Aufgabe - Schwingende Linse (7.0 Pkt.)

(3. Rd. zur IPhO 2024, Idee: Martin Lüders)

In der Mitte zwischen zwei kleinen, identischen Lichtquellen befindet sich eine Linse, deren optische Achse mit der Verbindungslinie der Lichtquellen zusammenfällt. Die Lichtquellen strahlen jeweils isotrop mit einer Leistung P und besitzen, wie untenstehend skizziert, einen Abstand $2\,\ell$ voneinander.

Die Linse ist entlang der optischen Achse beweglich gelagert. Sie besitzt eine Masse m, eine Brennweite f und einen Durchmesser d mit $d \ll f \ll 2\,\ell$. Lenkt man die Linse ein kleines Stück entlang der optischen Achse aus, beginnt sie zu schwingen.

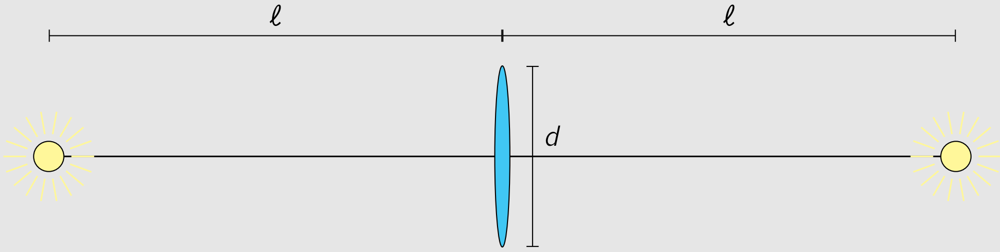

Abb. 1. *Skizze zur schwingenden Linse.*

Bestimme die Periodendauer dieser Schwingung unter der Annahme, dass kein Licht an der Linse reflektiert wird.

Lösung

Da $\ell \gg f \gg d$ ist, treffen die Strahlen von den Lichtquellen nahezu als Parallelstrahlen auf die Linse und werden hinter der Linse im Brennpunkt fokussiert. Dabei ist der Winkel φ, um den ein Lichtstrahl durch die Linse abgelenkt wird, interessant. Dieser hängt vom Abstand r des Auftreffpunkts auf die Linse von der optischen Achse ab. Dabei gilt

$$\varphi(r) = \arcsin\frac{r}{f} \approx \arctan\frac{r}{f} \approx \frac{r}{f}\,. \tag{1.1}$$

Der Impuls eines Photons beträgt $p = \frac{E}{c}$. Der Betrag des Impulses bleibt auch bei der Brechung gleich, jedoch ändert sich seine Richtung. Dabei ist für die Schwingung nur die Komponente in Richtung der optischen Achse interessant, da diese für eine resultierende Kraft verantwortlich ist (die dazu senkrechte Komponente hebt sich weg, da das Objekt rotationssymmetrisch ist). Für die Änderung Δp des Impulses entlang der optischen Achse aufgrund der Brechung gilt:

$$\Delta p(r) = p - p \cdot \cos\varphi(r)\,. \tag{1.2}$$

Damit ist

$$\frac{\Delta p(r)}{p} = 1 - \cos\varphi(r) \approx \frac{\varphi(r)^2}{2} \approx \frac{r^2}{2\,f^2}\,. \tag{1.3}$$

Die von einer der Lichtquellen in der Zeit Δt auf einen dünnen Ring der Breite $\mathrm{d}r$ auf der Linse, der den Abstand r zum Zentrum hat, einfallende Strahlungsenergie beträgt

$$\mathrm{d}E = \frac{2\,\pi\,r\,\mathrm{d}r\,P\,\Delta t}{4\,\pi\,\ell^2}\,, \qquad \text{und damit ist} \qquad \mathrm{d}p = \frac{r\,P\,\Delta t}{2\,\ell^2\,c}\,\mathrm{d}r. \tag{1.4}$$

Dabei wurde für den Abstand zwischen Lichtquelle und Linse der Wert ℓ angenommen. Die Kraft auf diesen Ring durch eine Lichtquelle bestimmt sich aus der Änderung des Impulses

$$\mathrm{d}F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \approx \frac{\mathrm{d}p}{\Delta t}\,\frac{r^2}{2\,f^2} = \frac{2\,\pi\,r\,\mathrm{d}r\,P}{4\,\pi\,\ell^2\,c}\,\frac{r^2}{2\,f^2} = \frac{r^3\,P}{4\,\ell^2\,c\,f^2}\,\mathrm{d}r\,. \tag{1.5}$$

Für die gesamte Linse ergibt sich somit

$$F = \int_0^{\frac{d}{2}} \mathrm{d}r\,\frac{r^3\,P}{4\,\ell^2\,c\,f^2} = \frac{d^4\,P}{256\,\ell^2\,c\,f^2}\,. \tag{1.6}$$

Genau in der Mitte zwischen den beiden Lichtquellen sind die Kräfte von beiden Seiten gleich. Lenkt man die Linse jedoch aus diesem Gleichgewichtszustand aus, verändert sich deren Abstand zu den Lichtquellen und es ergibt sich eine resultierende Kraft $\Delta F(x)$ wobei x die Auslenkung bezeichnet.

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= \frac{d^4\,P}{256\,c\,f^2}\left(\frac{1}{(\ell+x)^2} - \frac{1}{(\ell-x)^2}\right)\\ &= -\frac{d^4\,P}{256\,c\,f^2}\,\frac{4\,\ell\,x}{(\ell^2-x^2)^2}\\ &\approx -x\,\frac{d^4\,P}{64\,c\,f^2\,\ell^3}\,.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Dies entspricht für kleine Auslenkungen x also einem harmonischen Ozilator mit Periodendauer

$$\boxed{T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{64\,c\,f^2\,\ell^3\,m}{d^4\,P}} = 2\,\pi\,\frac{8\,f\,\ell}{d^2}\,\sqrt{\frac{c\,\ell\,m}{P}}}\,. \tag{1.8}$$

Bewertung - Schwingende Linse		**Punkte**
1	Betrachten parallel einfallender Strahlen und Kleinwinkelnäherung	0.5
	Verwenden des Photonenimpulses und Erkennen, dass Betrag konstant bleibt	1.0
	Bestimmen der Impulsänderung eines Lichtstrahls durch Brechung (1.2)	1.0
	Angeben der von einer Lichtquelle auf die Linse treffenden Strahlungsenergie	0.5
	Betrachten der Kraft auf einen dünnen Linsenring (1.5)	1.0
	Ausrechnen der Kraft durch eine einzelne Lichtquelle in Ruhelage (1.6)	1.0
	Bestimmen der Gesamtkraft bei kleiner Auslenkung (1.7)	1.0
	Erkennen der harmonischen Schwingung und Angeben der Schwingungsdauer (1.8)	1.0
		7.0