Vortrag Elektrizitätslehre (Stromkreise)

Titus Bornträger

29. Oktober 2025

Gliederung:

1. Grundlagen
2. Widerstandsberechnungen
3. Kondensatoren

1 Grundlagen

1.1 Grundgrößen

$$\begin{tikzcd} \underline{\text{Ladung } Q} \arrow[dl] \arrow[dr] & \text{(auch } q\text{)} \\ \text{positiv} & \text{negativ} \end{tikzcd}$$

Kraft zwischen Ladungsträgern:

- gleichnamige Ladung: Abstoßung
- ungleichnamige Ladung: Anziehung

Kraft:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

für Stromkreise wichtig: bewegte Ladungen
Stromstärke I:
Die Stromstärke bezeichnet die Ladung, welche pro Zeit fließt:

$$I := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Spannung U:
Vereinfacht gesagt bezeichnet die Spannung die „Stärke“ einer Spannungsquelle, genauer ist die Spannung zwischen 2 Punkten definiert als die benötigte Arbeit pro Ladung um eine Ladung von einem Punkt zum anderen zu bewegen:

$$U := \frac{W}{Q}$$

Elektrische Leistung P
Die elektrische Leistung, welche in einem Bauelement umgesetzt wird, berechnet sich als Produkt von Spannung und Stromstärke:

$$P = U \cdot I$$

1.2 Wichtige Sätze

Satz. ***(Ladungserhaltung)***
In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Ladungen konstant.

Satz. ***(Ohmsches Gesetz)***
Für einen ohmschen Widerstand gilt: $I \sim U$

$$R := \frac{U}{I}$$

Satz. ***(Berechnung für homogenen Metallleiter)***
Für einen Stab der Länge l mit Querschnittsfläche A und spezifischem elektrischem Widerstand ρ (Materialparameter) gilt:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Ganz zentral für den Umgang mit elektrischen Schaltungen sind die Kirchhoffsche Gesetze:

Satz. ***(Kirchhoffsche Gesetze)***

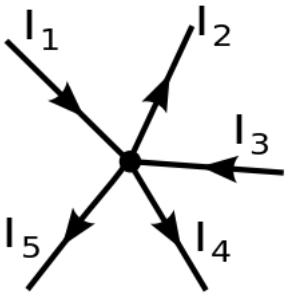
1. ***Knotenregel:***

   Für jeden Knoten in einer elektrischen Schaltung gilt:

   $$\sum I_{zu} = \sum I_{ab}$$

   bzw. mit Vorzeichen:

   $$\sum I = 0$$



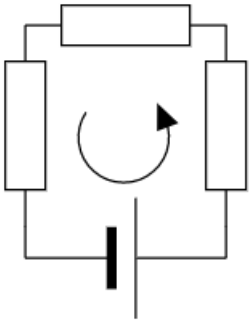
   Begründung: es kann sich keine Ladung im Knoten sammeln oder schon vorher gespeichert sein, der Knotensatz folgt also direkt aus der Ladungserhaltung.

2. ***Maschenregel:***

   Für jede Masche in einem elektrischen Schaltkreis gilt:

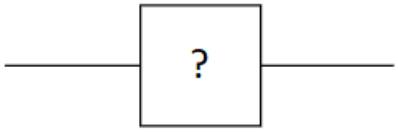
   $$\sum U = 0$$

   Dabei wird die Spannung die über jedem Bauelement abfällt mit korrektem Vorzeichen verwendet.
   Begründung: Wenn eine Ladung die gesamte Masche durchläuft, ist die insgesamt verrichtete Arbeit 0*, da man wieder am Ausgangspunkt ist, daher gilt* $U = 0$ *für die gesamte Masche.*



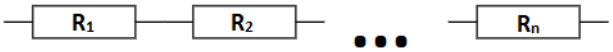
2 Widerstandsberechnungen

Gegeben: beliebiges Widerstandsnetz
Gesucht: Gesamtwiderstand



2.1 Reihen- und Parallelschaltungen

Reihenschaltung



Knotenregel:

$$I_{\text{ges}} = I_1 = \ldots = I_n$$

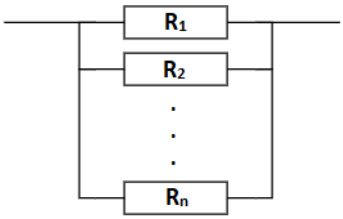
Maschenregel:

$$U_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

Gesamtwiderstand:

$$R_{\text{ges}} = \frac{U_{\text{ges}}}{I_{\text{ges}}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} U_k}{I_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{I_k} = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Parallelschaltung



Knotenregel:

$$I_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} I_k$$

Maschenregel:

$$U_{\text{ges}} = U_1 = \ldots = U_n$$

Gesamtwiderstand:

$$R_{\text{ges}} = \frac{U_{\text{ges}}}{I_{\text{ges}}} = \frac{1}{\frac{\sum_{k=1}^{n} I_k}{U_{\text{ges}}}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$$

äquivalent:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

speziell für 2 Widerstände R_1 und R_2 gilt:

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Beispiel. ***(Aufgabe zu Reihen- und Parallelschaltungen)***
Aufgabe*: Zwei Widerstände R_1 und R_2 werden zunächst in Reihe und anschließend parallel geschaltet. Die Gesamtwiderstände der Schaltung verhalten sich wie 4:1. In welchem Verhältnis stehen R_1 und R_2?*
Lösung*:*

$$\begin{aligned} \textit{Reihenschaltung:} \quad & R_R = R_1 + R_2 \\ \textit{Parallelschaltung:} \quad & R_P = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Einsetzen in das gegebene Verhältnis:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{1} = \frac{R_1 + R_2}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1 \cdot R_2} \\ \Leftrightarrow \quad & (R_1 + R_2)^2 = 4R_1 \cdot R_2 \\ \Leftrightarrow \quad & R_1^2 - 2R_1 \cdot R_2 + R_2^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (R_1 - R_2)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & R_1 = R_2 \end{aligned}$$

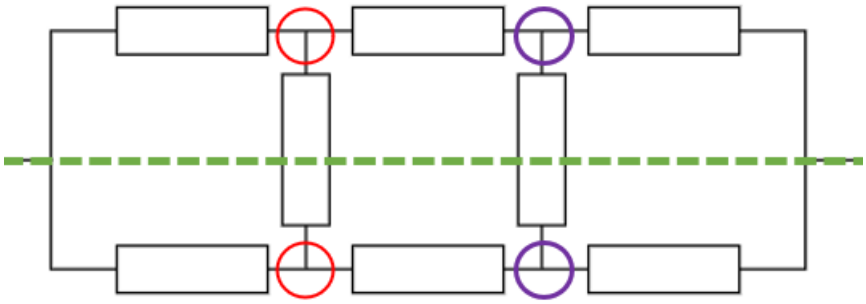
2.2 Symmetrie

Grundprinzip: Wenn ein physikalisches Problem eine Symmetrie aufweist, sollte man versuchen, diese auszunutzen. Dies soll nun speziell auf Widerstandsschaltungen angewendet werden, dabei gibt es 2 Varianten:

1. Symmetrieachse geht durch die Anschluss-Knoten: Punkte, welche gespiegelt zueinander sind befinden sich auf demselben Potential

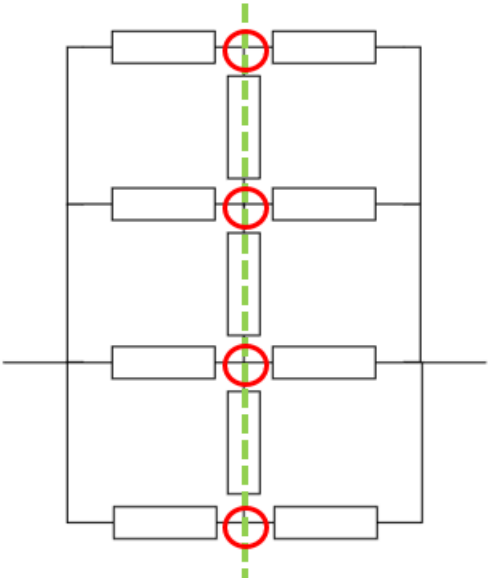
2. Symmetrieachse genau zwischen den Anschluss-Knoten: Punkte auf der Symmetrieachse befinden sich auf demselben Potential

Beispiel. ***(Variante 1)***



Die farbig eingekreisten Punkte befinden sich jeweils auf demselben Potential, d.h. zwischen diesen fließt kein Strom und die Widerstände dazwischen spielen keine Rolle und können herausgenommen werden.

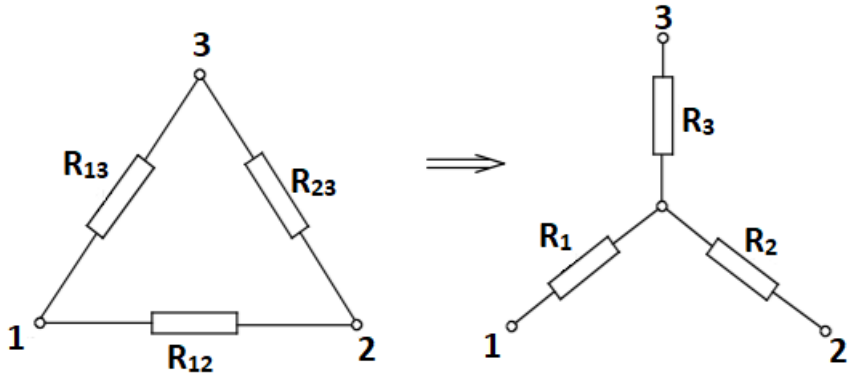
Beispiel. *(**Variante 2**)*



Die farbig eingekreisten Punkte befinden sich jeweils auf demselben Potential, d.h. zwischen diesen fließt kein Strom und die Widerstände dazwischen spielen keine Rolle und können herausgenommen werden.

2.3 Stern-Dreiecks-Transformation

Ist ein sehr allgemeines Verfahren, um den Gesamtwiderstand einer Schaltung zu bestimmen, welche sich nicht ausschließlich mit Hilfe von Reihen- und Parallelschaltungen vereinfachen lässt.



Für eine korrekte Transformation müssen die Widerstände zwischen den Anschluss-Knoten gleich sein:

$$\frac{R_{12} \cdot (R_{13} + R_{23})}{R_{12} + (R_{13} + R_{23})} = R_1 + R_2$$
$$\frac{R_{13} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{13} + (R_{12} + R_{23})} = R_1 + R_3$$
$$\frac{R_{23} \cdot (R_{12} + R_{13})}{R_{23} + (R_{12} + R_{13})} = R_2 + R_3$$

Lösen des Gleichungssystems führt auf die Transformations-Formeln:
$\Delta \rightarrow$ Y:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \qquad \text{(andere Widerstände mit Symmetrie analog)}$$

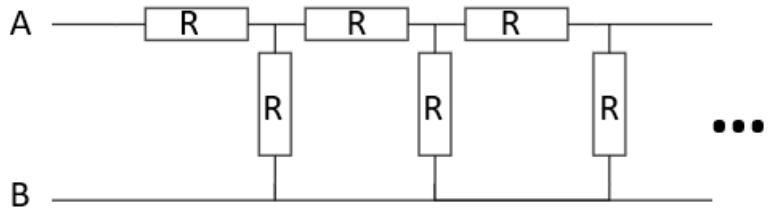
Y $\rightarrow \Delta$:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

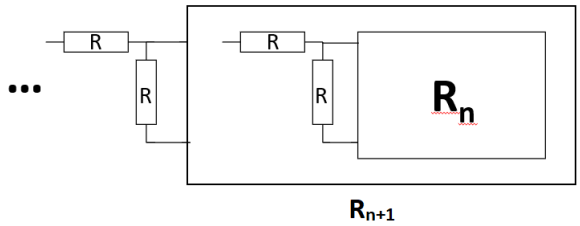
Diese Formel ist analog zu der ersten Transformations-Formel, wenn man Widerstände durch Leitwerte $G := \frac{1}{R}$ ersetzt.
$\rightarrow$ Aufgrund der Komplexität der Formel empfiehlt es sich, die Richtung $\Delta \rightarrow$ Y zu verwenden.

2.4 unendliche Netze

Beispiel. ***(unendliches Widerstandsnetz)***



Trick: rekursive Betrachtung



Rekursionsformel:

$$R_{n+1} = R + \frac{R_n \cdot R}{R_n + R}$$

Für ein unendliches Netz gilt:

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = \lim_{n\to\infty} R_n =: R_\infty$$

Damit folgt:

$$R_\infty = R + \frac{R_\infty \cdot R}{R_\infty + R}$$

Umstellen:

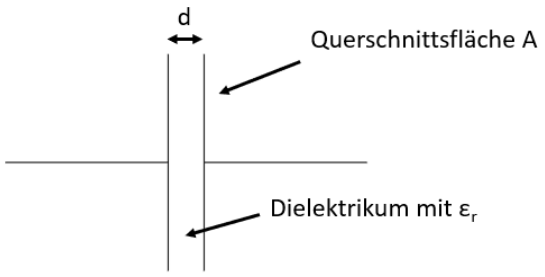
$$R_\infty^2 - R_\infty \cdot R - R^2 = 0$$

$$R_\infty = \frac{R}{2} \underbrace{\pm}_{\text{nur + kommt in Frage}} \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2}$$

$$\Rightarrow \quad R_\infty = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot R$$

3 Kondensatoren

3.1 Grundgrößen



Im einfachsten Fall besteht ein Kondensator einfach aus 2 parallelen Platten.
Entscheidend ist, dass Spannung und Ladung proportional zueinander sind: $U \sim Q$
Diesen Proportionalitätsfaktor bezeichnet man als Kapazität:
Kapazität C

$$C := \frac{Q}{U}$$

Für einen Plattenkondensator gilt:

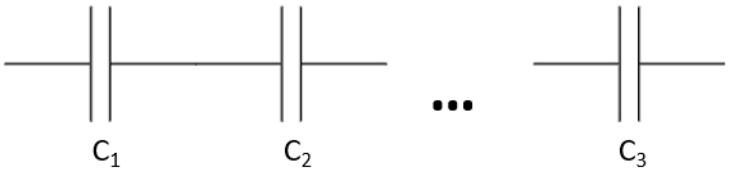
$$C = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

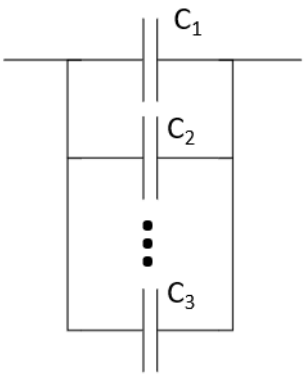
3.2 Kondensatorschaltungen

Die Gleichungen für Reihen- und Parallelschaltungen sind genau umgekehrt zu den Widerstandsschaltungen:

Reihenschaltung

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$



Parallelschaltung

$$C_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} C_k$$