Stand: 11. Juli 2025

Aufgabe - Feldlinien **(6.0 Pkt.)**

(4. Rd. zur IPhO 2025, Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Lukas Hellmann)

Zwei Punktladungen mit Ladungen $q_1 = -3\,e$ und $q_2 = +e$ befinden sich in einem festen Abstand voneinander. In der Abbildung sind Ausschnitte von vier elektrischen, in der Papierebene verlaufenden Feldlinien eingezeichnet.

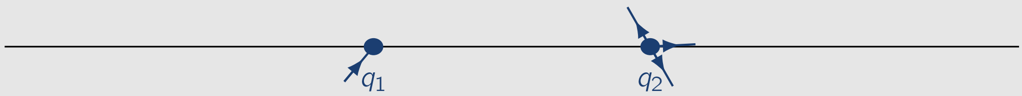

Abb. 1. *Skizze der Anordnung der Ladungen mit Ausschnitten von vier Feldlinien.*

1.a) Skizziere den Verlauf der vier Feldlinien im gesamten abgebildeten Bereich. *(2.0 Pkt.)*

1.b) Berechne den Winkel zur Verbindungslinie der Ladungen, unter dem die bei der Ladung q_2 nahezu direkt nach rechts verlaufende Feldlinie auf die Ladung q_1 trifft. *(2.5 Pkt.)*

1.c) Berechne den analogen Winkel für den allgemeineren Fall $q_2 = e$ und $q_1 = -\,n\,e$ mit $n \in \mathbb{N}$. *(1.5 Pkt.)*

Lösung

1.a) Die elektrischen Feldlinien weisen folgende Eigenschaften auf:

- An jedem Punkt einer Feldlinien verläuft die Linie in Richtung des elektrischen Feldes an dem Punkt.
- Die Feldlinien schneiden sich daher nicht.
- Die Feldlinien haben daher einen glatten Verlauf.
- die Feldlinien sind dichter in Bereichen, in denen das elektrische Feld stärker ist.

- Von der positiven Ladung weg verlaufende Feldlinien krümmen sich in Richtung der negativen Ladung.
- Entsprechend sind zur negativen Ladung einlaufende Feldlinien, wenn sie rückwärts durchlaufen werden, in Richtung der positiven Ladung gekrümmt.
- Sehr nah an jeder der beiden Ladungen verlaufen die Feldlinien annähernd so, als würden sie nur von dieser Ladung hervorgerufen.
- In Entfernungen, die sehr groß im Vergleich zum Abstand der Ladungen sind, ähneln die Feldlinien denen einer Punktladung mit Ladung $q_1 + q_2 = -2\,e$. Die Konfiguration ist eine Ladungssenke. Folglich muss es Feldlinien geben, die auf q_1 enden, aber nicht in q_2 starten. Es sind damit nicht alle Feldlinien im Endlichen geschlossen.

Mit diesen Konstruktionsprinzipien lassen sich die Feldlinien qualitativ skizzieren.

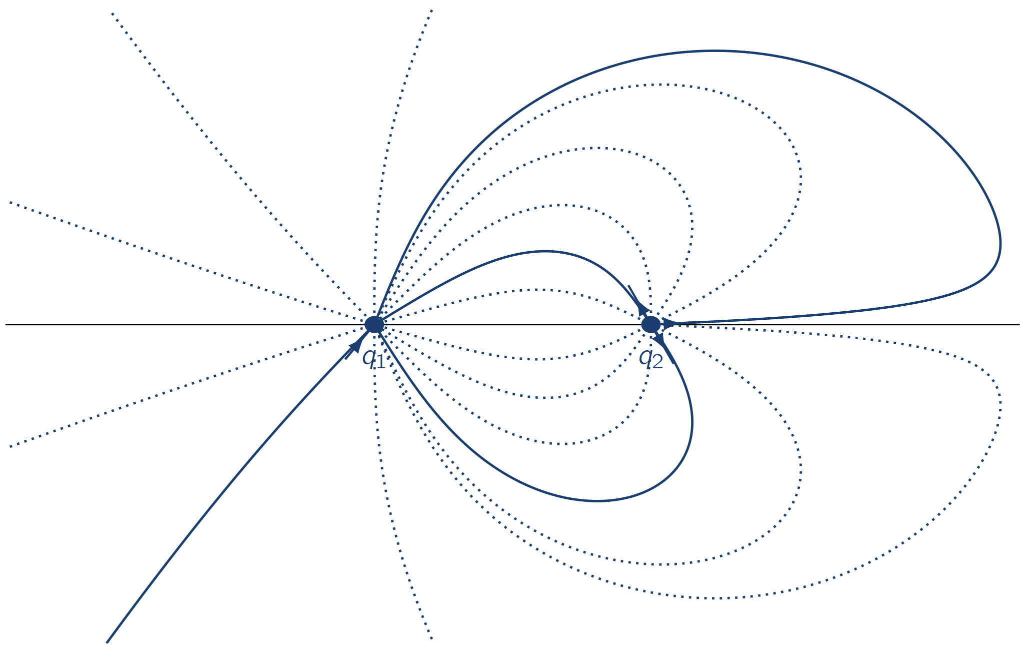

Abb. 2. *Skizze der Anordnung der Ladungen mit numerisch bestimmten Feldlinien. Neben den gesuchten Feldlinien sind gepunktet weitere Linien eingezeichnet.*

1.b) Um den Winkel zu bestimmen, unter dem die Feldlinie auf die negative Ladung trifft, sind mindestens zwei Möglichkeiten denkbar:

Lösungsvariante 1: Durch qualitative Überlegung

Da das elektrische Feld in der Nähe der Ladung q_1 von dieser Ladung dominiert wird, treffen die Feldlinien radial und homogen verteilt auf die Punktladung q_1. Wie in dem vorigen Aufgabenteil bemerkt, muss es darunter Feldlinien geben, die auf q_1 treffen, jedoch nicht von der Ladung q_2 ausgehen. Da alle Feldlinien, von q_1 rückwärts durchlaufen, in Richtung q_2 gekrümmt sind und sich die Feldlinien nicht schneiden, gehen Feldlinien von q_1 aus betrachtet, nur aus einem bestimmten Raumwinkelbereich von der Ladung q_2 aus, die übrigen nicht. Dieser Raumwinkelanteil wird durch die relative Ladungsdifferenz der beiden Ladungen bestimmt.

Bezeichne mit Ω den Raumwinkelbereich, unter dem auf q_1 treffende Feldlinien von q_2 ausgehen. Dann gilt, sofern q_1 und q_2 unterschiedliche Vorzeichen tragen und $|q_1| \geq |q_2|$ ist:

$$\Omega = 4\,\pi \left(1 - \left|\frac{q_1 + q_2}{q_1}\right|\right) = 4\,\pi \left|\frac{q_2}{q_1}\right|. \tag{1.1}$$

Im vorliegenden Fall ist $\Omega = \frac{4}{3}\,\pi$.

Die von q_2 nahezu nach rechts verlaufende Feldlinie begrenzt in guter Näherung den eben bestimmten Raumwinkelbereich. Der Winkel θ zur Verbindungslinie der beiden Ladungen unter dem sie auf die Ladung q_1 trifft, lässt sich daher aus dem Raumwinkel Ω bestimmen. Es ist:

$$\frac{4}{3}\,\pi = \Omega = \int_0^\theta \mathrm{d}\theta' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sin\theta = 2\,\pi\,(1-\cos\theta)\,. \tag{1.2}$$

Daraus folgt für den gesuchten Winkel

$$\boxed{\theta = \arccos\left(1 - \frac{\Omega}{2\,\pi}\right) = \arccos\frac{1}{3} \approx 71^\circ}\,. \tag{1.3}$$

Lösungsvariante 2: Mit Hilfe des Gaussschen Satzes

Betrachte eine nicht geschlossene Kurve, die entlang der gesuchten Feldlinie verläuft, nah der Ladungen aber den Abschnitt eines Kreises um die jeweilige Ladung bildet und zwar so, dass die Kurve die Verbindungslinie der Ladungen berührt (vgl. Abb. 3).

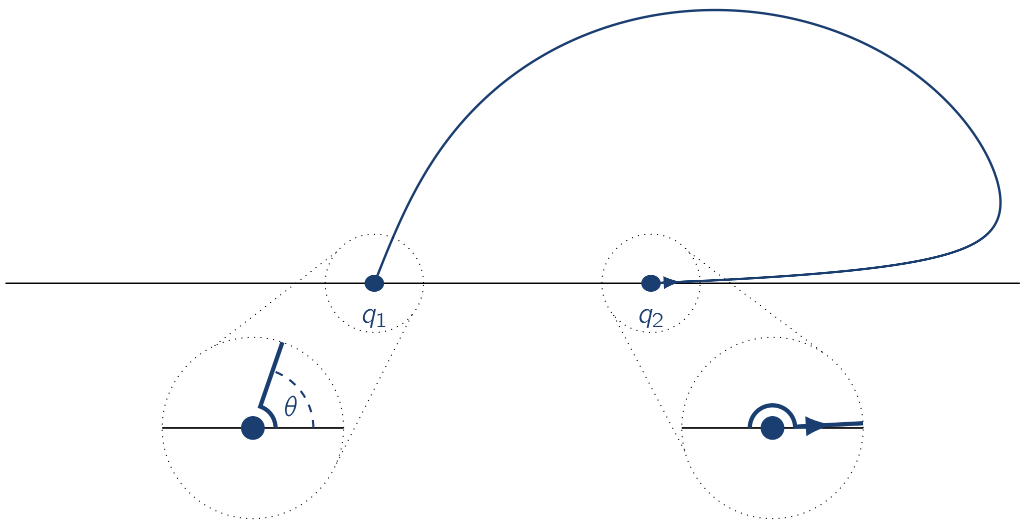

Abb. 3. *Anordnung der Ladungen mit beschriebener Kurve.*

Rotiere diese Kurve nun um die Verbindungslinie der Ladungen. Dadurch entsteht eine Rotationsfläche, die keine Ladungen beinhaltet, so dass das Oberflächenintegral über das elektrische Feld nach dem Gaussschen Satz verschwinden muss. Da die Kurve dem elektrischen Feld folgt und damit die Feldlinien auf dem größten Teil der Oberfläche parallel zur Oberfläche, also senkrecht zum Normalenvektor sind, trägt nur der Bereich sehr nah an den Punktladungen zu dem Oberflächenintegral bei. Dort entspricht das Feld dem einer Punktladung und ist parallel zur Oberflächennormalen. Die Beiträge zum Oberflächenintegral bei den beiden Punktladungen müssen sich genau aufheben. Bei q_2 ist dieser Beitrag proportional zu $4\,\pi\,q_2$ und bei q_1 zu $\Omega\,q_1$ mit gleichen Proportionalitätskonstanten. Gleichsetzen mündet in einen zum ersten analogen Lösungsweg.

1.c) Die Ausdrücke (1.1) und (1.3) erlauben eine direkte Übertragung auf den allgemeineren Fall. Es ergibt sich für den gesuchten Winkel

$$\boxed{\theta(n) = \arccos\left(1 - \frac{\Omega(n)}{2\,\pi}\right) = \arccos\left(1 - 2\left|\frac{q_2}{q_1}\right|\right) = \arccos\left(\frac{n-2}{n}\right)}\,. \tag{1.4}$$

Bewertung - Feldlinien		Punkte
1.a)	Skizzieren von vier sinnvollen Feldlinien (je 0.5 P.) *globale Punktabzüge für Feldlinien: schneidend -0.5, nicht glatt -0.5, keine offenen Feldlinien -0.5*	2.0
1.b)	Formulieren einer Idee zur Bestimmung des Winkels	1.0
	Ableiten eines Zusammenhanges zwischen dem Raumwinkel und den Ladungen (1.1)	0.5
	Ableiten eines Zusammenhanges zwischen dem Raumwinkel und dem gesuchten Winkel (1.2)	0.5
	Bestimmen des gesuchten Winkels (1.3)	0.5
1.c)	Übertragen der Raumwinkelzusammenhänge auf den allgemeinen Fall	1.0
	Aufstellen des korrekten Zusammenhanges (1.4)	0.5
		6.0

Hinweise zur Bewertung:

- a) Für die Feldlinie, die fast waagerecht in q_2 trifft, wird vergeben: 0 Punkte wenn sie offen ist. 0 Punkte wenn sie waagerecht in q_1 trifft, 0.2 Punkte wenn sie fast waagerecht eintrifft, 0.3 Punkte wenn sie schräg von links eintrifft, 0.4 wenn sie senkrecht eintrifft, 0.5 Punkte wenn sie schräg von rechts eintrifft.
- Wenn im zweiten Aufgabenteil schon eine allgemeine Betrachtung geführt wurde, wird der erste Punkt für den letzten Aufgabenteil dafür vergeben.
- Wird eine falsche Herleitung aus b) korrekt verallgemeinert, wird in c) nur ein Punkt vergeben.
- Wird die korrekte Idee in 2 statt 3 Dimensionen berechnet, wird ein Punkt abgezogen.