55. Internationale PhysikOlympiade
Paris, Frankreich 2025

Lösungen zu den Vorbereitungsaufgaben für die 2. Wettbewerbsrunde

Aufgabe 1 Fall auf Exoplanet (MC-Aufgabe)

(2. Rd. zur IPhO 2022, Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Thomas Hellerl)

Auf der Oberfläche eines extrasolaren Planeten - kurz: Exoplaneten - ist die Fallzeit eines Körpers aus einer kleinen Höhe h unter Vernachlässigung aller Reibungseffekte genau doppelt so groß, wie auf der Erde.

Welche der folgenden Aussagen ist damit vereinbar, wenn man von einem kugelsymmetrischen Aufbau des Exoplaneten ausgeht?

Der Exoplanet hat ...

A ... die halbe Erdmasse und den doppelten Erdradius.

B ... genau die Erdmasse und vierfachen Erdradius.

C ... die doppelte Erdmasse und den doppelten Erdradius.

D ... die vierfache Erdmasse und den vierfachen Erdradius.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Fallzeit für einen freien Fall aus der Höhe h auf der Planetenoberfläche bestimmt sich aus $h = \frac{1}{2}\, g\, t^2$ zu:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \tag{1.1}$$

Die Schwerebeschleunigung g auf dem Planeten lässt sich mit Hilfe des Gravitationsgesetzes ausdrücken durch

$$g = \frac{G\,M}{R^2}\,, \tag{1.2}$$

wobei M die Planetenmasse, R dessen Radius und G die Gravitationskonstante bezeichnen. Für die Fallzeit ergibt sich so

$$t = \sqrt{\frac{2\,h\,R^2}{G\,M}}\,. \tag{1.3}$$

Soll diese Fallzeit bei festem h doppelt so groß sein, so muss $\frac{R^2}{M} = 4 \cdot \frac{R^2_{\text{Erde}}}{M_{\text{Erde}}}$ gelten. Das ist nur bei Antwortmöglichkeit D erfüllt.

Korrekte Antwort: *D*

Aufgabe 2 Pendel im Fahrstuhl (MC-Aufgabe)

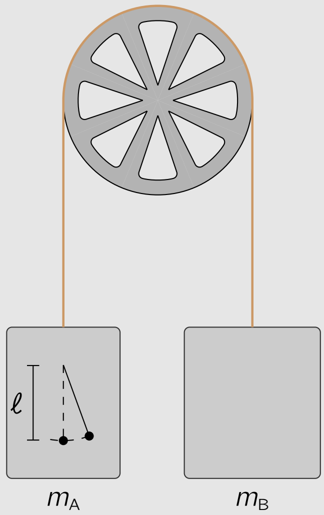
(2. Rd. zur IPhO 2022)

Zwei Fahrstuhlkabinen der Massen m_A und m_B mit $m_A < m_B$ hängen an den Enden eines langen Seiles, das über eine feste Rolle geführt ist. Die Masse der Rolle und des Seils können vernachlässigt werden. In der linken Kabine hängt ein Fadenpendel der Länge ℓ. Bei ruhenden Kabinen und kleinen Auslenkungen beträgt die Periodendauer des Pendels T.

Wenn die Kabinen losgelassen werden, bewegen diese sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft.

Wie muss die Länge ℓ' des Fadenpendels in der linken Kabine gewählt werden, damit es nach dem Loslassen der Kabine mit der Periode T schwingt?

A $\ell' = \frac{m_a}{m_B}\ell$ B $\ell' = \frac{2\,m_A}{m_A+m_B}\ell$ C $\ell' = \frac{2\,m_B}{m_A+m_B}\ell$ D $\ell' = \frac{m_B}{m_A}\ell$



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Periodendauer T eines Fadenpendels der Länge ℓ beträgt

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \text{bzw.} \qquad \ell = \frac{T^2\,g}{4\,\pi^2}\,, \tag{2.1}$$

wobei g die Schwerebeschleunigung auf der Erde angibt.

Nach dem Loslassen der Kabinen wird die Kabine A nach oben beschleunigt, da ihre Masse kleiner ist als die der anderen Kabine. Die Beschleunigung nach oben lässt sich bestimmen aus

$$(m_B + m_A)\,a = m_B\,g - m_A\,g\,, \qquad \text{so dass} \qquad a = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\,g\,. \tag{2.2}$$

Auf das Pendel in der Kabine A wirkt damit die Beschleunigung $g+a$ nach unten. Wenn das Pendel auch im beschleunigten Fall die gleiche Pendeldauer T besitzen soll, muss es dafür eine Länge ℓ' haben mit

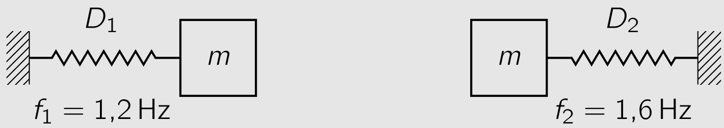
$$\boxed{\ell' = \frac{T^2}{4\,\pi^2}\,(g+a) = \frac{T^2\,g}{4\,\pi^2}\,\frac{2\,m_B}{m_A+m_B} = \frac{2\,m_B}{m_A+m_B}\,\ell > \ell}\,. \tag{2.3}$$

Korrekte Antwort: *C*

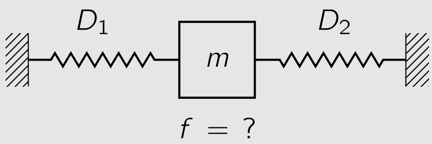
Aufgabe 3 Doppeltes Federpendel (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

(2. Runde zur IPhO 2023, Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Thomas Hellerl)

In den beiden in der Abbildung gezeigten Federpendeln schwingt jeweils ein Körper der Masse m reibungsfrei. Die Federkonstanten D_1 und D_2 der beiden hookeschen Federn sind dabei jedoch unterschiedlich. Daher schwingen die Körper nach einer Auslenkung mit unterschiedlichen Frequenzen f_1 und f_2.



Wie groß ist die Schwingungsfrequenz (Eigenfrequenz) des unten gezeigten Systems, in dem die Federn gekoppelt sind?



A $1{,}4\,\mathrm{Hz}$ B $2{,}0\,\mathrm{Hz}$ C $2{,}4\,\mathrm{Hz}$ D $2{,}8\,\mathrm{Hz}$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

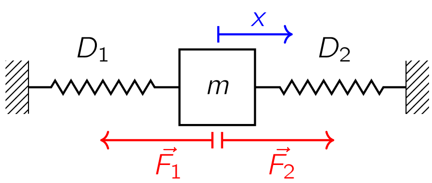
Die Eigenfrequenzen der oberen Oszillatoren sind gegeben durch

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D_i}{m}}\,. \tag{3.1}$$

Für die Federkonstanten D_i folgt demnach

$$D_i = 4\,\pi^2\, m\, f_i^2\,. \tag{3.2}$$

Die einzelnen Federkonstanten D_1 und D_2 des unteren Systems addieren sich zur neuen Federkonstante D aufgrund folgender Überlegung.



Im Gleichgewicht zieht jede Feder mit der Kraft F_0. Bei einer Auslenkung um x aus der Gleichgewichtslage üben die linke Feder den Kraftbetrag $F_1 = F_0 + D_1 x$ und die rechte Feder den Kraftbetrag $F_2 = F_0 - D_2 x$ auf m aus. Wir erhalten für die insgesamt auf die schwingende Masse m wirkende Kraft.

$$F(x) = -F_1 + F_2 = -(F_0 + D_1 x) + (F_0 - D_2 x) = -(D_1 + D_2)x \tag{3.3}$$

und damit ist für das System mit beiden Federn

$$D = D_1 + D_2 \tag{3.4}$$

Das neue System schwingt also mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D_1 + D_2}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{4\pi^2\, m\,(f_1^2 + f_2^2)}{m}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}\,. \tag{3.5}$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$\boxed{f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{1.2^2 + 1.6^2}\,\mathrm{Hz} \approx 2{,}0\,\mathrm{Hz}}\,. \tag{3.6}$$

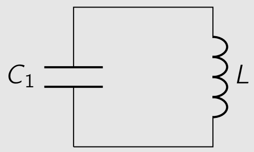
Korrekte Antwort: *B*

Aufgabe 4 Schwingkreise (MC-Aufgabe)

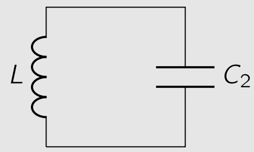
(2. Rd. zur IPhO 2024, Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Thomas Hellerl & Rolf Faßbender)

Eine Schaltung aus einer idealen Spule und einem idealen Kondensator heißt Schwingkreis. Die beiden, oben abgebildeten elektrischen Schwingkreise mit gleicher Induktivität L aber unterschiedlichen Kapazitäten C_i schwingen völlig widerstandslos mit den angegebenen Frequenzen.

$f_1 = f$

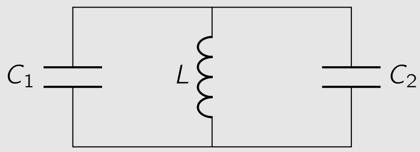


$f_2 = \frac{4}{3} f$



Wie groß ist die Schwingungsfrequenz f_{12} (Eigenfrequenz) des folgenden, gekoppelten Systems?

$f_{12} = ???$



A $\frac{2}{3} f$ B $\frac{3}{4} f$ C $\frac{4}{5} f$ D $\frac{5}{4} f$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Periodendauern der Schwingungen der oberen Schwingkreise sind gegeben durch die Thomsonformel

$$T_i = 2\,\pi \sqrt{L\, C_i}\,. \tag{4.1}$$

Im unteren, gekoppelten Schwingkreis addieren sich die Kapazitäten, da sie parallel geschaltet sind.

$$C_{12} = C_1 + C_2\,. \tag{4.2}$$

Für seine Schwingungsdauer T_{12} gilt demnach

$$T_{12} = 2\,\pi\,\sqrt{L(C_1 + C_2)} \qquad \text{bzw.} \qquad T_{12}^2 = 4\,\pi^2\,L\,(C_1 + C_2) = T_1^2 + T_2^2\,. \tag{4.3}$$

Somit erhalten wir

$$\frac{1}{f_{12}^2} = \frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\,. \tag{4.4}$$

Daraus ergibt sich mit den gegebenen Werten für die gesuchte Frequenz

$$\boxed{f_{12} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{f^2} + \frac{1}{\frac{16}{9}f^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}}\,f = \frac{4}{5}\,f}\,. \tag{4.5}$$

Korrekte Antwort: *C*

Aufgabe 5 Coulombkraft (MC-Aufgabe)

(1. Rd. zur IPhO 2017)

Zwei gleich große, geladene Metallkugeln befinden sich in einem sehr großen Abstand voneinander. Die Ladung der einen Kugel ist drei mal so groß wie die der anderen. Die Kraft, die die Kugeln aufeinander ausüben, ist F. Nun werden die Kugeln miteinander in Kontakt gebracht und anschließend in einem Abstand positioniert, der doppelt so groß wie anfänglich ist.

Wie groß ist jetzt etwa die Kraft zwischen ihnen?

A $0{,}25\,F$ B $0{,}33\,F$ C $0{,}50\,F$ D Die Kraft bleibt gleich.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Coulombkraft F, die die beiden Kugeln anfänglich aufeinander ausüben, beträgt:

$$F = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{3\,q^2}{r^2}\,. \tag{5.1}$$

Die Ladungen der beiden Kugeln werden dabei mit q bzw. $3\,q$ bezeichnet und deren anfänglicher Abstand mit r. Wenn sich die Kugeln berühren, gleichen sich die Ladungen aus, so dass jede Kugel eine Ladung $2\,q$ trägt. Nach der Abstandsänderung beträgt die Kraft daher

$$F' = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{(2\,q)^2}{4\,r^2} = \frac{1}{3}\,F \approx 0{,}33\,F\,. \tag{5.2}$$

Korrekte Antwort: *B*

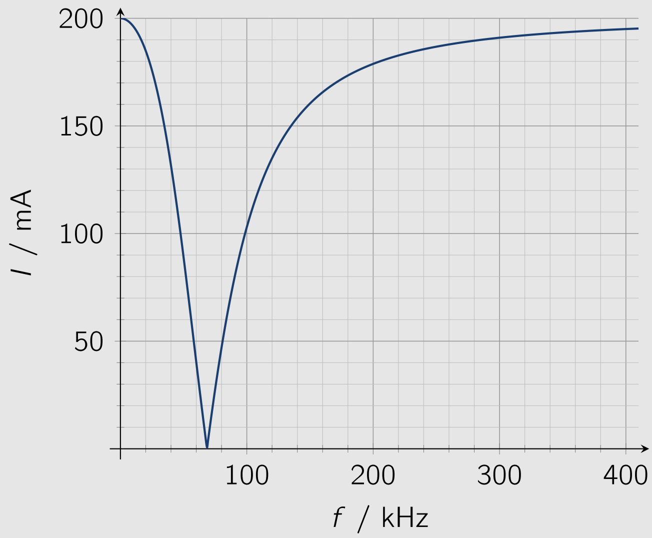
Aufgabe 6 Wechselstromschaltkreis (MC-Aufgabe)

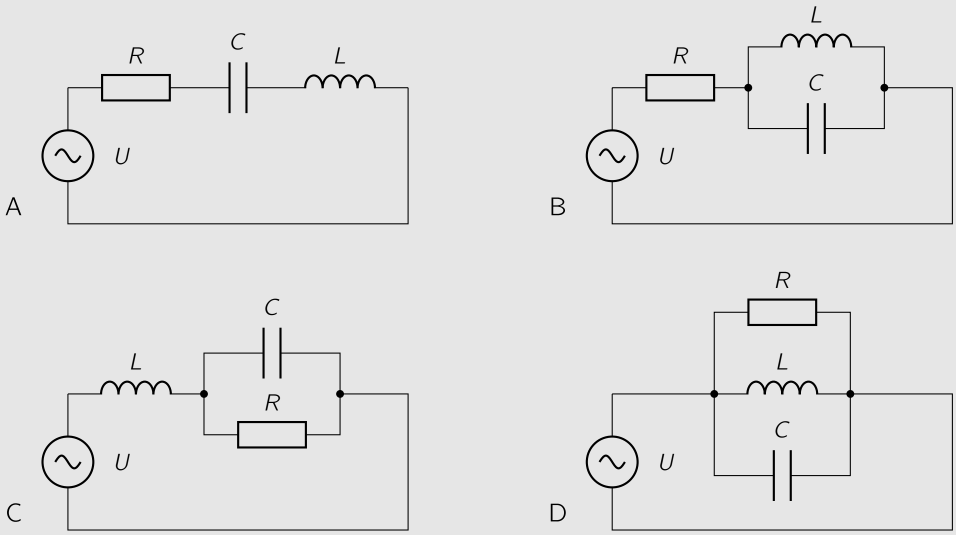
(2. Rd. zur IPhO 2019, Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Ein Widerstand mit Widerstandswert R, ein Kondensator der Kapazität C und eine Spule der Induktivität L werden an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen. Die Amplitude der Wechselspannung beträgt U und die Bauteile können als ideal angenommen werden.

Der folgende Graph zeigt die Amplitude I der Stromstärke in dem Stromkreis als Funktion der Frequenz f der sinusförmigen Wechselspannung.

Welche der folgenden Schaltskizzen stellt die verwendete Schaltung korrekt dar?





Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Dem Graphen entnimmt man für sehr kleine Frequenzen der Wechselspannung eine endliche, von Null verschiedene Amplitude der Stromstärke. Der Scheinwiderstand Z der Schaltung, der oft auch als Impedanz bezeichnet wird, muss wegen des Zusammenhanges $I = \frac{U}{Z}$ bei sehr kleinen Frequenzen daher ebenfalls einen von Null verschiedenen und endlichen Wert besitzen. Damit scheiden bereits die Schaltungen A und D aus. Bei der Schaltung A führt der in Reihe geschaltete Kondensator bei niedrigen Frequenzen zu einem beliebig hohen Scheinwiderstand. Bei Schaltung D ist die Parallelschaltung aufgrund der Spule für niedrige Frequenzen quasi kurzgeschlossen, so dass der Strom beliebig groß werden würde.

Für hohe Frequenzen nähert sich die Stromstärke dem Wert an, die auch für sehr kleine Frequenzen beobachtet wird. Dieses würde in Schaltung C nicht passieren, da dort für hohe Frequenzen der

Widerstand durch den Kondensator kurzgeschlossen würde und der Scheinwiderstand aufgrund der Induktivität dann näherungsweise linear mit der Frequenz ansteigen würde. In Schaltung B wird entsprechend die Induktivität durch den Kondensator kurzgeschlossen, so dass für hohe Frequenzen ein konstanter Wert für den Scheinwiderstand zu erwarten ist. Dies passt zu dem beobachteten asymptotischen Verhalten der Stromstärke.

Von den Schaltungen kommt damit nur die Schaltung B in Frage.

Alternativ lässt sich auch argumentieren, dass gemäß dem Graphen im Resonanzfall kein Strom fließt und die Impedanz folglich unendlich groß ist. Das passiert nur bei der Parallelschaltung von Spule und Kondensator (idealer Parallelschwingkreis). Damit muss Schaltung B korrekt sein.

Korrekte Antwort: *B*

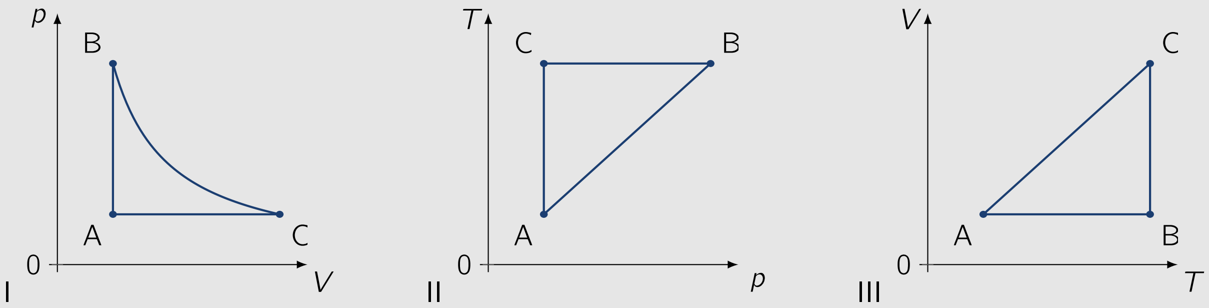
Aufgabe 7 Kreisprozess (MC-Aufgabe)

(2. Runde zur IPhO 2019)

Ein ideales Gas durchläuft einen Kreisprozess. Ausgehend von dem Zustand A wird es zunächst bei konstantem Volumen bis zu einem Zustand B erwärmt, anschließend expandiert es ohne Temperaturänderung bis zu einem Zustand C und wird schließlich isobar wieder zum Ausgangszustand A komprimiert.

Bezeichne mit p, V und T den Druck, das Volumen und die Temperatur des Gases.

Welche der nachfolgenden Graphen stellen den Kreisprozess korrekt dar?



A Nur die Graphen I und II.

B Nur die Graphen I und III.

C Nur die Graphen II und III.

D Alle drei Graphen.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Zustandsänderungen eines idealen Gases lassen sich mit der Zustandgleichung

$$pV \sim T \tag{7.1}$$

beschreiben. Betrachte die einzelnen Abschnitte des Kreisprozesses.

Abschnitt A-B: In diesem Abschnitt ist das Volumen V konstant und damit $T \sim p$. Diese Abhängigkeiten finden sich in allen drei Graphen.

Abschnitt B-C: In diesem Abschnitt ist die Temperatur T konstant und damit $p \sim \frac{1}{V}$. Diese Abhängigkeiten finden sich ebenfalls in allen drei Graphen.

Abschnitt C-A: Bei einer isobaren Zustandsänderung ist der Druck p konstant und damit $V \sim T$. Auch diese Abhängigkeiten sind in allen drei Graphen zu finden.

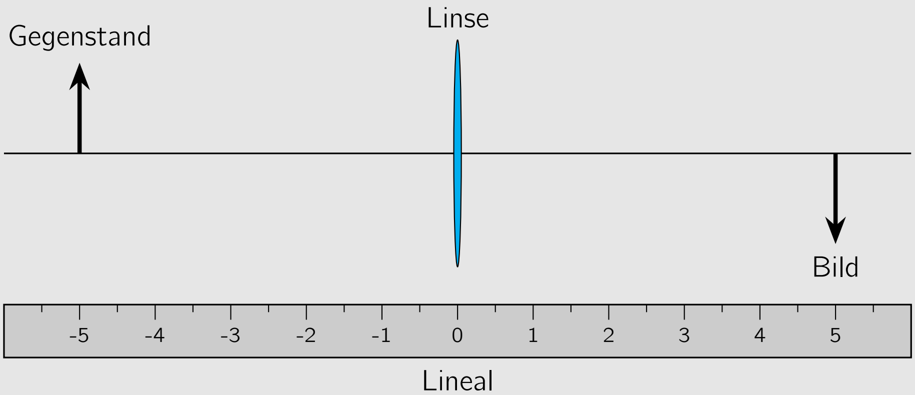
Damit stellen alle drei Graphen den Kreisprozess richtig dar.

Korrekte Antwort: *D*

Aufgabe 8 Verschobenes Bild

(1. Runde zur IPhO 2017)

Eine dünne Linse erzeugt, wie in der Abbildung gezeigt, ein Bild eines Gegenstandes.



Bestimme die Brennweite der Linse. Verwende dazu das eingezeichnete Lineal als Maßstab. Zeichne außerdem das entstehende Bild ein, wenn eine zweite, identische Linse direkt hinter die erste gestellt wird.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

In der beschriebenen Situation sind Gegenstandsweite g und Bildweite b gleich groß. Aus der Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{g} \tag{8.1}$$

folgt, dass die Gegenstandsweite der doppelten Brennweite entspricht[a]. Daher beträgt die Brennweite der Linse

$$\boxed{f = \frac{g}{2} = 2{,}5\,\text{Skalenteile}}\,. \tag{8.2}$$

Wenn eine zweite, dünne Linse direkt hinter die erste gestellt wird, addieren sich ihre Brechkräfte, d.h. die inversen Brennweiten. Die Brennweite f' des Linsensystems entspricht also der Hälfte der Brennweite f der Einzellinse. Damit besitzt der Gegenstand einen Abstand $4\,f'$ von dem Linsensystemund das Bild des Gegenstandes lässt sich z.B. mit Hilfe eines Mittelpunkt- und eines Parallelstrahles konstruieren (vgl. Abb. 1).

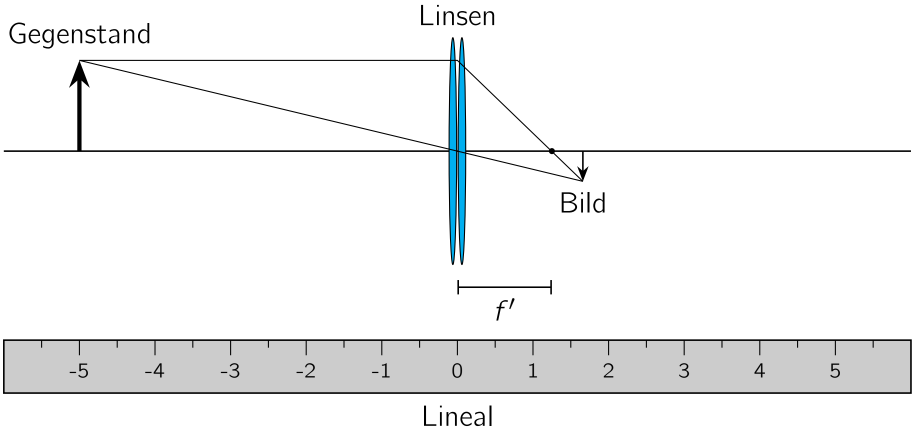


Abb. 1. *Skizze zur Konstruktion des Bildes bei Abbildung durch beide Linsen.*

[a] In diesem Fall ist der Abstand zwischen Objekt und Bild minimal. Schiebt man das Objekt näher an die Linse, wandert das Bild von der Linse weg und umgekehrt. Dabei nimmt der Abstand zwischen Objekt und Bild immer zu.

Aufgabe 9 Irgendwie verschoben

(1. Rd. zur IPhO 2023, Aufgabengruppe der PhysikOlympiade)

Eine dünne Sammellinse bildet einen 140,0 cm entfernten Gegenstand scharf auf einem Schirm ab, der in einer Entfernung von 16,8 cm hinter der Linse positioniert ist.

9.a) Bestimme die Brennweite der Linse.

Zwischen Linse und Schirm wird nun, wie in der Abbildung skizziert, eine 3,0 cm dicke, planparallele Glasplatte mit Brechungsindex $n = 1{,}50$ gebracht. Um wieder ein scharfes Bild auf dem Schirm zu erzeugen, wird dieser um eine Strecke Δb verschoben.

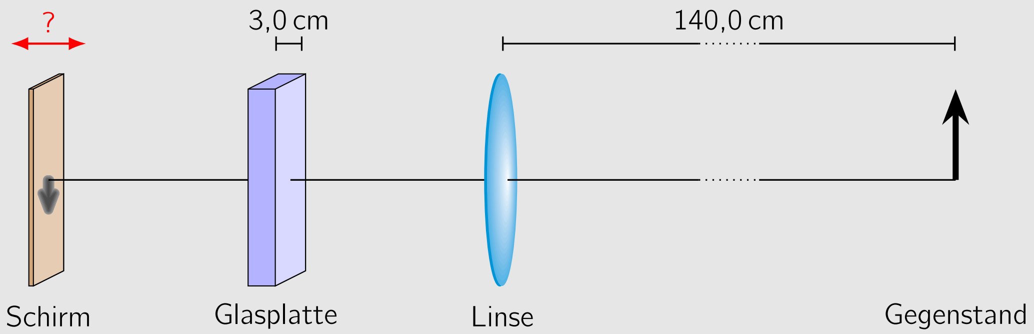


Abb. 2. *Nicht maßstabsgerechte Skizze des Aufbaus.*

9.b) Erkläre, welche Wirkung die Glasplatte auf einen nicht senkrecht einfallenden Lichtstrahl hat. Begründe damit, ob der Schirm zum Erzeugen eines scharfen Bildes näher an die Linse gerückt oder weiter von ihr entfernt werden muss.

9.c) Bestimme den Betrag Δb der notwendigen Verschiebung des Schirms.

Du kannst vereinfachend davon ausgehen, dass nur achsennahe Strahlen an dem Abbildungsprozess beteiligt sind.

Lösung

9.a) Rechnungen und Erläuterungen

Für dünne Linsen lässt sich die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{9.1}$$

verwenden. Dabei bezeichnen f die Brennweite, g die Gegenstands- und b die Bildweite bei der Abbildung. Im vorliegenden Fall ist $g = 140{,}0\,\mathrm{cm}$ und $b = 16{,}8\,\mathrm{cm}$. Durch Umstellen von (9.1) ergibt sich die Brennweite damit zu

$$\boxed{f = \frac{g\,b}{g+b} = 15{,}0\,\mathrm{cm}}\,. \tag{9.2}$$

9.b) Rechnungen und Erläuterungen

Fällt ein Lichtstrahl unter einem Lotwinkel $\alpha \neq 0$ auf die Glasplatte, so wird er an der vorderen Grenzfläche gebrochen. Der Lotwinkel β in der Glasplatte ergibt sich mit dem Brechungsindex n der Glasplatte aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz

$$\sin\alpha = n\,\sin\beta\,. \tag{9.3}$$

Der Brechungsindex von Luft wurde dabei zu 1,00 angenommen. Nach Durchgang durch die Glasplatte wird der Lichtstrahl an dem Übergang Glas-Luft erneut gebrochen. Der Lotwinkel des einfallenden Strahls beträgt nun β. Da der Übergang von Glas in Luft erfolgt, ergibt sich aus (9.3) für den Lotwinkel nach Austritt aus der Glasplatte erneut α. Der Lichtstrahl ist aber gegenüber dem einfallenden Lichtstrahl verschoben. In Abbildung 3 ist der Verlauf je eines Lichtstrahls mit $\alpha \neq 0$ und $\alpha = 0$ bei Durchquerung der Glasplatte dargestellt.

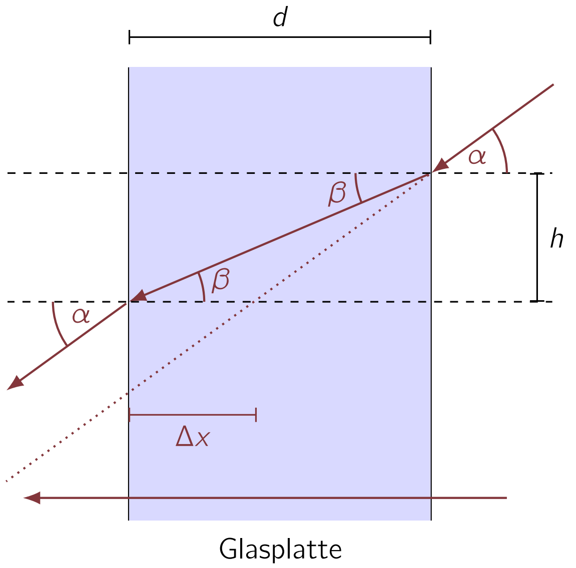


Abb. 3. *Skizze zur Verschiebung eines Lichtstrahls durch Glasplatte. Der Einfallswinkel ist für eine bessere Darstellung größer gewählt als bei einem achsennahen Strahl.*

Betrachte für die Konstruktion des Bildes hinter der Linse zwei Strahlen, die von dem gleichen Punkt des Objektes ausgehen. Zum einen den Strahl, der vor der Linse durch den Brennpunkt geht und zum anderen den Strahl, der vor der Linse parallel zur optischen Achse verläuft. Der erste Strahl verläuft hinter der Linse parallel zur optischen Achse. Damit trifft er unter dem Winkel $\alpha = 0$ auf die Glasplatte und wird dort nicht gebrochen. Der zweite Strahl trifft hinter der Linse unter einem Winkel $\alpha \neq 0$ auf die Glasplatte und wird, wie in Abbildung 3 skizziert, um eine Strecke Δx entlang der optischen Achse verschoben. Damit ist auch der Schnittpunkt der beiden Strahlen um die Strecke Δx weiter von der Linse entfernt als ohne Glasplatte, und der Schirm muss entlang der optischen Achse von der Linse weg verschoben werden, um ein scharfes Bild aufzufangen.

9.c) Rechnungen und Erläuterungen

Die Verschiebung Δx des Lichtstrahls entlang der optischen Achse in Abbildung 3 lässt sich folgendermaßen bestimmen: Für den Tangens des Winkels β gilt mit den Bezeichnungen in der Abbildung

$$\tan\beta = \frac{h}{d} \qquad \text{und damit} \qquad h = d\,\tan\beta\,. \tag{9.4}$$

Die gepunktet eingezeichnete Verlängerung des einfallenden Lichtstrahls schließt mit den beiden gestrichelten Lotlinien jeweils einen Winkel α ein. Für den Tangens dieses Winkels ist daher

$$\tan\alpha = \frac{h}{d-\Delta x} \qquad \text{und mit (9.4) folgt daraus} \qquad d-\Delta x = d\,\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\,. \tag{9.5}$$

Für achsennahe Strahlen sind die Winkel sehr klein und im Bereich weniger Grad. Daher ist in dieser Kleinwinkelnäherung der Tangens der Winkel ungefähr gleich dem Sinus der Winkel.

Für die Verschiebung entlang der optischen Achse ergibt sich damit

$$\Delta x = d\left(1 - \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right) \approx d\left(1 - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) = d\left(1 - \frac{1}{n}\right)\,. \tag{9.6}$$

Dabei wurde im letzten Schritt erneut das Brechungsgesetz (9.3) verwendet. Die Verschiebung ist also für achsennahe Strahlen unabhängig vom Einfallswinkel α. Damit werden durch die Glasplatte alle Lichtstrahlen um eine Strecke Δx entlang der optischen Achse verschoben und die gesuchte Verschiebung Δb des Bildes ist

$$\boxed{\Delta b = \Delta x \approx d\left(1 - \frac{1}{n}\right) \approx 1{,}0\,\mathrm{cm}}\,. \tag{9.7}$$

Aufgabe 10 Wettlauf zwischen Photon und Proton

(2. Rd. zur IPhO 2019, Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Richard Reindl & Thomas Hellerl)

Bei einer Supernova in Barnards Galaxie, einer Nachbargalaxie unserer Milchstraße, gehen ein Photon und ein Proton gleichzeitig auf die Reise zur Erde. Dort wird das Proton 72 Stunden später registriert als das Photon. Die Gesamtenergie des Protons beträgt $9{,}38\,\text{TeV} = 9{,}38 \cdot 10^{12}\,\text{eV}$.

10.a) Zeige, dass die Gesamtenergie des Protons etwa das 10.000-fache seiner Ruheenergie beträgt. *(3,0 Pkt.)*

10.b) Berechne, in welcher Entfernung von der Erde die Supernova stattfand. Gib dein Ergebnis in Lichtjahren an. *(5,0 Pkt.)*

10.c) Bestimme, wie lange die Reise des Protons in seinem Bezugssystem gedauert hat. *(2,0 Pkt.)*

Lösung

10.a)

Rechnungen und Erläuterungen

Bezeichne mit $E_0 = m_\text{p} c^2$ die Ruheenergie des Protons. Dann gilt für das Verhältnis γ der Energie E des Protons zu dessen Ruheenergie:

$$\boxed{\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{9{,}38\,\text{TeV}}{m_\text{p} c^2} = \frac{9{,}38 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot (3{,}00 \cdot 10^{8}\,\text{m}\,\text{s}^{-1})^2} = 9{,}99 \cdot 10^3 \approx 10^4}\,. \tag{10.1}$$

Die Gesamtenergie $E = \gamma\, m_\text{p} c^2$ des Protons beträgt also etwa das 10.000-fache von dessen Ruheenergie.

10.b)

Rechnungen und Erläuterungen

Die Geschwindigkeit v, mit der sich das Proton aus Sicht eines Beobachters auf der Erde bewegt, lässt sich aus dem γ-Faktor in (10.1) bestimmen. Es gilt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{und damit} \qquad v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx c\,(1 - 5{,}01 \cdot 10^{-9})\,. \tag{10.2}$$

Das Proton bewegt sich also beinahe mit Lichtgeschwindigkeit.

Bezeichne mit x den Abstand der Supernova zur Erde und mit $t = x/c$ die Zeit, die das Licht für das Zurücklegen dieser Strecke benötigt. Das Proton benötigt für die Strecke die Zeit $t + \Delta t$ mit $\Delta t = 72\,\text{h}$. Die Strecke x lässt sich damit ausdrücken durch

$$x = v\,(t + \Delta t) = v\,(\frac{x}{c} + \Delta t)\,. \tag{10.3}$$

Ergebnis für die Entfernung von der Erde in der die Supernova stattfand:

Umstellen von (10.3) ergibt für die gesuchte Entfernung

$$\boxed{x = \frac{v\,\Delta t}{1 - \frac{v}{c}} \approx c\,\frac{\Delta t}{1 - \frac{v}{c}} \approx 1{,}64 \cdot 10^6\,\text{Lj}}\,. \tag{10.4}$$

10.c)

Rechnungen und Erläuterungen

Die Zeit t', die während der Reise im Bezugsystem des Protons vergeht, beträgt aufgrund der Zeitdilatation

$$t' = \frac{t + \Delta t}{\gamma} \approx \frac{t}{\gamma}\,. \tag{10.5}$$

Ergebnis für die Dauer der Reise des Protons in seinem Bezugssystem:

Daraus folgt für die Reisedauer im Bezugsystem des Protons

$$\boxed{t' \approx \frac{t}{\gamma} \approx \frac{1{,}64 \cdot 10^6\,\mathrm{a}}{9{,}99 \cdot 10^3} = 164\,\mathrm{a}}\,. \tag{10.6}$$

Aufgabe 11 Grundlagen der Laserkühlung

(3. Rd. zur IPhO 2017, angelehnt an Aufgabe der IPhO 2009)

In dieser Aufgabe wird die Grundlage der Kühlung eines Gases mit Hilfe von Lasern untersucht.

Betrachte dazu ein Atom, das sich mit einer Geschwindigkeit v in eine Richtung bewegt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns bei der folgenden Betrachtung auch nur auf diese eine Dimension. Das Atom besitzt zwei innere Energiezustände und befindet sich anfänglich im Grundzustand. Die Energiedifferenz zwischen den beiden Zuständen beträgt $h\,f_0$.

Entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung des Atoms verläuft ein Laserstrahl der Frequenz f_{Ph}. Bei passender Wahl der Frequenz f_{Ph} kann das Atom ein Photon des Laserstrahls absorbieren und anschließend spontan emittieren. Dabei geschieht die Emission mit gleicher Wahrscheinlichkeit mit oder entgegen der Bewegungsrichtung des Atoms.

Nimm im Folgenden an, dass die Geschwindigkeit v sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c ist und dass der Impuls des Atoms sehr viel größer als der Impuls eines einzelnen Photons ist.

11.a) Bestimme die mittlere Änderung der kinetischen Energie des Atoms im Laborsystem, wenn dieses ein Photon absorbiert und anschließend wieder emittiert. Berechne auch die mittlere Änderung der Geschwindigkeit des Atoms in einem solchen Prozess.

Bei der Laserkühlung von Atomen wird nun zusätzlich ein Laserstrahl in Richtung der Geschwindigkeit des Atoms verwendet, dessen Photonen ebenfalls die Frequenz f_{Ph} besitzen. Eine genaue Untersuchung des Kühlmechanismus ist aufwändiger. Die vorangehende Untersuchung erlaubt es dir aber, das Grundprinzip der Laserkühlung zu verstehen.

11.b) Erläutere qualitativ, wie die beschriebene Anordnung zur Kühlung, also zur Abbremsung, von Atomen verwendet werden kann. Gib dabei auch an, ob die Frequenz f_{Ph} der Photonen größer, kleiner oder gleich der Anregungsfrequenz f_0 der Atome gewählt werden muss.

Lösung

11.a) Rechnungen und Erläuterungen

Die Frequenz das aus der Bewegungsrichtung einfallenden Photons beträgt im Bezugsystem des Atoms aufgrund des Dopplereffektes

$$f'_{\mathrm{Ph}} = f_{\mathrm{Ph}} \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} = f_{\mathrm{Ph}} \frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx f_{\mathrm{Ph}} \left(1+\frac{v}{c}\right) \stackrel{!}{=} f_0 \,. \tag{11.1}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gibt die notwendig Bedingung für eine Absorption an.

Durch die Absorption überträgt das Photon auch seinen Impuls auf das Atom. Die Geschwindigkeit w des Atoms nach der Absorption beträgt aufgrund des Impulserhaltungssatzes

$$w = v - \frac{h\,f_{\mathrm{Ph}}}{m\,c} \,. \tag{11.2}$$

Wird nun das von dem Atom absorbierte Photon wieder emittiert, so kann dies entgegen oder in Bewegungsrichtung passieren. Die resultierende Photonenfrequenz im Laborsystem bei Emission entgegen der Bewegungsrichtung des Atoms ist gegeben durch

$$f_{\mathrm{Ph},-} = f_0 \left(1 - \frac{w}{c}\right) \approx f_{\mathrm{Ph}} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{h\, f_{\mathrm{Ph}}}{m\, c^2}\right) \approx f_{\mathrm{Ph}}\,. \tag{11.3}$$

Der Term $\frac{h\, f_{\mathrm{Ph}}}{m\, c^2}$ in der hinteren Klammer lässt sich umschreiben zu $\frac{h\, f_{\mathrm{Ph}}}{m\, v\, c} \cdot \frac{v}{c}$. Er ist also gleich dem Produkt der als klein anzunehmenden Größen und kann daher, genau wie der Term $\frac{v^2}{c^2}$, vernachlässigt werden.

Bei Emission in Bewegungsrichtung muss das „$-$“ in der ersten Klammer in ein „$+$“ verändert werden, so dass

$$f_{\mathrm{Ph},+} = f_0 \left(1 + \frac{w}{c}\right) \approx f_{\mathrm{Ph}} \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 \approx f_{\mathrm{Ph}} \left(1 + 2\,\frac{v}{c}\right)\,. \tag{11.4}$$

Die mittlere Änderung ΔE der kinetischen Energie des Atoms ergibt sich aus der Differenz der Photonenenergien zu

$$\boxed{\Delta E = \frac{h}{2}\left(f_{\mathrm{Ph}} - f_{\mathrm{Ph},+} + f_{\mathrm{Ph}} - f_{\mathrm{Ph},-}\right) \approx -h\, f_{\mathrm{Ph}}\, \frac{v}{c}}\,. \tag{11.5}$$

Die mittlere Änderung der Geschwindigkeit des Atoms ergibt sich aus dem mittleren Impulsübetrag zu

$$\boxed{\Delta v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{h}{2\, m\, c}\left(-f_{\mathrm{Ph}} - f_{\mathrm{Ph},+} - f_{\mathrm{Ph}} + f_{\mathrm{Ph},-}\right) \approx -\frac{h\, f_{\mathrm{Ph}}}{m\, c}}\,. \tag{11.6}$$

11.b) Rechnungen und Erläuterungen

In einem Gas ist die Geschwindigkeit der Atome zufällig orientiert. Daher ist es zur Kühlung nicht ausreichend, einen Laser nur von einer Seite einstrahlen zu lassen. Wenn die Frequenz der einstrahlenden Photonen leicht unterhalb der Resonanzfrequenz der Atome liegt, dann kann ein Atom nach dem oben beschriebenen Mechanismus von entgegenkommenden Photonen abgebremst werden, während die Photonen, die in Bewegungsrichtung einstrahlen, aufgrund des Dopplereffektes nicht die passende Frequenz für eine Resonanz besitzen und daher nicht absorbiert werden. Insgesamt können damit Atome durch eine solche Anordnung gekühlt werden.

Hinweis:

Wenn die Dopplerverschiebung der Photonenfrequenzen nicht berücksichtigt wird, ergibt sich das gleiche Ergebnis für die Energie- und Impulsänderung. Dieses Vorgehen verletzt aber die Energieerhaltung. Bei der korrekten Betrachtung führt die vom Atom verlorene kinetische Energie zu einer Erhöhung der Photonenenergie, so dass die Energie erhalten bleibt.

Aufgabe 12 Fadenpendel

(Begleitheft der 1. Runde zur 50. IPhO 2019)

Aus einem dünnen Faden und einem kleinen Gewicht, wie zum Beispiel einer Schraube oder Mutter, lässt sich ein einfaches Fadenpendel bauen. Wenn die Ausdehnung des Gewichtes sehr klein gegenüber der Fadenlänge ℓ ist, gilt für die Schwingungsdauer T des Pendels bei kleinen Auslenkungen

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,.$$

Dabei bezeichnet g die Schwerebeschleunigung auf der Erde. Theoretisch sollte damit T^2 eine lineare Funktion der Fadenlänge ℓ sein.

Die folgende Tabelle stellt in einem Experiment gemessene Werte der Schwingungsperioden T zusammen mit der gemittelten Schwingungsperiode $\bar{T}$ und dem Quadrat dieser Größe dar.

Fadenlänge	Zeit für 10 Schwingungsperioden					Mittelwert	
ℓ / cm	$10\,T$ / s					$\bar{T}$ / s	$\bar{T}^2$ / s^2
67,2	16,62	16,87	15,43	17,50	17,61	1,68	2,82
55,5	15,12	13,94	16,18	15,04	15,53	1,51	2,29
47,0	13,79	12,60	13,37	14,41	14,80	1,38	1,90
34,5	11,93	13,02	10,77	12,18	11,72	1,19	1,42
22,0	9,50	11,44	9,24	9,59	8,73	0,97	0,94
13,4	7,91	6,38	8,32	8,91	7,89	0,79	0,62

Überprüfe mit Hilfe eines geeigneten Graphen, ob die experimentellen Daten zu dem theoretisch erwarteten Verlauf passen und bestimme den Wert der Schwerebeschleunigung g.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Abbildung 4 zeigt die quadrierte mittlere Schwingungsdauer $\bar{T}^2$ in Abhängigkeit von der Fadenlänge. Da die Ausgleichsgerade die Messwerte sehr gut approximieren, passen die Messergebnisse zu der theoretisch erwarteten linearen Abhängigkeit. Allerdings verläuft die Ausgleichsgerade nicht durch den Ursprung. Die lässt sich durch die endliche Ausdehnung der Mutter und eine daraus resultierende

Abweichung zwischen Fadenlänge und Pendellänge erklären.

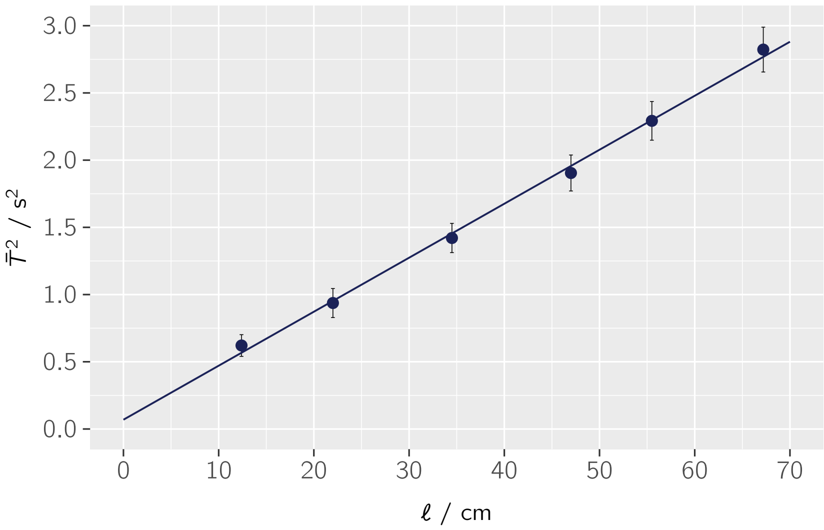


Abb. 4. *Graph der quadrierten mittleren Schwingungsdauer $\bar{T}^2$ des Fadenpendels als Funktion der Fadenlänge ℓ mit Ausgleichsgerade. Die Unsicherheiten bei der Fadenlänge sind sehr gering und wurden nicht mit eingezeichnet.*

Aus der Steigung $b \approx (4{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{s^2\,m^{-1}}$ der Ausgleichsgeraden lässt sich mit der in der Aufgabenstellung angegebenen Formel die Schwerebeschleunigung auf der Erde bestimmen zu

$$\boxed{g = \frac{4\,\pi^2}{b} \approx (9{,}9 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m\,s^{-2}}}\,. \tag{12.1}$$

Dieser Wert stimmt gut mit dem gemeinhin benutzten Wert von $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ überein. Der Fehler in der Steigung wurde dabei über andere, mit den Fehlern der Messwerte vereinbare, Ausgleichsgeraden abgeschätzt.