Auswahlwettbewerb zur Internationalen PhysikOlympiade

Stand: 11. Juli 2025

Aufgabe - Zaubertrick (7.0 Pkt.)

(4. Rd. zur IPhO 2024, Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Auf einem runden Tisch mit Radius R liegt eine ebenfalls runde Tischdecke, die genau so groß ist wie die Tischfläche. Genau in der Mitte des Tisches steht eine kleine Vase der Masse m. Die Ausdehnung der Vase soll vernachlässigt werden.

Ein ambitionierter Zauberlehrling zieht die Tischdecke schwungvoll, mit konstanter Geschwindigkeit v in radiale Richtung. Er schafft es, die Decke vom Tisch zu ziehen, ohne dass die Vase vom Tisch rutscht.

Der Gleitreibungskoeffizient zwischen der Vase und der Tischdecke sei μ_D und der zwischen der Vase und der Tischoberfläche μ_T. Bezeichne mit $x \cdot R$, die Strecke, die sich die Vase bis zu dem Moment bewegt hat, in dem die Tischdecke vollständig unter ihr herausgezogen wurde.

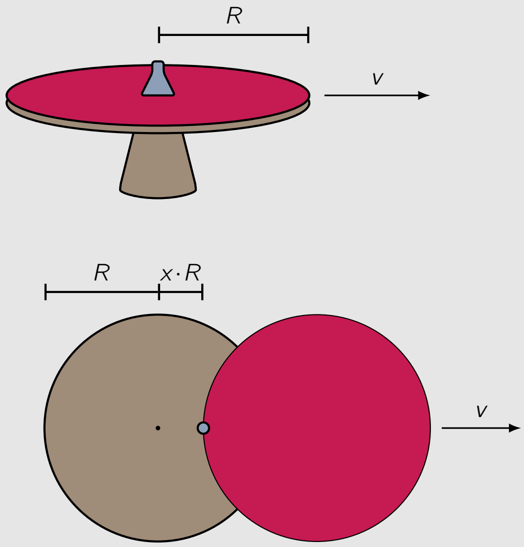

Abb. 1. *Skizze des Tisches mit der Vase zu Beginn des Tricks (oben) und als Draufsicht in dem Moment, in dem die Vase von der Tischdecke rutscht (unten).*

1.a) Leite eine Bedingung für x in Abhängigkeit von m, R, μ_D sowie μ_T ab, die erfüllt sein muss, damit die Vase nicht vom Tisch fällt. *(2.0 Pkt.)*

1.b) Bestimme einen Ausdruck für die minimal notwendige Geschwindigkeit v_{min}, mit der die Decke vom Tisch gezogen werden muss, damit der Trick gelingt. Berechne den Wert von v_{min} für $R = 30\,\mathrm{cm}$, $\mu_D = 0{,}2$ und $\mu_T = 0{,}4$. *(3.0 Pkt.)*

1.c) Bestimme einen Ausdruck für die Geschwindigkeit v_{Vase}, die die Vase maximal erreicht, wenn an der Tischdecke mit einer Geschwindigkeit $v \geq v_{min}$ gezogen wird sowie für den Abstand d von der Tischmitte, in dem die Vase bei dem Trick zum Stehen kommt. *(2.0 Pkt.)*

Lösung

Damit der Trick gelingt, müssen drei Bedingungen erfüllt sein:

- Erstens muss die Tischdecke so schnell gezogen werden, dass die anfänglich ruhende Vase ins Rutschen gerät. Dazu muss die Beschleunigung der Tischdecke größer sein als die durch die maximale Haftreibung mögliche Beschleunigung der Vase. Das kann in dieser Aufgabe vorausgesetzt werden, da die Tischdecke abrupt mit einer konstanten Geschwindigkeit unter der Vase weggezogen wird.
- Zweitens darf die Vase durch das Rutschen auf der Tischdecke nicht so weit beschleunigt werden, dass sie genau so schnell wird, wie die Tischdecke. Ansonsten würde die Vase aufgrund der Haftreibung auf der Tischdecke stehen bleiben und mit dieser vom Tisch gezogen werden.
- Drittens muss die Vase so rechtzeitig von der Tischdecke rutschen, dass sie auf dem Rest des Tisches noch zum Stehen kommt. Dafür darf der Wert von x nicht zu groß werden.

Im ersten Aufgabenteil wird ausschließlich die dritte Bedingung untersucht, da nach der Aufgabenstellung davon ausgegangen werden kann, dass das Tischtuch vollständig unter der Vase herausgezogen wird. Im zweiten Aufgabenteil wird dann gezeigt, dass, sofern es ein $x \in (0, 1)$ gibt, zu dem die Vase von der Tischdecke rutscht, die Geschwindigkeit der Vase immer kleiner bleibt als die der Tischdecke, so dass auch die zweite Bedingung erfüllt ist.

1.a) Da der Trick gelingt, kann davon ausgegangen werden, dass die Vase auf der Tischdecke stets rutscht. Die Reibungskräfte F_D und F_T, die beim Rutschen über die Tischdecke bzw. über den Tisch auf die Vase wirken, sind unabhängig von der Rutschgeschwindigkeit und gegeben durch:

$$F_\mathrm{D} = \mu_\mathrm{D}\, m\, g \qquad \text{und} \qquad F_\mathrm{T} = -\mu_\mathrm{T}\, m\, g\,, \tag{1.1}$$

wobei positive Kräfte radial nach außen zeigen.

Wenn die Vase das Ende der Tischdecke erreicht, wurde sie über eine Strecke $x\,R$ mit der Kraft F_D beschleunigt. Sie besitzt also beim Runterrutschen von der Tischdecke die kinetische Energie[1] $x\,R\,F_\mathrm{D}$. Diese kinetische Energie muss innerhalb der verbleibenden Rutschstrecke $(1-x)\,R$ bis zum Rand des Tisches durch die Reibung auf der Tischoberfläche dissipiert werden, damit die Vase nicht vom Tisch fällt. Es muss daher gelten:

$$x\,R\,F_\mathrm{D} = x\,R\,\mu_\mathrm{D}\,m\,g \leq (1-x)\,R\,\mu_\mathrm{T}\,m\,g \qquad \text{und damit} \qquad \boxed{x \leq \frac{\mu_\mathrm{T}}{\mu_\mathrm{T}+\mu_\mathrm{D}}}\,. \tag{1.2}$$

Je kleiner der Reibungskoeffizient μ_D im Vergleich zu μ_T ist, desto geringer ist also die für das Abbremsen notwendige Strecke auf dem Tisch und desto näher am Rand des Tisches kann die Vase von der Tischdecke rutschen. Für $\mu_\mathrm{D} = \mu_\mathrm{T}/2$ muss die Tischdecke zum Beispiel spätestens bei zwei Drittel des Tischradius vollständig unter der Vase herausgezogen sein.

1.b) Wir untersuchen zunächst, unter welchen Bedingungen die Vase von der Tischdecke rutscht und nehmen an, dass es eine Zeit t nach dem Beginn des Ziehens gibt, zu der die Tischdecke gerade vollständig unter der Vase herausgezogen worden ist. Die Tischdecke wurde in dieser Zeit eine Strecke $(1+x)\,R$ mit der konstanten Geschwindigkeit v gezogen. Die Vase hat in dieser Zeit eine Strecke $x\,R$ in gleichförmig beschleunigter Bewegung mit der Beschleunigung $\mu_\mathrm{D}\,g$ zurückgelegt. Es müssen daher die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$v\,t = (1+x)\,R \qquad \text{sowie} \qquad \frac{1}{2}\,\mu_\mathrm{D}\,g\,t^2 = x\,R\,. \tag{1.3}$$

Die linke Gleichung in die rechte eingesetzt ergibt:

$$x\,R = \frac{\mu_\mathrm{D}\,g\,R^2}{2\,v^2}\,(1+x)^2 \qquad \text{bzw. nach Umformung} \qquad x^2 - 2\,x\left(\frac{v^2}{\mu_\mathrm{D}\,g\,R} - 1\right) + 1 = 0\,. \tag{1.4}$$

Dieser quadratische Gleichung für x wird gelöst durch

$$\boxed{x = \frac{v^2}{\mu_\mathrm{D}\,g\,R} - 1 \pm \sqrt{\frac{v^2}{\mu_\mathrm{D}\,g\,R}\left(\frac{v^2}{\mu_\mathrm{D}\,g\,R} - 2\right)} = 2\,\kappa^2 \pm \sqrt{4\,\kappa^2\,(\kappa^2-1)} - 1}\,, \tag{1.5}$$

wobei im letzten Schritt $\kappa^2 := \frac{v^2}{2\,\mu_\mathrm{D}\,g\,R}$ eingeführt wurde. κ ist das Verhältnis der Geschwindigkeit der Tischdecke zu der Geschwindigkeit, die die Vase erreichen würde, wenn Sie von der Mitte

[1] Die kinetische Energie der Vase ist nicht gleich der Arbeit $(1+x)\,R\,F_\mathrm{D}$, die beim Ziehen an der Tischdecke gegen die Reibungskraft der Vase verrichtet wird, da die Reibung die kinetische Energie nicht erhält.

aus über den gesamten Tischradius mit der Beschleunigung $\mu_D\, g$ beschleunigt werden würde[2]. Diese Geschwindigkeit stellt eine ober Schranke für die von der Vase durch Rutschen auf der Tischdecke auf dem Tisch erreichbare Geschwindigkeit dar.

Mit dem Ergebnis (1.5) ergibt sich aus der linken Gleichung in (1.3) für die Zeit

$$\boxed{t = (1+x)\,\frac{R}{v} = \frac{v}{\mu_D\, g}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\,\mu_D\, g\, R}{v^2}}\right) = \frac{2\,R}{v}\left(\kappa^2 \pm \kappa\,\sqrt{\kappa^2 - 1}\right)}\,. \tag{1.6}$$

Eine reelle Lösung für x und t existiert, sofern der Radikand nicht negativ ist, also wenn $\kappa \geq 1$. Damit ist nach Definition von κ die Geschwindigkeit der Tischdecke dann auf jeden Fall größer als die Geschwindigkeit der Vase, so dass die Vase während des gesamten Zugvorganges nicht die Geschwindigkeit der Tischdecke erreicht und die zweite Bedingung zum Gelingen des Tricks erfüllt ist. Die Bedingung $\kappa^2 = \frac{v^2}{2\,\mu_D\, g\, R} \geq 1$ liefert auch eine untere Grenze für die Geschwindigkeit. Dies ist allerdings nicht die gesuchte minimale Geschwindigkeit, die in (1.9) bestimmt wird, da hier noch nicht berücksichtigt ist, dass die Vase vor dem Tischende auch wieder zum Stehen kommen muss.

Darüber hinaus muss in (1.5) und (1.6) die Lösung mit dem „-“ gewählt werden, da ansonsten $x > 1$ oder $v_{\text{Vase}} = \mu_D\, g\, t > v$ wäre, was beides zu einem Scheitern des Tricks führen würde.

Aus (1.3) folgt außerdem für die Geschwindigkeit:

$$v^2 = \frac{(1+x)^2\, R^2}{t^2} = \frac{(1+x)^2\, R^2\, \mu_D\, g}{2\,x\,R} = \frac{(1+x)^2}{2\,x}\, R\,\mu_D\, g\,. \tag{1.7}$$

Es lässt sich leicht zeigen[3], dass v mit größer werdendem x abnimmt. Die minimal mögliche Geschwindigkeit $v_{\min}$, mit der an der Tischdecke gezogen werden darf, ist damit die bei dem maximal möglichen Wert von x. Dieser ist nach (1.5) gegeben durch $x_{\max} = \frac{\mu_T}{\mu_D + \mu_T}$. In diesem Fall kommt die Vase genau am Rand des Tisches zum Stehen. Aus obiger Gleichung ergibt sich

$$v_{\min} = \frac{1 + x_{\max}}{\sqrt{x_{\max}}}\sqrt{\frac{R\,\mu_D\, g}{2}} = \frac{1 + \frac{\mu_T}{\mu_D+\mu_T}}{\sqrt{\frac{\mu_T}{\mu_D+\mu_T}}}\sqrt{\frac{R\,\mu_D\, g}{2}}\,. \tag{1.8}$$

Die Gleichung lässt sich durch Ausklammern von μ_T umschreiben zu dem Ergebnis

$$\boxed{v_{\min} = \left(\sqrt{1 + \frac{\mu_D}{\mu_T}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu_D}{\mu_T}}}\right)\sqrt{\frac{R\,\mu_D\, g}{2}} = 1{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\,. \tag{1.9}$$

Der Zahlenwert ergibt sich dabei durch Einsetzen der gegebenen Werte $R = 30\,\mathrm{cm}$, $\mu_D = 0{,}2$, $\mu_T = 0{,}4$ sowie $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

1.c) Die Geschwindigkeit, die die Vase maximal erreicht, ist ihre Geschwindigkeit in dem Moment, in dem sie von der Tischdecke rutscht. Mit (1.6) ergibt sich diese zu

$$\boxed{v_{\text{Vase}} = \mu_D\, g\, t = v\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\,\mu_D\, g\, R}{v^2}}\right) = v\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2}}\right)}\,. \tag{1.10}$$

[2]Dann wäre nämlich $\frac{1}{2}\, m\, v_{\text{Vase}}^2 = \mu_D\, m\, g\, R$ und damit $v_{\text{Vase}}^2 = 2\,\mu_D\, g\, R$.

[3]Für die Ableitung des Geschwindigkeitsquadrates nach x gilt

$$\frac{1}{R\,\mu_D\, g}\,\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x} = \frac{1+x}{x} - \frac{(1+x)^2}{2\,x^2} = \frac{(2x-1-x)\,(1+x)}{2\,x^2} = \frac{(x-1)\,(x+1)}{2\,x^2} = \frac{x^2-1}{2\,x^2} \overset{x\in(0,1]}{\leq} 0\,.$$

Da die Ableitung, außer am Randpunkt, negativ ist, ist die Funktion $v(x)$ monoton fallend.

Nachdem die Tischdecke vollständig unter der Vase herausgezogen worden ist, rutscht diese noch eine Strecke $x' R$ über den Tisch, bevor sie zum Stehen kommt. Für diese Strecke gilt, da die kinetische Energie durch die Reibung umgesetzt werden muss $\mu_T \, g \, x' \, R = \frac{1}{2} \, v_{\text{Vase}}^2$. Für die Gesamtrutschstrecke d der Vase bezüglich des Tisches folgt damit:

$$\boxed{d = (x + x') \, R = \frac{v_{\text{Vase}}^2}{2\,g} \left(\frac{1}{\mu_D} + \frac{1}{\mu_T} \right) = \frac{v^2}{2\,g} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\,\mu_D\,g\,R}{v^2}} \right)^2 \left(\frac{1}{\mu_D} + \frac{1}{\mu_T} \right)} \,. \tag{1.11}$$

Für die minimale Geschwindigkeit (1.9) ergibt sich aus dem Ergebnis tatsächlich $d = R$.

Bewertung - Zaubertrick		**Punkte**
1.a)	Idee zum Betrachten der Beschleunigung und des rechtzeitigen Abbremsens	0.5
	Angeben der wirkenden Reibungskräfte (1.1)	0.5
	Formulieren eines Energieansatzes (1.2)	0.5
	Bestimmen einer Bedingung für x (1.2)	0.5
1.b)	Aufstellen kinematischer Gleichungen (1.3)	0.5
	Begründen, dass ab einer bestimmten Geschwindigkeit die Vase von der Tischdecke rutscht	0.5
	Begründen, dass dabei die Vase nicht die Geschwindigkeit der Tischdecke erreicht	0.5
	Bestimmen eines Ausdruckes für die Geschwindigkeit (auch als Quadrat) in Abhängigkeit von x (1.7)	0.5
	Bestimmen eines Ausdrucks für minimale Geschwindigkeit (1.9)	0.5
	Bestimmen des Wertes des minimalen Geschwindigkeit (1.9)	0.5
1.c)	Bestimmen der maximalen Geschwindigkeit der Vase (1.10)	1.0
	Bestimmen der Gesamtrutschstrecke der Vase (1.11)	1.0
		7.0

Hinweis zur Bewertung

- zu a): Energieansatz nicht nötig für Lösung. Bei schlüssiger Lösung durch kinematische Herleitung kann trotzdem volle Punktzahl erreicht werden
- zu c): jeweils 0.5-0.8 Punkte, wenn der Ansatz richtig war, aber die Formel nicht fertig bzw Rechenfehlern