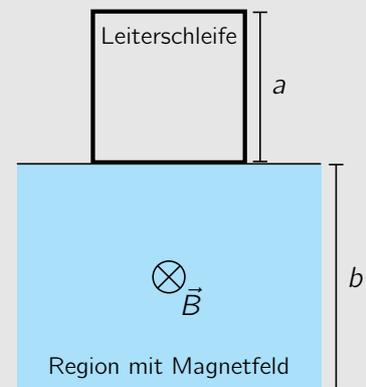


### Aufgabe 5 Fallende Leiterschleife im Magnetfeld (MC-Aufgabe)

(2. Runde zur IPhO 2020, Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Richard Reindl)

Eine quadratische Leiterschleife mit Kantenlänge  $a$ , Widerstand  $R$  und Masse  $m$  fällt, wie nebenstehend skizziert, aus der Ruhe heraus in eine scharf begrenzte Region der Breite  $b > a$  mit einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte  $\vec{B}$ , das in die Zeichenebene hinein orientiert ist. Die Graphen A, B, C und D sollen den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit der Leiterschleife für verschiedene Magnetfeldstärken darstellen.

Welcher der Graphen zeigt einen physikalisch möglichen Vorgang?



**Lösung**

Rechnungen und Erläuterungen

Der Fall der Leiterschleife kann in vier Phasen unterteilt werden, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.

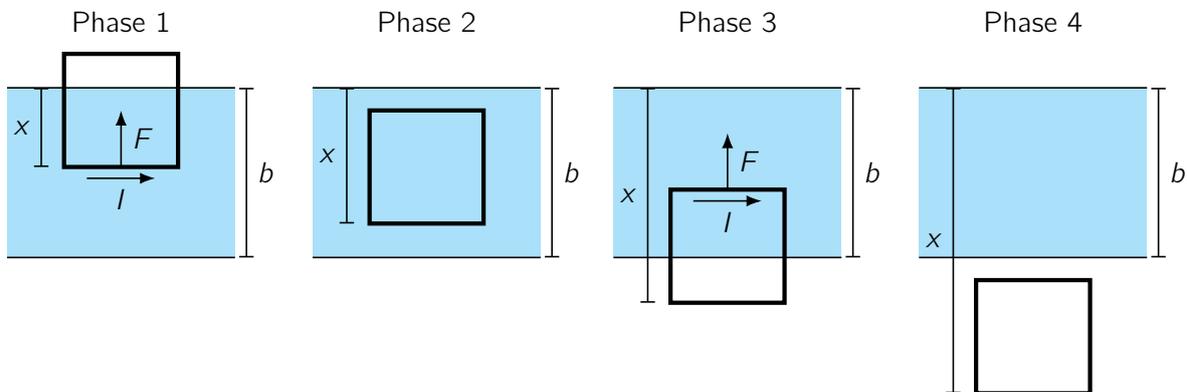


Abb. 1. Skizzen der vier Phasen des Falls der Leiterschleife.

**Phase 1:**  $0 < x < a$ 

Bezeichne mit  $v$  die vertikale Geschwindigkeit der Leiterschleife. Im unteren Stück der Leiterschleife wird die Spannung  $U = v B a$  induziert und es fließt ein Strom der Stromstärke  $I = \frac{v B a}{R}$  nach rechts. Dadurch wirkt auf das untere Leiterstück die nach oben gerichtete und damit bremsende Lorentzkraft

$$F = I B a = \frac{v B^2 a^2}{R}. \quad (5.1)$$

Die Beschleunigung der Leiterschleife ist also stets kleiner als die Erdbeschleunigung  $g$ . Die Geschwindigkeit  $v$  wächst, bis  $F$  gleich der Gewichtskraft  $m g$  der Leiterschleife wird.  $v$  nähert sich also an die stationäre Geschwindigkeit

$$v_s = \frac{m g R}{B^2 a^2} \quad (5.2)$$

an.

**Phase 2:**  $a < x < b$ 

In diesem Bereich ändert sich der magnetische Fluss durch die Leiterschleife nicht, so dass kein Strom induziert wird und keine Bremskraft wirkt. Die Leiterschleife fällt frei und die Geschwindigkeit ändert sich linear mit der Zeit.

**Phase 3:**  $b < x < b + a$ 

Der Induktionsstrom  $I = \frac{v B a}{R}$  fließt jetzt im oberen Leiterstück nach rechts. Dies führt erneut auf die Bremskraft (5.1) und die gleiche stationäre Geschwindigkeit (5.2) als Grenzwert wie in Phase 1.

**Phase 4:**  $b + a < x$ 

Auch hier ändert sich der magnetische Fluss durch die Leiterschleife nicht, so dass sich diese wieder im freien Fall befindet und die Geschwindigkeit linear mit der Zeit zunimmt. Die Steigung der Geschwindigkeitsgeraden muss die gleiche wie in Phase 2 sein.

**Analyse der Graphen**

In Graph A wird in Phase 1 und Phase 3 jeweils eine stationäre Geschwindigkeit erreicht, die aber nicht gleich ist. Damit stellt dieser Graph keinen physikalisch möglichen Verlauf dar.

In Graph B sind die in Phase 1 und 3 erreichten stationären Geschwindigkeiten identisch. Darüber hinaus sind die Geradensteigungen in Phase 2 und 4 gleich. Der Graph kann also einen physikalischen Vorgang darstellen.

In Graph C sind die Geradensteigungen in Phase 2 und 4 nicht gleich. Der Graph beschreibt also auch keinen physikalisch möglichen Vorgang.

In Graph D sind die Teilstücke in Phase 2 und 4 keine Geraden, so dass auch dieser Graph keinen physikalisch möglichen Vorgang beschreibt.

Damit beschreibt nur der Graph B einen physikalisch möglichen Vorgang.

Korrekte Antwort: **B**

*Hinweis:* Von den Teilnehmenden wird eine Angabe der Formeln (5.1) und (5.2) nicht erwartet. Es ist ausreichend, wenn erkannt und begründet wird, dass in Phase 1 und 3 eine gleiche stationäre Geschwindigkeit existiert.

## Aufgabe 6 Föhn

(1. Runde zur IPhO 2014)

Die Amerikanerinnen Sofia und Grace tauschen Reiseerfahrungen aus: „Bei meiner Reise nach Paris ist mir letzten Monat mein Föhn durchgebrannt“, berichtet Grace. Sofia denkt, dass dies wohl an der höheren europäischen Netzspannung von 230 V gegenüber der in den USA üblichen Spannung von 120 V gelegen hat, und beschließt, für ihre bevorstehende Europareise vorzusorgen. Sie baut einen Vorwiderstand zwischen Steckdose und Föhn ein, so dass der Föhn zu Hause nur noch die Hälfte der Leistung aufnimmt. Kaum in Europa angekommen ...

Erläutere, wie die Geschichte mit dem Föhn wohl weitergehen wird und begründe dies physikalisch.

## Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Leider wird der Föhn auch in diesem Fall sehr wahrscheinlich durchbrennen. Für die am Föhn bei einer Netzspannung  $U$  umgesetzte Leistung  $P$  gilt nämlich

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R}, \quad (6.1)$$

wobei  $I$  die Stärke des durch den Föhn fließenden Stroms angibt, die sich mit der Definition des elektrischen Widerstandes ausdrücken lässt durch  $I = U/R$ . Der Widerstand des Föhns wird hier als konstanter Ohm'scher Widerstand angenommen.

Wenn der Föhn, wie angegeben, in den USA nur noch die Hälfte der ursprünglichen Leistung umsetzt, muss die über dem Föhn abfallende Spannung damit auf  $\frac{U}{\sqrt{2}}$  reduziert sein.

Die nahezu doppelt so hohe Spannung in Europa führt dazu, dass bei gleichem Widerstand auch über dem Föhn die doppelte Spannung, also etwa  $2 \cdot \frac{U}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} U$  abfällt. Aufgrund des Zusammenhanges (6.1) ist damit die Leistungsaufnahme des Föhns immer noch etwa doppelt so hoch wie in den USA ohne Vorwiderstand, so dass der Föhn trotz des Vorwiderstandes überlastet wird.

## Aufgabe 7 Temperaturabhängiger Widerstand

(1. Runde zur IPhO 2021)

Ein Heißeiterwiderstand ist ein temperaturabhängiger elektrischer Widerstand, der bei höheren Temperaturen Strom besser leitet als bei niedrigen.

Der obere der nebenstehenden Graphen stellt den Widerstand  $R$  eines bestimmten Heißeiters in Abhängigkeit von seiner Temperatur  $\vartheta$  dar.

In dem unteren Graphen ist die an die Umgebung abgegebene Wärmeleistung  $P$  des Widerstandes bei einer Umgebungstemperatur von  $22^\circ\text{C}$  ebenfalls als Funktion der Temperatur des Widerstandes dargestellt.

Bestimme, welche Spannung maximal an den Heißeiterwiderstand angelegt werden darf, damit dieser sich nicht über  $65^\circ\text{C}$  erwärmt.

Gehe davon aus, dass der Heißeiterwiderstand anfänglich Zimmertemperatur besitzt.

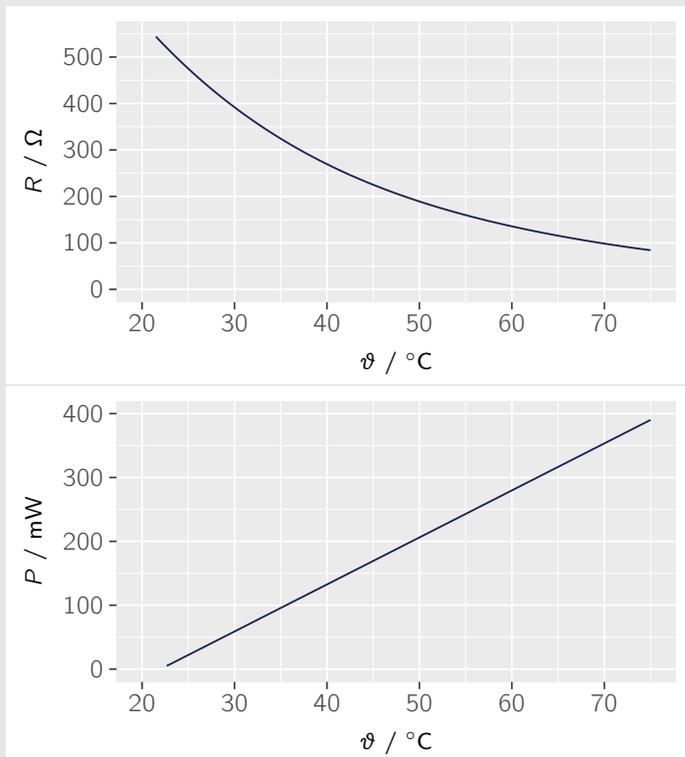


Abb. 2. Temperaturabhängigkeit des Heißeiterwiderstandes und dessen Wärmeleistungsabgabe.

### Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Damit sich der Heißeiterwiderstand nicht weiter erwärmt, muss die im Widerstand in Wärme umgesetzte elektrische Leistung  $P_{\text{el}}$  kleiner oder gleich der von dem Leiter abgegebenen Wärmeleistung  $P$  sein, d.h. es muss gelten:

$$P_{\text{el}} = UI = \frac{U^2}{R} \leq P \quad \text{bzw.} \quad U^2 \leq P \cdot R. \quad (7.1)$$

Dabei ist entscheidend, dass sowohl  $R$  als auch  $P$  Funktionen der Temperatur  $\vartheta$  sind. Wenn  $U^2 = P(\vartheta) \cdot R(\vartheta)$  ist, sind die im Widerstand in Wärme umgesetzte elektrische Leistung und die abgegebene Wärmeleistung im Gleichgewicht, so dass die Temperatur des Heißeiterwiderstandes konstant bleibt.

Wird bei gegebener Temperatur eine Spannung  $U$  an den Heißeiterwiderstand angelegt, für die  $U^2$  größer als das Produkt  $P \cdot R$  ist, ist die umgesetzte elektrische Leistung größer als die abgegebene Wärmeleistung und der Heißeiter erwärmt sich. Dadurch verringert sich der Widerstandswert  $R(\vartheta)$  während sich die abgegebene Wärmeleistung  $P(\vartheta)$  erhöht. Die Temperaturerhöhung kann daher zu einer neuen Gleichgewichtstemperatur führen, bei der  $U^2 = P \cdot R$  gilt.

Um genauer zu untersuchen, wann das der Fall sein kann, ist es sinnvoll, das Produkt  $P \cdot R$  als Funktion der Temperatur  $\vartheta$  darzustellen, wie in Abbildung 3 zu sehen.

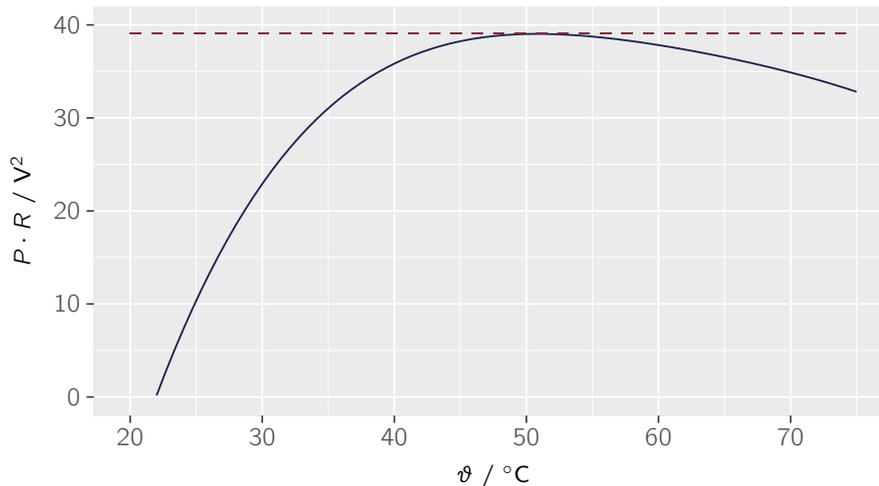


Abb. 3.  $P \cdot R$  für den Heißleiter als Funktion der Temperatur  $\vartheta$ .

Der Heißleiterwiderstand kann, ausgehend von Zimmertemperatur, mit allen Spannungen  $U$  betrieben werden, für die  $U^2$  im Wertebereich von  $P \cdot R$  liegt, da dann eine Temperatur existiert, bei der sich ein Leistungsgleichgewicht einstellt. Wenn das Quadrat der Spannung aber größer als der maximale Wert von  $P \cdot R$  ist, kann die Ungleichung in (7.1) nicht mehr erfüllt werden und der Heißleiter erwärmt sich immer weiter.

Durch Aufsuchen des Maximums im Graphen von  $P \cdot R$  über der Temperatur kann die gesuchte maximale Spannung gefunden werden, ab der sich der Heißleiterwiderstand auch über 65 °C weiter erwärmen würde.

Aus dem Graphen ergibt sich eine maximale Spannung von

$$U_{\max} \approx \sqrt{39,1 \text{ V}^2} \approx 6,3 \text{ V} . \quad (7.2)$$

## Aufgabe 8 Druckbetrachtungen

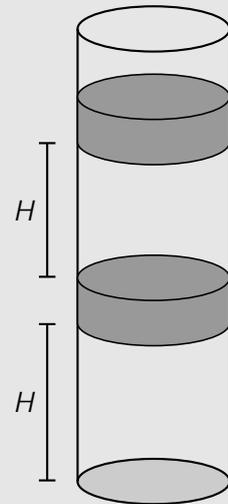
(3. Runde zur IPhO 2018 & 1. Runde zur IPhO 2009)

In einem mit Luft gefüllten, aufrechten Rohr befinden sich, wie nebenstehend gezeigt, zwei identische Scheiben. Das Rohr ist nach oben offen aber am unteren Ende verschlossen. Die Scheiben sind so dimensioniert, dass sie das Rohr luftdicht abschließen. Sie lassen sich aber vertikal verschieben.

Sowohl die Höhe des Luftvolumens zwischen der unteren Scheibe und dem Boden des Rohres als auch die des Luftraumes zwischen den Scheiben betragen in der anfänglichen Ruhelage  $H = 30\text{ cm}$ . Der Luftdruck zwischen den Scheiben liegt dabei 10% über dem Atmosphärendruck.

Berechne die Dicke der Scheiben für den Fall, dass sie aus Kupfer mit einer Dichte von  $8,95 \cdot 10^3\text{ kg m}^{-3}$  bestehen.

Bestimme, wie hoch die Luftsäule zwischen der unteren Scheibe und dem Boden des Rohres ist, wenn die obere Scheibe langsam an die ursprüngliche Stelle der unteren gedrückt wird.



### Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Scheiben befinden sich vor dem Verschieben in einer Gleichgewichtsposition. Bezeichne mit  $p_0$  den Atmosphärendruck und mit  $p_1$  bzw.  $p_2$  die Drücke zwischen den Scheiben bzw. zwischen der unteren Scheibe und dem Boden. Dann gilt mit  $\kappa := 0,10$ :

$$p_1 = (1 + \kappa) p_0 = p_0 + \frac{mg}{A} \quad \text{sowie} \quad p_2 = p_1 + \frac{mg}{A} = (1 + 2\kappa) p_0. \quad (8.1)$$

Dabei bezeichnet  $A$  die Querschnittsfläche einer Scheibe und  $m = \rho d A$  ihre Masse. Aus (8.1) folgt für die Dicke  $d$  der Scheiben

$$\kappa p_0 = \frac{mg}{A} = \rho d g \quad \text{bzw.} \quad \boxed{d = \frac{\kappa p_0}{\rho g} \approx 11\text{ cm}}. \quad (8.2)$$

Nimm im Folgenden an, dass sich Luft wie ein ideales Gas verhält. Die obere Scheibe wird durch eine Kraft  $F$  auf die ursprüngliche Position der unteren Scheibe geschoben. Die untere Scheibe verschiebt sich dadurch auf eine Höhe  $h$  über dem Boden der Röhre. Da die Verschiebung langsam erfolgt, kann davon ausgegangen werden, dass sich die Temperatur des Gases während des Prozesses nicht ändert. Die neuen Gleichgewichtsbedingungen und die ideale Gasgleichung ergeben daher

$$\begin{aligned} p'_1 &= (1 + \kappa) p_0 \frac{HA}{(H - h - d)A} = (1 + \kappa) p_0 + \frac{F}{A}, \\ p'_2 &= (1 + 2\kappa) p_0 \frac{HA}{hA} = p'_1 + \frac{mg}{A} = (1 + 2\kappa) p_0 + \frac{F}{A}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Aus den Gleichungen in (8.3) folgt

$$(1 + \kappa) \frac{H}{H - h - d} = (1 + 2\kappa) \frac{H}{h} - \kappa, \quad (8.4)$$

beziehungsweise

$$h^2 - \left\{ \left( 4 + \frac{2}{\kappa} \right) H - d \right\} h + \left( 2 + \frac{1}{\kappa} \right) H (H - d) = 0. \quad (8.5)$$

Daraus ergibt sich als einzige Lösung mit  $0 < h < H$  als Ergebnis für die sich einstellende Höhe der unteren Scheibe

$$h = H \left( 2 + \frac{1}{\kappa} \right) - \frac{d}{2} - \sqrt{\left( H \left( 2 + \frac{1}{\kappa} \right) - \frac{d}{2} \right)^2 - \left( 2 + \frac{1}{\kappa} \right) H (H - d)} \approx 9,6 \text{ cm}. \quad (8.6)$$

## Aufgabe 9 Geschwindigkeit und Treibstoffverbrauch eines Flugzeugs

(3. Runde zur IPhO 2017, Idee: Ralf Kleiber - IPP Greifswald)

Die Frage, warum ein Flugzeug fliegt, lässt sich, etwas salopp formuliert, beantworten mit: „Ein Flugzeug bleibt oben, weil es hinter sich einen Abwind erzeugt“. Mit diesem einfachen Modell lässt sich die für einen bestimmten Flugzeugtyp optimale Fluggeschwindigkeit abschätzen.

Betrachte dazu, wie nebenstehend angedeutet, ein Flugzeug der Masse  $M$ , das sich mit einer Fluggeschwindigkeit  $v$  horizontal bewegt. Nimm an, dass sich die gesamte Luft in dem von dem Flugzeug durchflogenen Luftzylinder mit Durchmesser  $s$  nach dem Durchflug des Flugzeugs mit einer konstanten Geschwindigkeit nach unten bewegt. Die Länge  $s$  entspricht dabei der Spannweite des Flugzeugs.

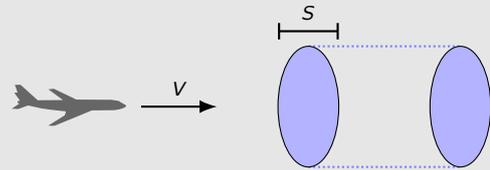


Abb. 4. Skizze zum Flugzeugflug<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Die Flugzeugskizze wurde mit dem Paket aircraftshapes.sty erzeugt, das unter der MIT License veröffentlicht ist.

Darüber hinaus wirkt auf das Flugzeug ein Strömungswiderstand, eine der Geschwindigkeit entgegengerichtete Kraft, die sich ausdrücken lässt durch

$$F_w = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2.$$

Dabei ist  $\rho$  die konstant anzunehmende Luftdichte und  $A$  bezeichnet eine Referenzfläche, in diesem Fall die Flügelfläche des Flugzeugs. Die Größe  $c_w$  gibt den Widerstandsbeiwert für die betrachtete Strömung an, der ebenfalls als konstant angenommen werden soll.

- 9.a) Leite mit diesen Informationen einen Ausdruck für die optimale Reisegeschwindigkeit eines Flugzeugs ab. Die optimale Reisegeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit  $v$ , bei der das Flugzeug mit minimaler Schubkraft auf konstanter Höhe fliegen kann. Schätze damit den Wert der optimalen Reisegeschwindigkeit für eine Boeing 747 ab.
- 9.b) Berechne den Treibstoffverbrauch einer Boeing 747 bei optimaler Reisegeschwindigkeit pro Person und pro 100 km Flugstrecke, wenn das Flugzeug mit 400 Personen besetzt ist. Verwende für den Energieinhalt des Flugzeugtreibstoffs den Wert  $38 \text{ MJ L}^{-1}$  und nimm einen Wirkungsgrad der Triebwerke von 30 % an.

Verwende die folgenden Daten für die Abschätzung der optimalen Reisegeschwindigkeit einer Boeing 747:

Masse:	$M = 400 \cdot 10^3 \text{ kg}$
Spannweite:	$s = 64 \text{ m}$
Flügelfläche:	$A = 525 \text{ m}^2$
Luftwiderstandsbeiwert im Reiseflug:	$c_w = 0,018$
Luftdichte in Reiseflughöhe:	$\rho = 0,37 \text{ kg m}^{-3}$

**Lösung**

9.a)

Rechnungen und Erläuterungen

 Die Masse des in einer (kurzen) Zeit  $\Delta t$  durchflogenen Luftzylinders beträgt

$$\Delta m = \frac{\pi}{4} s^2 v \Delta t \rho. \quad (9.1)$$

Die durch das Flugzeug verursachte vertikale Impulsänderung dieser Luftmasse ist gegeben durch

$$\Delta p = \Delta m u, \quad (9.2)$$

 wobei  $u$  die als konstant anzunehmende Geschwindigkeit des Abwindes bezeichnet. Nach dem dritten Newtonschen Gesetz erfährt das Flugzeug dadurch eine nach oben gerichtete Kraft der Größe

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\pi}{4} s^2 v \rho u \stackrel{!}{=} M g. \quad (9.3)$$

 Die letzte Gleichheit ist Ausdruck der Bedingung, dass die nach oben gerichtete Kraft gerade die Gewichtskraft des Flugzeugs kompensiert. Für die Geschwindigkeit  $u$  der Luftmasse ergibt sich aus (9.3)

$$u = \frac{M g}{\frac{\pi}{4} s^2 v \rho}. \quad (9.4)$$

 Die zur Beschleunigung der Luftmasse auf diese Geschwindigkeit notwendige Leistung  $P$  muss von dem Flugzeug aufgebracht werden, auf das dadurch eine der Bewegung entgegengesetzte Kraft  $F_i$  induziert wird, für die gilt

$$P = \frac{\Delta E_{\text{kin}}}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \Delta m u^2}{\Delta t} = F_i v. \quad (9.5)$$

Damit und mit (9.4) ist die induzierte Kraft auf das Flugzeug gegeben durch

$$F_i = \frac{1}{2} \frac{M^2 g^2}{\frac{\pi}{4} s^2 v^2 \rho}. \quad (9.6)$$

 Die insgesamt bremsende Kraft auf das Flugzeug ist die Summe der induzierten Kraft und des Strömungswiderstandes  $F_w$ :

$$F_{\text{Brems}} = F_i + F_w = \frac{1}{2} \frac{M^2 g^2}{\frac{\pi}{4} s^2 v^2 \rho} + \frac{1}{2} c_w \rho A v^2. \quad (9.7)$$

Diese wird, wie man durch Nullsetzen der ersten Ableitung zeigt, minimal für die optimale Reisegeschwindigkeit

$$v_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{M g}{\rho s \sqrt{\frac{\pi}{4} c_w A}}}. \quad (9.8)$$

Bei dieser Geschwindigkeit dient die Schubkraft des Flugzeugs zur Hälfte der Überwindung des induzierten und zur Hälfte zur Überwindung des Strömungswiderstandes. Mit den gegebenen Daten folgt für die optimale Reisegeschwindigkeit einer Boeing 747:

$$v_{\text{opt}} \approx 247 \text{ m s}^{-1} \approx 890 \text{ km h}^{-1}. \quad (9.9)$$

*Hinweis:* Die tatsächliche Reisegeschwindigkeit einer Boeing 747-400 liegt bei etwa  $920 \text{ km h}^{-1}$ .

9.b)

Rechnungen und Erläuterungen

Der Treibstoffverbrauch des Flugzeugs auf einer Flugstrecke  $\ell$  bei optimaler Reisegeschwindigkeit bestimmt sich aus

$$F_{\text{Bremms}}(v_{\text{opt}}) \ell = \varepsilon e V. \quad (9.10)$$

Dabei bezeichnen  $\varepsilon = 0,3$  den Wirkungsgrad der Triebwerke und  $e = 38 \text{ MJ L}^{-1}$  den Energieinhalt des Treibstoffs. Pro 100 km und Passagier ergibt sich damit bei einer Passagierzahl von  $N = 400$  ein Treibstoffverbrauch von

$$\frac{V}{\ell N} = \frac{F_{\text{Bremms}}(v_{\text{opt}})}{\varepsilon e N} = \frac{Mg}{\varepsilon e N} \sqrt{\frac{c_W A}{\frac{\pi}{4} s^2}} \approx 4,7 \text{ L}/100 \text{ km}. \quad (9.11)$$

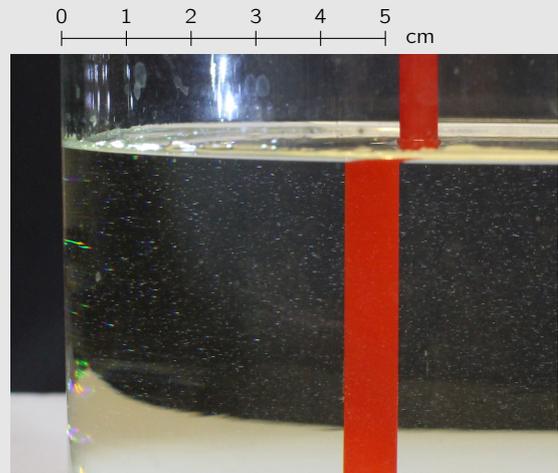
## Aufgabe 10 Vershobener Strohhalm



(1. Runde zur IPhO 2018)

Ein Strohhalm wird mittig in ein teilweise mit einer transparenten Flüssigkeit gefülltes Glas getaucht. Beobachtet man das Glas von der Seite und verschiebt den Strohhalm senkrecht zur Blickrichtung und entlang des Durchmessers, scheint sich der Strohhalm in der Flüssigkeit gegenüber dem Strohhalm oberhalb der Flüssigkeit zu verschieben.

Das mit einem Maßstab versehene Foto zeigt die Situation, bei der sich der Strohhalmteil in der Flüssigkeit gerade von dem Teil oberhalb zu lösen scheint. Der Durchmesser des dabei verwendeten dünnwandigen Glases beträgt 14,4 cm. Nimm an, dass das Glas aus einer Entfernung betrachtet wird, die groß verglichen mit dem Durchmesser des Glases ist.



Bestimme näherungsweise den Brechungsindex der Flüssigkeit.

### Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Für die Brechung muss das dünnwandige Glas nicht mit berücksichtigt werden, so dass es ausreichend ist, den Übergang zwischen Luft und dem Flüssigkeitskörper zu untersuchen. Die nebenstehende Skizze zeigt eine Aufsicht auf das Glas. Dabei ist der Radius des Glases mit  $R$  bezeichnet, und  $d$  gibt den Durchmesser des Strohhalmes an. Die beiden roten Rechtecke symbolisieren die Querschnitte des Strohhalmes (rechts) und des in der Flüssigkeit wahrgenommenen Bildes des Strohhalmes (links). Der Abstand zwischen dem rechten Rand des Strohhalmes und dem Rand des Glases in dieser Situation wird mit  $a$  bezeichnet.

Da das Glas aus einer größeren Entfernung beobachtet wird, müssen die zum Beobachter laufenden Lichtstrahlen das Glas in dieser Aufsicht senkrecht nach unten verlassen. Mit den Bezeichnungen in der Abbildung ist

$$\frac{R - a}{R} = \sin \varphi' = n \sin \varphi \approx n \frac{R - a - d}{R}. \quad (10.1)$$

Dabei wurde das Brechungsgesetz nach Snellius verwendet und es wurde ausgenutzt, dass die Entfernung vom Übergangspunkt zwischen Luft und Flüssigkeit zum linken Rand des Strohhalmes etwa gleich groß ist wie die entsprechende Entfernung zum rechten Rand des Strohhalmes<sup>a</sup>.

Der Radius des Glases beträgt laut Aufgabenstellung  $R = 7,2$  cm. Die in Abbildung 5 eingeführten

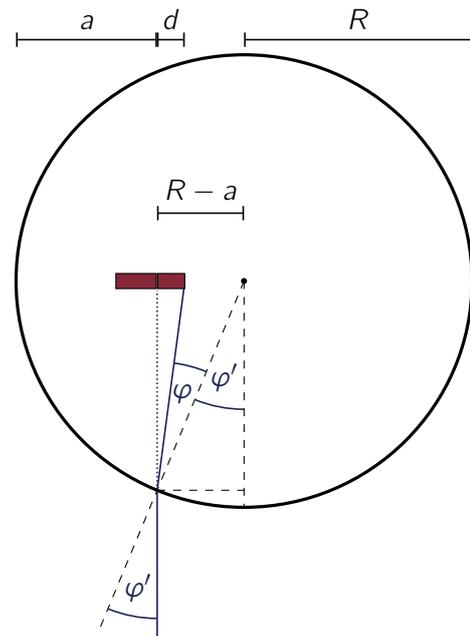


Abb. 5. Aufsicht auf das Glas mit dem verschobenen Strohhalm.

Größen  $a$  und  $d$  lassen sich in dem gegebenen Foto mit einem Lineal vermessen und mit Hilfe des Maßstabes in der Abbildung bestimmen zu

$$a = (5,24 \pm 0,06) \text{ cm} \quad \text{und} \quad d = (0,59 \pm 0,06) \text{ cm} . \quad (10.2)$$

Mit dem Ergebnis (10.1) und den bestimmten Werten folgt daraus für den Brechungsindex der Flüssigkeit

$$n = \frac{R - a}{R - a - d} \approx (1,43 \pm 0,08) . \quad (10.3)$$

*Hinweis:* Von den Teilnehmenden wird keine Abschätzung der Unsicherheit des Ergebnisses erwartet. Die verwendete Flüssigkeit war 86,5% Glycerin mit einem Brechungsindex von etwa 1,45. Der bestimmte Wert ist im Rahmen der Fehlergrenzen gut mit diesem Wert vereinbar.

*Literaturhinweis:* Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus dem Artikel Gluck, P. (2011). A simple method to measure the refractive index of a liquid. *Physics Education*, 46 (3), 253.

<sup>a</sup>Der Winkel  $\varphi$  lässt sich auch ohne diese Näherung bestimmen. Es ist  $\tan(\varphi' - \varphi) = d / \sqrt{R^2 - (R - a)^2}$  und damit  $\varphi = \varphi' - \arctan \frac{d}{\sqrt{R^2 - (R - a)^2}}$ . Daraus folgt der Brechungsindex

$$n = \frac{\frac{R-a}{R}}{\sin \left( \arcsin \frac{R-a}{R} - \arctan \frac{d}{\sqrt{R^2 - (R-a)^2}} \right)} \approx 1,44 .$$

## Aufgabe 11 Fadenpendel

(Begleitheft der 1. Runde zur 50. IPhO 2019)

Aus einem dünnen Faden und einem kleinen Gewicht, wie zum Beispiel einer Schraube oder Mutter, lässt sich ein einfaches Fadenpendel bauen. Wenn die Ausdehnung des Gewichtes sehr klein gegenüber der Fadenlänge  $\ell$  ist, gilt für die Schwingungsdauer  $T$  des Pendels bei kleinen Auslenkungen

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Dabei bezeichnet  $g$  die Schwerebeschleunigung auf der Erde. Theoretisch sollte damit  $T^2$  eine lineare Funktion der Fadenlänge  $\ell$  sein.

Die folgende Tabelle stellt in einem Experiment gemessene Werte der Schwingungsperioden  $T$  zusammen mit der gemittelten Schwingungsperiode  $\bar{T}$  und dem Quadrat dieser Größe dar.

Fadenlänge	Zeit für 10 Schwingungsperioden					Mittelwert	
$\ell / \text{cm}$	$10 T / \text{s}$					$\bar{T} / \text{s}$	$\bar{T}^2 / \text{s}^2$
67,2	16,62	16,87	15,43	17,50	17,61	1,68	2,82
55,5	15,12	13,94	16,18	15,04	15,53	1,51	2,29
47,0	13,79	12,60	13,37	14,41	14,80	1,38	1,90
34,5	11,93	13,02	10,77	12,18	11,72	1,19	1,42
22,0	9,50	11,44	9,24	9,59	8,73	0,97	0,94
13,4	7,91	6,38	8,32	8,91	7,89	0,79	0,62

Überprüfe mit Hilfe eines geeigneten Graphen, ob die experimentellen Daten zu dem theoretisch erwarteten Verlauf passen und bestimme den Wert der Schwerebeschleunigung  $g$ .

## Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Abbildung 6 zeigt die quadrierte mittlere Schwingungsdauer  $\bar{T}^2$  in Abhängigkeit von der Fadenlänge. Da die Ausgleichsgerade die Messwerte sehr gut approximieren, passen die Messergebnisse zu der theoretisch erwarteten linearen Abhängigkeit. Allerdings verläuft die Ausgleichsgerade nicht durch den Ursprung. Die lässt sich durch die endliche Ausdehnung der Mutter und eine daraus resultierende

Abweichung zwischen Fadenlänge und Pendellänge erklären.

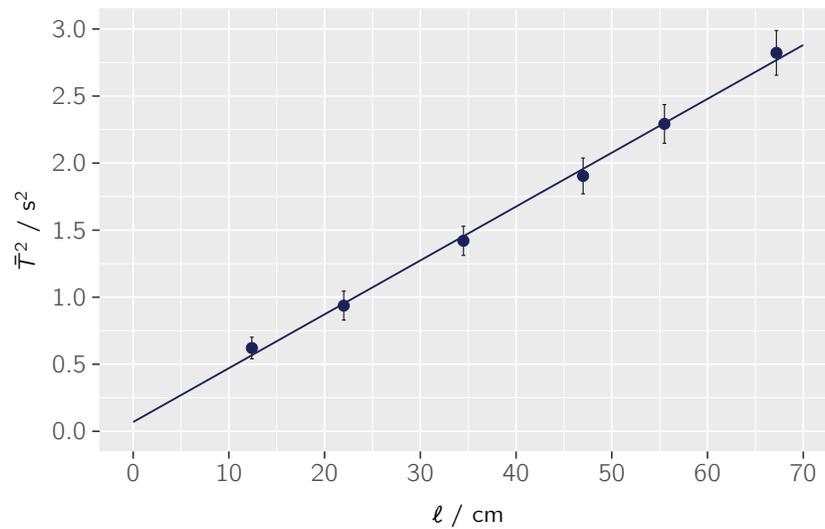


Abb. 6. Graph der quadrierten mittleren Schwingungsdauer  $\bar{T}^2$  des Fadenpendels als Funktion der Fadenlänge  $\ell$  mit Ausgleichsgerade. Die Unsicherheiten bei der Fadenlänge sind sehr gering und wurden nicht mit eingezeichnet.

Aus der Steigung  $b \approx (4,0 \pm 0,2) \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$  der Ausgleichsgeraden lässt sich mit der in der Aufgabenstellung angegebenen Formel die Schwerebeschleunigung auf der Erde bestimmen zu

$$g = \frac{4\pi^2}{b} \approx (9,9 \pm 0,5) \text{ m s}^{-2}. \quad (11.1)$$

Dieser Wert stimmt gut mit dem gemeinhin benutzten Wert von  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  überein. Der Fehler in der Steigung wurde dabei über andere, mit den Fehlern der Messwerte vereinbare, Ausgleichsgeraden abgeschätzt.