

Stand: 11. Juli 2025

Aufgabe - Einfangquerschnitt

(5.5 Pkt.)

(3. Rd. zur IPhO 2025, Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Die Anwesenheit eines massereichen Planeten wie dem Jupiter in unserem Sonnensystem reduziert die Häufigkeit von Meteoriteneinschlägen auf der Erde und kann so die Entstehung von Leben auf unserem Heimatplaneten begünstigt haben.

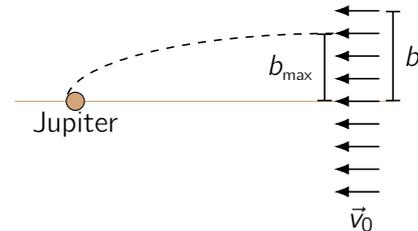
Betrachte eine großflächige Wolke parallel einfallender Teilchen mit jeweiliger Masse m , die in großer Entfernung vom Jupiter eine anfängliche Geschwindigkeit von $v_0 = 15 \text{ km s}^{-1}$ relativ zu Jupiter besitzen.

- 1.a) Gib an, welche Bedingung für Teilchen gelten muss, damit sie auf der Jupiteroberfläche einschlagen. (4.5 Pkt.)
- 1.b) Erläutere, was diese Bedingung für sehr große sowie sehr kleine anfängliche Geschwindigkeiten v_0 bedeutet. (1.0 Pkt.)

Verwende für die Masse von Jupiter $M = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ und für dessen Radius $R = 7,15 \cdot 10^4 \text{ km}$. Die Einflüsse anderer Himmelskörper können vernachlässigt werden.

Lösung

- 1.a) In der Abbildung ist der sich in Richtung Jupiter bewegende Teilchenstrahl eingezeichnet. Bezeichne mit b den anfänglichen Abstand eines Teilchens von der Linie durch den Mittelpunkt von Jupiter und parallel zu \vec{v}_0 und mit b_{max} den maximalen Abstand, bei dem das Teilchen gerade noch auf Jupiter trifft.



Während der Bewegung im Schwerfeld von Jupiter gelten für das Teilchen Energie und Drehimpulserhaltung, da es sich bei dem Schwerfeld um ein konservatives Zentralkraftfeld handelt.

Anfänglich sind die Teilchen weit vom Jupiter entfernt, so dass das Gravitationspotential von Jupiter vernachlässigt werden kann¹. Daher gilt der Energiesatz

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{R} \quad \text{bzw. umgeformt} \quad v^2 = v_0^2 + \frac{2 G M}{R}. \quad (1.1)$$

Hierbei bezeichnen m die Masse des Teilchens und v die Geschwindigkeit, mit der das Teilchen auf dem Jupiter aufschlägt.

Wenn der Parameter b so gewählt ist, dass das Teilchen gerade auf Jupiter einschlägt, berührt es diesen gerade. Die Bahn verläuft im planetennächsten Punkt also tangential zur Oberfläche. Daher gilt mit dem Drehimpulssatz

$$m v_0 b_{\text{max}} = m v R \quad \text{bzw. umgeformt} \quad b_{\text{max}}^2 = R^2 \frac{v^2}{v_0^2}. \quad (1.2)$$

¹Der Einfluss anderer Himmelskörper, wie der Sonne, wird nicht berücksichtigt. Diese Näherung kann gemacht werden, da sich die Teilchen dem Jupiter aus Entfernungen, die groß gegenüber dem Radius des Planeten sind, nähern können, ohne dass sich das Gravitationspotential der Sonne stark ändert.

Mit (1.1) folgt daraus die Bedingung

$$b_{\max}^2 = R^2 \left(1 + \frac{2GM}{v_0^2 R} \right) \quad \text{bzw. umgeformt} \quad b_{\max} = R \sqrt{1 + \frac{2GM}{v_0^2 R}} \approx 4,1 R. \quad (1.3)$$

Es treffen also alle Teilchen aus einem Kreisgebiet mit Fläche

$$A = \pi b_{\max}^2 = \pi R^2 \left(1 + \frac{2GM}{v_0^2 R} \right) = A_{\text{Jupiter}} \left(1 + \frac{2GM}{v_0^2 R} \right) \approx 17 A_{\text{Jupiter}} \quad (1.4)$$

auf dem Jupiter auf.

1.b) für sehr große bzw. sehr kleine anfängliche Geschwindigkeiten ergeben sich die Grenzwerte

$$\begin{aligned} v_0 \rightarrow \infty &\implies A \rightarrow A_{\text{Jupiter}} \\ v_0 \rightarrow 0 &\implies A \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.5)$$

Für sehr große Geschwindigkeiten treffen schlagen also nur die Teilchen auf Jupiter ein, deren Bahn direkt durch Jupiter verläuft und für sehr kleine Geschwindigkeiten fängt Jupiter alle Teilchen ein.

Bewertung - Einfangquerschnitt		Punkte
1.a)	Idee für Betrachtung des Stoßparameters b	1.0
	Nutzen der Energieerhaltung (1.1)	1.0
	Nutzen der Drehimpulserhaltung (1.2)	1.0
	Umformen zu einer Bedingung für b_{\max} (1.3) oder A (1.4)	1.0
	Bestimmen eines numerischen Wertes für b_{\max} (1.3) oder A (1.4)	0.5
1.b)	Ergebnis für Grenzfall großer Geschwindigkeiten	0.5
	Ergebnis für Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten	0.5
		5.5

Hinweise zur Bewertung:

- Wird der Stoßparameter nicht senkrecht zu v_0 , sondern mit Winkel angegeben, werden 0.2 Punkte abgezogen.
- Bei Energie- und Drehimpulserhaltung werden jeweils 0.2 Punkte für das richtige Erkennen des Erhaltungssatzes, sowie 0.4 Punkte jeweils für einen richtig aufgestellten Term vergeben.
- Wenn statt Energie- oder Impulserhaltung ein Kräftevergleich verwendet wird, werden 0.1 Punkte für die Idee und je 0.2 für richtige Terme vergeben.
- Wenn in 8.b) das richtige Verhalten erkannt, aber nicht durch Rechnungen belegt wird, werden für kleine Geschwindigkeiten 0.2 Punkte und für große Geschwindigkeiten 0.1 Punkte bzw. 0.3 Punkte wenn erkannt wurde, dass die Teilchen direkt auf den Jupiter zufliegen müssen, vergeben.