

1.

$$\begin{array}{ll}\text{Reihenschaltung:} & R_R = R_1 + R_2 \\ \text{Parallelschaltung:} & R_P = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\end{array}$$

Einsetzen in das gegebene Verhältnis:

$$\begin{aligned}\frac{4}{1} &= \frac{R_1 + R_2}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1 \cdot R_2} \\ \Leftrightarrow & (R_1 + R_2)^2 = 4R_1 \cdot R_2 \\ \Leftrightarrow & R_1^2 - 2R_1 \cdot R_2 + R_2^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (R_1 - R_2)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & R_1 = R_2\end{aligned}$$

2. Es liegt eine Symmetrie vom Typ 2 vor. (Symmetrieachse geht nicht durch die Anschlüsse)

$\Rightarrow$ Punkte auf der Achse befinden sich auf demselben Potential

$\Rightarrow$ Verbindung unten in der Mitte kann weggelassen werden

Gesamtwiderstand kann nur einfach durch Reihen- und Parallelschaltungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}R_{AB} &= \frac{R_{\text{oben}} \cdot R_{\text{unten}}}{R_{\text{oben}} + R_{\text{unten}}} \quad \text{mit} \\ R_{\text{oben}} &= \left(2 + \frac{1 \cdot 2}{1 + 2}\right) \Omega = \frac{8}{3} \Omega \\ R_{\text{unten}} &= 2 \Omega \\ \Rightarrow R_{AB} &= \frac{\frac{8}{3} \cdot 2}{\frac{8}{3} + 2} \Omega = \frac{8}{7} \Omega\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}Q_1 &= Q_2 = Q_{\text{ges}} = C_{\text{ges}} \cdot U = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} U = 24 \mu\text{C} \\ U_1 &= \frac{Q_1}{C_1} = 12 \text{ V} \\ U_2 &= \frac{Q_2}{C_2} = 6 \text{ V}\end{aligned}$$

4. Stern-Dreiecks-Transformation von R_1, R_2, R_3 führt auf Stern-Widerstand von je $\frac{1}{3} \Omega$.

Der Gesamtwiderstand ist daher gegeben durch:

$$R_{AB} = \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3} + 2\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + 3\right)}{\left(\frac{1}{3} + 2\right) + \left(\frac{1}{3} + 3\right)} \right) \Omega = \frac{87}{51} \Omega = \frac{29}{17} \Omega$$

5. Die Gesamtkapazität berechnet sich als Reihenschaltung von 2 Teilkondensatoren:

$$C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{mit} \quad \forall k \in \{1, 2\} : C_k = \varepsilon_0 \varepsilon_{rk} \frac{A}{d_k}$$

$$\Rightarrow C_{\text{ges}} = \varepsilon_0 A \cdot \frac{\frac{\varepsilon_{r1}}{d_1} \cdot \frac{\varepsilon_{r2}}{d_2}}{\frac{\varepsilon_{r1}}{d_1} + \frac{\varepsilon_{r2}}{d_2}} = \varepsilon_0 A \cdot \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}}{d_2 \varepsilon_{r1} + d_1 \varepsilon_{r2}}$$

Die Ladung ergibt sich damit sofort:

$$Q_1 = Q_2 = Q_{\text{ges}} = C_{\text{ges}} \cdot U = U \cdot \varepsilon_0 A \cdot \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}}{d_2 \varepsilon_{r1} + d_1 \varepsilon_{r2}}$$

Die Teilspannungen ergeben sich dann direkt aus den einzelnen Ladungen:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{U \cdot \varepsilon_0 A \cdot \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}}{d_2 \varepsilon_{r1} + d_1 \varepsilon_{r2}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{A}{d_1}} = \frac{U \varepsilon_{r2} d_1}{d_2 \varepsilon_{r1} + d_1 \varepsilon_{r2}}$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{U \varepsilon_{r1} d_2}{d_2 \varepsilon_{r1} + d_1 \varepsilon_{r2}}$$

Die Feldstärken ergeben sich dann zu:

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{U \varepsilon_{r2}}{d_2 \varepsilon_{r1} + d_1 \varepsilon_{r2}}$$

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{U \varepsilon_{r1}}{d_2 \varepsilon_{r1} + d_1 \varepsilon_{r2}}$$

6. Es liegt eine Symmetrie vom Typ 1 und Typ 2 vor. Wir verwenden hier Typ 2 (Symmetrieachse verläuft nicht durch A und B). Dadurch wissen wir, dass alle Punkte auf der Diagonalen von links unten nach rechts oben sich auf demselben Potential befinden und man deshalb die Widerstände auf dieser Diagonalen weglassen kann. Wir stellen nun die Rekursionsformel auf:

$$R_{n+1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R + R_n}} = \frac{R \cdot (2R + R_n)}{3R + R_n}$$

Durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhält man:

$$R_{AB} = \frac{R \cdot (2R + R_{AB})}{3R + R_{AB}}$$

$$\Leftrightarrow (3R + R_{AB})R_{AB} = R \cdot (2R + R_{AB})$$

$$\Leftrightarrow R_{AB}^2 + R_{AB} \cdot 2R - 2R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow R_{AB} = -R + \sqrt{R^2 + 2R^2} = (\sqrt{3} - 1)R$$

7. Wir schicken zunächst einen Strom I in die eine Ecke hinein und ziehen sie gleichmäßig aus allen anderen 19 Ecken heraus, d.h. $\frac{1}{19}I$. Anschließend ziehen wir den Strom I aus der anderen Ecke heraus, indem wir ihn gleichmäßig in alle anderen Ecken einspeisen.

Wir betrachten nun die Superposition aus diesen beiden Strömen und erhalten eine Situation, wo in die eine Ecke ein Strom von $\frac{20}{19}I$ eingespeist wird und in der anderen Ecke herausgezogen wird. Wir können die Spannung zwischen den beiden Ecken bestimmen, indem wir den Strom in der Verbindungskante berechnen. Dieser setzt sich zusammen aus $\frac{1}{3}I$ vom ersten Fall und $\frac{1}{3}I$ vom zweiten Fall. Dies liegt daran, dass der Dodekaeder symmetrisch ist und daher in jede Richtung derselbe Strom fließt.

Insgesamt erhalten wir also:

$$R_{\text{ges}} = \frac{U}{I} = \frac{R \cdot \frac{2}{3}I}{\frac{20}{19}I} = \frac{19}{30}R$$

Entfernen wir die direkte Verbindung zwischen den beiden Ecken, so können wir diesen ∞ großen Widerstand ersetzen durch eine Parallelschaltung von R und $-R$. Der neue Gesamtwiderstand ergibt sich also als Parallelschaltung aus dem alten Gesamtwiderstand und $-R$:

$$R_{\text{ges, neu}} = \frac{R_{\text{ges}} \cdot (-R)}{R_{\text{ges}} - R} = \frac{-\frac{19}{30}R^2}{-\frac{11}{30}R} = \frac{19}{11}R$$