Lernmaterialien PhysikOlympiade

Themenblock: Schwingungen

Einfache, gedämpfte und angeregte Schwingungen

Dieses Vorbereitungsmodul richtet sich an alle Schüler/innen, die sich aktiv auf die PhysikOlympiade vorbereiten wollen oder auch einfach nur Spaß an physikalischen Themen haben. Der vorgestellte Stoff geht über die Schulinhalte hinaus, da dieses Modul an das Niveau der PhysikOlympiade angepasst ist. Das Modul umfasst einen Theorieteil mit Formeln und Übungsaufgaben, um das gelernte Wissen zu überprüfen.

Dieses Modul befasst sich mit der Beschreibung von Schwingungsphänomenen. Dazu werden für die drei grundlegenden Arten von Schwingungen – die einfachen, die gedämpften und die angeregten Schwingungen – beschrieben. Dazu werden die Bewegungsgleichungen hergeleitet und gelöst.

IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie und Formeln

Schwingungen bezeichnen in der Physik die periodische Schwankungen von Zustandsgrößen um eine Gleichgewichtslage. Aus dem Alltag kennen wir Schwingungen von Pendeln oder auch Schaukeln. Die Schwingung kann über die **Amplitude** A, also den Betrag der maximalen Änderung zur Gleichgewichtsposition und der **Periodendauer** T beschrieben werden. Diese gibt die Zeit an, die das System für einen gesamten Schwingzyklus benötigt. Oftmals wird diese in einer **Frequenz** f oder **Kreisfrequenz** ω angegeben. Es gilt

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{1.1}$$

Hinzu kommt die **Phase** φ, diese Beschreibt an welchem Punkt der Schwingung sich das System zum Startzeitpunkt der Betrachtung befindet.

Außerdem werden Schwingen darin unterschieden, ob das System einer Dämpfung unterliegt wie eine schwingende Gitarrensaite, deren Schwingung nach einiger Zeit zum Erliegen kommt. Wird allerdings ein idealen System betrachtet, wird dessen Schwingung gleichbleibend fortsetzt.

Analog zur Dämpfung kann das Schwingungssystem angeregt werden. Erfolgt die Anregung zum richtigen Zeitpunkt, kann diese kann wie beim Schaukeln dafür sorgen, dass sich die Amplitude der Schwingung erhöht. Daher kann in einfache, gedämpfte und angeregte Schwingung unterschieden werden. Diese drei Schwingungsarten werden im Folgenden separat diskutiert. Außerdem sind diese drei Fälle in Abbildung 1 gezeigt.

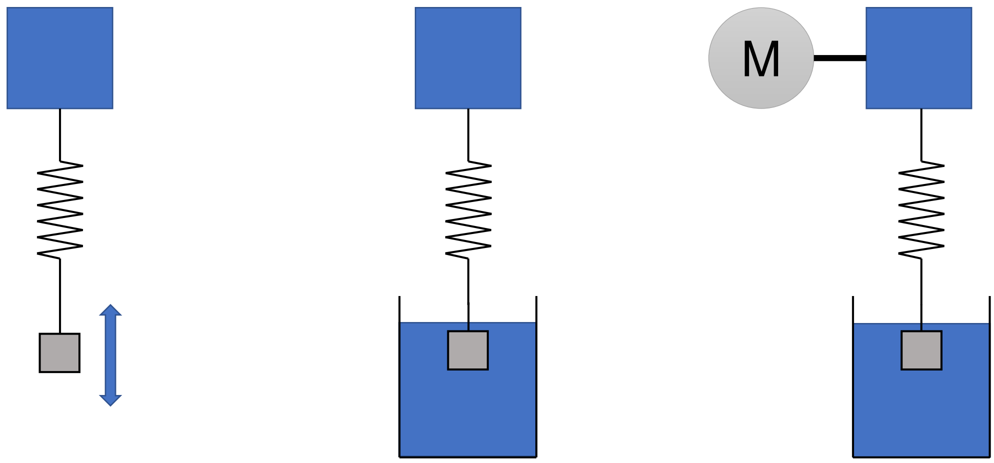


Abb. 1. *Schematische Darstellung der drei verschiedenen Schwingungsmöglichkeiten. Links ist der ungedämpfte Fall gezeigt. In der Mitte und rechts, befindet sich die schwingende Masse in einer viskosen Flüssigkeit, die zu einer Dämpfung führt. Zusätzlich wird der Schwinger rechts von einem Motor (M) angetrieben, was zu einer Anregung der Schwingung führt.*

1.1 Einfache Schwingungen

Die einfachen Schwingungen werden am Beispiel des Federschwingers diskutiert. Die Feder besitzt eine Rückstellkraft, die proportional zu ihrer Auslenkung ist. Dabei ist die Proportionalitätskonstante die **Federkonstante** D. Ist wie die in diesem Beispiel die Auslenkung proportional zur Rückstellkraft wird das System auch harmonischer Oszillator genannt. Wird nun der Federschwinger mit einer **Kraft** F um die **Strecke** x ausgelenkt, wirkt die diese der Rückstellkraft des Federschwingers entgegen. Es gilt

$$F = -Dx\,. \tag{1.2}$$

Die Kraft kann geschrieben werden als $F = ma$. Wobei m die schwingende **Masse** und a die **Beschleunigung** bezeichnet. Daher kann die Formel geschrieben werden als

$$a + \frac{D}{m}x = 0\,. \tag{1.3}$$

Nun wird $\frac{D}{m}$ als Kreisfrequenz ω_0^2 identifiziert. Außerdem gilt es zu beachten, dass die Beschleunigung die zweite Ableitung des Ortes x nach der **Zeit** t entspricht. Die Ableitung nach der Zeit wird mit einem Punkt über die Position x deutlich gemacht. Die Anzahl der Punkt steht dabei für den Grad der Ableitung. Daher hat die Bewegungsgleichung für einfache Schwingung die Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,. \tag{1.4}$$

Dies ist eine Differentialgleichung die gelöst werden muss, um den Ort x in Abhängigkeit der Zeit t zu erhalten. Dabei ist zu beachten, dass es häufig genügt die Bewegungsgleichung des Problems in diese Form zu bringen und ω_0 herauszulesen. Muss hingegen diese Bewegungsgleichung gelöst werden, empfiehlt sich der e-Ansatz. Daher wird $x(t) = ce^{\lambda t}$ für x eingesetzt. Dabei sei c eine beliebige Konstante. Durch Einsetzten kann der Parameter λ bestimmt werden. Es ist

$$\lambda^2 ce^{\lambda t} + \omega_0^2 ce^{\lambda t} = 0\,. \tag{1.5}$$

Daher ist $\lambda_1 = i\omega_0$ und $\lambda_2 = -i\omega_0$. Die gesamte Lösung der Differentialgleichung ist nun eine Linearkombination aller Teillösungen und daher

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}\,. \tag{1.6}$$

Dabei sind c_1 und c_2 Konstanten, die durch die Randbedingungen bestimmt werden. Es gibt viele unterschiedliche Darstellungsformen für diese Gleichung. Eine bei der die Randbedingungen besonders einfach zu bestimmen sind ist, die Form

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}\,. \tag{1.7}$$

1.2 Gedämpfte Schwingungen

Bei den gedämpften Schwingungen muss zusätzlich zur Rückstellkraft eine Reibungskraft beachtet werden. Diese ist proportional zur **Geschwindigkeit** v mit der sich die Masse bewegt. Die Reibungskraft zeigt dabei immer entgegen der Bewegungsrichtung. Daher kann die Bewegungsgleichung für diesen Fall geschrieben werden als

$$m\ddot{x} = -Dx - b\dot{x}\,. \tag{1.8}$$

Dabei ist b die zugehörige Proportionalitätskonstante der Reibung. Analog zu den einfachen Schwingungen kann hier die Dämpfungskosten identifiziert werden $2\gamma = \frac{b}{m}$. Daher ist die allgemeine Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma + \omega_0 = 0\,. \tag{1.9}$$

Diese kann mit dem gleichen Verfahren wie im letzten Abschnitt gelöst werden. Das Ergebnis ist hier

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right)\,. \tag{1.10}$$

Aus diesen Grund hängt die Form der Bewegung stark von dem Verhältnis von γ und ω_0 ab. Dabei wird zwischen der schwachen, der starken und der aperiodischen Dämpfung unterschieden. Bei der schwachen Dämpfung ist $\omega_0 > \gamma$, daher ist die Wurzel in den e-Funktionen komplexwertig. Für diesen Fall wird traditionell die die Abkürzung $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ eingeführt. Daher ist hier die Lösung analog zur einfachen Schwingung

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)}\,. \tag{1.11}$$

Hierbei handelt es sich demnach um die gleiche Form der Schwingungen wie im vorherigem Kapitel nur die Amplitude mit exponentiell ab. Daher bleibt hier die Energie des Systems nicht erhalten. Dabei kann die stärke diese Dämpfung über das Verhältnis der Amplituden zweier aufeinander folgender Maxima bestimmt werden über

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\gamma T}\,. \tag{1.12}$$

Bei dem Fall der starken Dämpfung gilt $\omega_0 < \gamma$ und für den Fall der aperiodischen Dämpfung gilt $\omega_0 = \gamma$. Diese beiden Fälle sollen hier nicht explizit behandelt werden.

1.3 Erzwungene Schwingungen

Hier wirkt auf den gedämpften Federschwinger eine zusätzliche Kraft. Diese antreibende Kraft habe die Form

$$F_\mathrm{A} = F_0\cos(\omega t)\,. \tag{1.13}$$

Daher wirkt auf die Masse m eine zusätzliche periodische Kraft. Daher wird die zugehörige Bewegungsgleichung zu

$$m\ddot{x} = -Dx - b\dot{x} + F_0\cos(\omega t)\,. \tag{1.14}$$

An dieser stelle kann wieder eine neue Abkürzung eingeführt werden, diese ist $K = \frac{F_0}{m}$. Damit kann die Bewegungsgleichung geschrieben werden als

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = K\cos(\omega t) \tag{1.15}$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differenzialgleichung zweiter Ordnung ist[1]

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi)\,. \tag{1.16}$$

Diese besteht aus zwei Beiträgen, die sich gegenseitig überlagern. Diese sind die stationäre Lösung des Systems und die gedämpfte Eigenschwingung. Dabei ist der erste Beitrag die Eigenschwingung mit ihrer Amplitude A_1 und der Frequenz der freien gedämpften Schwingung $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Der hintere Teil ist die stationäre Lösung, mit der Amplitude A_2 des stationären Teil der Lösung und der Phasenverschiebung φ zwischen erzwungener Schwingung und Erregerschwingung. Um zu verstehen wie dieser Name der stationären Lösung zustande kommt kann die Lösung der Bewegungsgleichung für $t \to \infty$ betrachtet werden. Dabei verschwindet die e-Funktion des ersten Terms und nur die stationäre Lösung $X(t)$ bleibt

[1] Die Lösung dieser Differentialgleichung ist mathematisch aufwendig und erfolgt daher an dieser Stelle nicht, kann aber nachvollzogen werde unter: V. I. Arnold: Gewöhnliche Differentialgleichungen (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1991)

erhalten. Diese soll im Folgenden genauer betrachtet werden. Durch die Lösung der Bewegungsgleichung können A_2 und φ bestimmt werden zu

$$A_2(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad \text{und} \tag{1.17}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \tag{1.18}$$

Hier fällt auf, dass die Amplitude und die Phase abhängig sind von der Anregungsfrequenz sind. Dies wird in Abbildung 2 deutlich.

In nächsten Schritt wird die Frequenz mit der höchsten Amplitude, die sogenannte Resonanzfrequenz ω_R bestimmt. Dazu wird das Maximum von $A_2(\omega)$ mittels Ableiten und nullsetzten bestimmen. Das Ergebnis ist

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \tag{1.19}$$

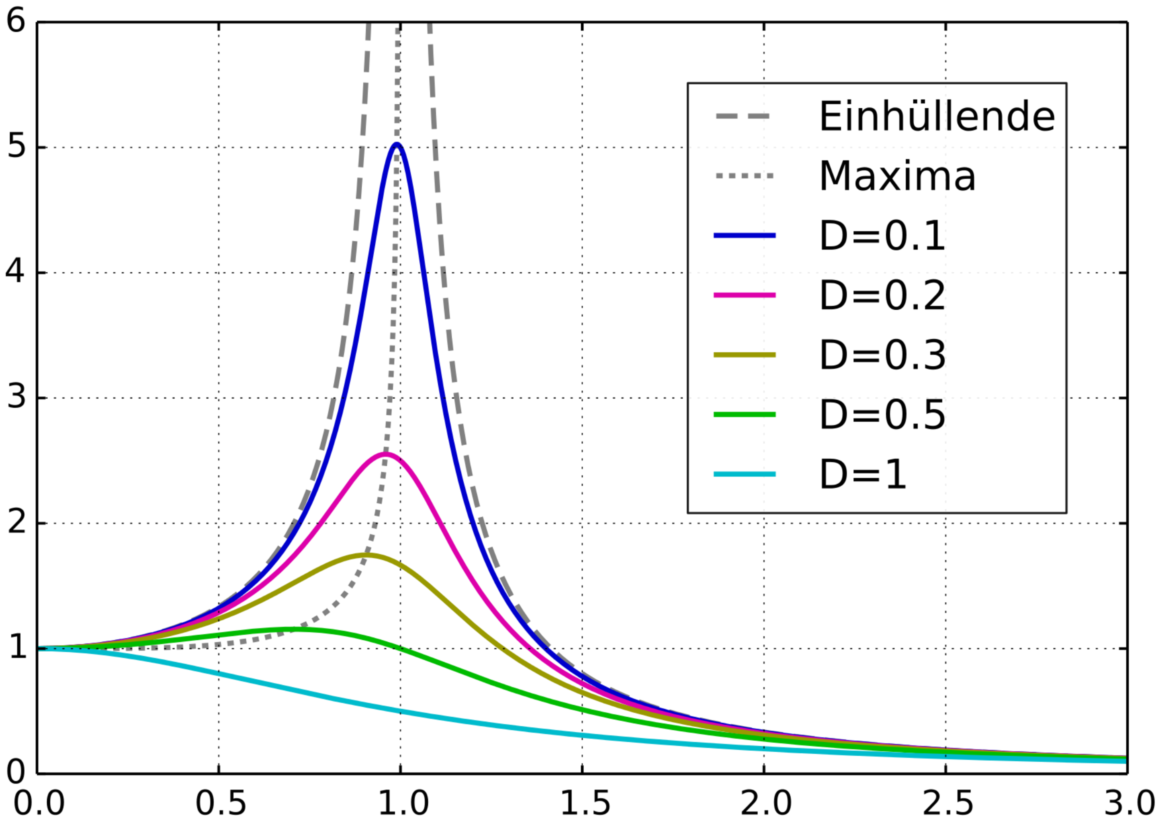


Abb. 2. *Gezeigt ist die Amplitude $\frac{A_2}{K}$ des angeregten Oszillators in Abhängigkeit des Frequenzverhältnis $\frac{\omega}{\omega_0}$ für unterschiedliche Dämpfungskonstanten. Zu erkennen ist, dass mit sinkender Dämpfung das Maximum der Amplitude steigt.* *Bild von Geek3, CC BY 3.0*

1.4 Energiebilanz

Oftmals genügt es sich die Energiebilanz eines schwingenden Systems zu betrachten, um Aussagen über die Dynamik des Systems treffen zu können. Dazu werden in diesem Abschnitt lediglich einfache Schwingungen betrachtet, da in diesen Systemen die Energie erhalten bleibt. Bei gedämpften Systemen wird kinetische Energie mittels Reibung in thermische Energie umgewandelt. Diese Energie stehe dem System nicht mehr für die Schwingung zur Verfügung, was in der Energiebilanz beachtet werden muss. Analog gilt dies für die angeregten Schwingungen, wobei hier ein zusätzlicher Beitrag durch die Anregung zu beachten ist.

Die **kinetische Energie** in Systemen mit einfacher Schwingung kann mittels Formel (1.7) berechnet werden. Für denn Fall, dass $\varphi_0 = 0$ gilt, folgt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t)\,. \tag{1.20}$$

Ebenso kann mit Formel (1.7) die **potentielle Energie** geschrieben werden als

$$E_{\text{pot}} = \int_0^x F\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{1}{2} DA^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t)\,. \tag{1.21}$$

Daher ist die **Gesamtenergie** des Systems

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = const. \tag{1.22}$$

1.5 Weiterführende Links

LEIFIphysik
Auf LEIFIphysik findest du viele anschauliche Erklärungen, mit vielen Graphiken, Beispielen, Aufgaben mit Lösungen. Zudem findest du auch Informationen zu mechanischen Wellen.

Online-Brückenkurs Physik
Ebenfalls viele Graphiken und Aufgaben findest du im Online-Brückenkurs Physik. Wenn du dich dort anmeldest, kannst du auch einen Abschlusstest zum Thema absolvieren.

Orpheus-Verein
Das Skript zu harmonischen Schwingungen vom Orpheus-Verein ist in Anlehnung an einen Vortrag des Orpheus-Seminars entstanden. Hier werden viele Formel und Gesetze hergeleitet.

2 Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind aus vergangenen Auswahlwettbewerben. Anhand der Aufgaben kannst du die Inhalte vertiefen und dich auf kommende Runden vorbereiten. Die Kreise oben rechts neben der Aufgabe geben den Schwierigkeitsgrad an. Je mehr Kreise ausgefüllt sind, desto schwieriger ist die Aufgabe. Die Lösungen der Aufgaben findest du im Anhang.

Aufgabe 1 Töne im Glas (Kurzaufgabe) ●○○

(3. Runde zur 44. IPhO 2013, Idee: Johannes Rothe)

Mit Glas kann man auf verschiedene Weise Töne erzeugen, z.B. durch Anblasen eines Flaschenhalses oder durch sanftes Streichen über den Rand eines Sektglases. Füllt man mehr Wasser in die Flasche bzw. in das Sektglas, so verändert sich die Tonhöhe.

Beschreibe jeweils den Mechanismus der Tonentstehung und gib an, wie sich die Tonhöhe durch das Hinzufügen von Wasser ändert.

Aufgabe 2 Plasmaoszillation ●●○

(3. Runde zur 48. IPhO 2017, Idee: Ralf Kleiber, IPP Greifswald)

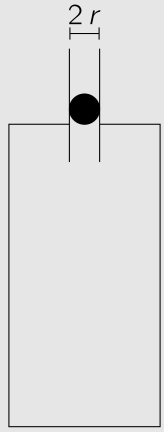
Ein elektrisch neutrales Plasma, bestehend aus Elektronen und Ionen, befindet sich in einem begrenzten Raumbereich. Durch äußere Einwirkung, wie z. B. elektromagnetische Felder, können die Elektronen gegenüber den sehr viel schwereren Ionen verschoben werden. Dadurch werden die Elektronen zu Schwingungen angeregt.

Betrachte ein Plasma, das nach der Verschiebung der Elektronen sich selbst überlassen wird. Bestimme die Frequenz dieser so genannten Plasmaoszillation als Funktion der Dichte n der Elektronen und auftretender physikalischer Konstanten.

Aufgabe 3 Luftschwingung

(3. Runde zur 38. IPhO 2007)

Ein luftgefüllter Behälter mit Volumen V wird wie in der Abbildung mit einem Rohr vom Radius r verbunden, so dass ein Ball mit gleichem Radius und Masse m gerade so hinein passt. Nach Einstellen einer Ruhelage wird der Ball leicht vertikal ausgelenkt.



Bestimme die Frequenz der als reibungsfrei anzunehmenden resultierenden Schwingung in Abhängigkeit von den auftretenden Parametern.

Hinweis: Für diese Aufgabe ist eine Kenntnis der Adiabatengleichung hilfreich. Diese findest du in folgendem Artikel bei Wikipedia: Adiabatische Zustandsänderung

Lernmaterialien PhysikOlympiade

Themenblock: Schwingungen

Lösungen der Aufgaben

Inhaltsverzeichnis

IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik

Aufgabe 1 Töne im Glas (Kurzaufgabe)

(3. Runde zur 44. IPhO 2013, Idee: Johannes Rothe)

Mit Glas kann man auf verschiedene Weise Töne erzeugen, z.B. durch Anblasen eines Flaschenhalses oder durch sanftes Streichen über den Rand eines Sektglases. Füllt man mehr Wasser in die Flasche bzw. in das Sektglas, so verändert sich die Tonhöhe.

Beschreibe jeweils den Mechanismus der Tonentstehung und gib an, wie sich die Tonhöhe durch das Hinzufügen von Wasser ändert.

Lösung

In der Flasche entstehen stehende Wellen, deren Wellenlängen an das schwingende Luftvolumen angepasst sind. Füllt man mehr Wasser in die Flasche, so verkleinert man das Luftvolumen und die Wellenlänge der angeregten Moden wird kürzer, der Ton also höher.

Im Sektglas schwingt nicht die Luft, sondern primär das Glas selbst Mit seinem dünnen Stiel kann man es als harmonischen Oszillator betrachten, dessen Frequenz

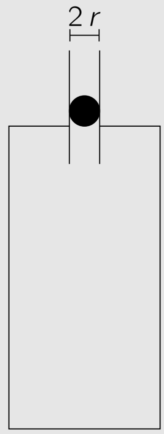
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.1}$$

mit steigender bewegter Masse, also mit mehr Wasser im Glas sinkt.

Aufgabe 2 Luftschwingung

(3. Runde zur 38. IPhO 2007)

Ein luftgefüllter Behälter mit Volumen V wird wie in der Abbildung mit einem Rohr vom Radius r verbunden, so dass ein Ball mit gleichem Radius und Masse m gerade so hinein passt. Nach Einstellen einer Ruhelage wird der Ball leicht vertikal ausgelenkt.



Bestimme die Frequenz der als reibungsfrei anzunehmenden resultierenden Schwingung in Abhängigkeit von den auftretenden Parametern.

Lösung

Da die Schwingung reibungsfrei und schnell verläuft, handelt es sich um ein adiabatischen Vorgang. Für diesen gilt

$$p\,V^{\gamma} = \text{const.}\,, \tag{2.1}$$

wobei der Adiabatenkoeffizient für ein ideales zweiatomiges $\gamma = 7/5$ ist. Für kleine Druck und Volumenänderungen gilt

$$\Delta p\,V^{\gamma} + p\,\gamma\,V^{\gamma-1}\Delta V = 0 \tag{2.2}$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{\Delta p\,V}{p\,\gamma} \tag{2.3}$$

Nun gilt für die Auslenkung x

$$x = \frac{\Delta V}{A} = -\frac{\Delta p\,V}{p\,\gamma\,A}\,. \tag{2.4}$$

Daei bezeichnet A die Querschnittfläche des Flaschenhalses. Mit der Kraft $F = \Delta p\,A$ ergibt sich daraus die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -\frac{p\,A^2\,\gamma}{V}x \tag{2.5}$$

Dies ist eine lineare Schwingungsgleichung. Der Vorfaktor auf der rechten Seite ist also gleich $\omega^2\,m$ mit der Kreisfrequenz ω. Es folgt für die Frequenz

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma\,A^2\left(\rho_0 + \frac{mg}{A}\right)}{V\,m}}}\,, \tag{2.6}$$

wobei ρ_0 der Atmosphärendruck ist.

Luftschwingung	**Punkte**
Erkennen, dass der Vorgang adiabatisch ist	1
Zusammenhang zwischen p und V (2.1)	0,5
Zusammenhang zwischen Δp und ΔV (2.2)	1
Aufstellen der Bewegungsgleichung	1
Lösen der Bewegungsgleichung und Lösung	1
	4,5

Aufgabe 3 Plasmaoszillation

(3. Runde zur 48. IPhO 2017, Idee: Ralf Kleiber, IPP Greifswald)

Ein elektrisch neutrales Plasma, bestehend aus Elektronen und Ionen, befindet sich in einem begrenzten Raumbereich. Durch äußere Einwirkung, wie z. B. elektromagnetische Felder, können die Elektronen gegenüber den sehr viel schwereren Ionen verschoben werden. Dadurch werden die Elektronen zu Schwingungen angeregt.

Betrachte ein Plasma, das nach der Verschiebung der Elektronen sich selbst überlassen wird. Bestimme die Frequenz dieser so genannten Plasmaoszillation als Funktion der Dichte n der Elektronen und auftretender physikalischer Konstanten.

Lösung

Betrachte, wie nebenstehend angedeutet, ein quaderförmiges Volumenelement der Länge ℓ mit Stirnfläche A, dessen Länge entlang der Verschiebungsrichtung der Elektronen orientiert ist. Bezeichne mit x die Verschiebung der Elektronen gegenüber den Ionen.

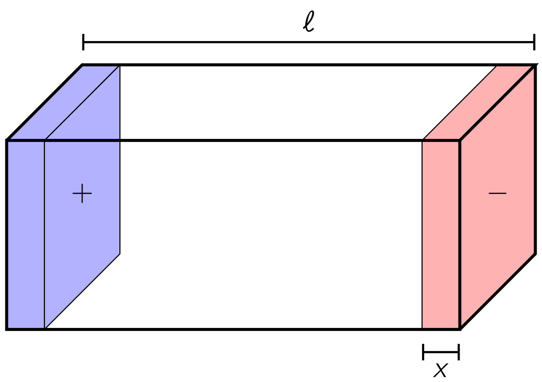


Abb. 1. *Skizze zur Plasmaoszillation. An den Enden des Volumenelements befinden sich überschüssige Ladungsträger, links positiv geladene Ionen und rechts negativ geladene Elektronen.*

Durch die Verschiebung entsteht an der einen Seite des Volumenelements ein Überschuss an Ionen, während an der anderen Seite ein Überschuss an Elektronen entsteht. Der Betrag der Überschussladung beträgt dabei

$$Q = e\,n\,A\,x\,, \tag{3.1}$$

wobei n die Elektronendichte angibt.

Durch die überschüssigen Ladungen an den Stirnflächen wird in dem Volumen, wie in einem Kondensator[1], ein elektrisches Feld der Größe

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0\,A} = \frac{e\,n\,x}{\varepsilon_0} \tag{3.2}$$

erzeugt. Dieses führt zu einer Kraft F auf die Elektronen[2], die gegeben ist durch

$$F = -e\,E = \frac{e^2\,n}{\varepsilon_0}\,x\,. \tag{3.3}$$

Die rückstellende Kraft auf die Elektronen ist also proportional zu ihrer Auslenkung, so dass die Elektronen eine harmonische Schwingung ausführen. Die Winkelfrequenz dieser Plasmaoszillation, die so genannte Plasmafrequenz, beträgt

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{e^2\,n}{\varepsilon_0\,m_e}}}\,. \tag{3.4}$$

[1] Um Randeffekte zu vermeiden, kann die Länge des Raumelements als klein verglichen mit den Abmessungen der Stirnfläche angenommen werden.

[2] Eine Kraft wirkt natürlich auch auf die Ionen. Aufgrund der sehr viel größeren Masse der Ionen kann deren Bewegung vernachlässigt werden.

Bewertung - Plasmaoszillation		**Punkte**
3	Formulieren einer passenden Modellierungsidee	1.5
	Angabe der elektrischen Feldstärke (3.2) oder der Kraft (3.3) auf Elektronen	1.0
	Erkennen eines harmonischen Oszillators	1.0
	Angabe der Plasmafrequenz (3.4)	0.5
		4.0