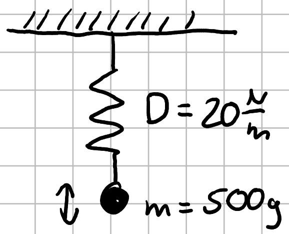
Harmonische Schwingungen

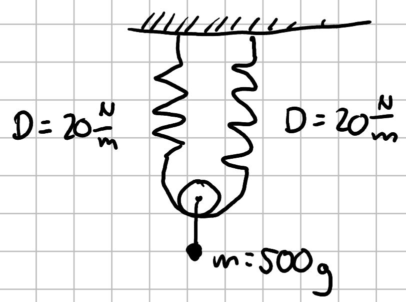
Finnley Paolella

Einstiegsaufgabe

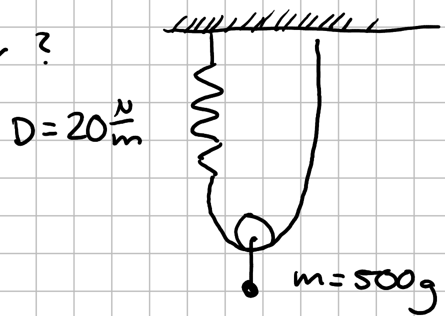
① An eine Feder mit Federkonstante $D = 20\,\frac{N}{m}$ wird eine Masse $m = 500\,g$ gehängt. Um welche Strecke dehnt sich die Feder, wie groß ist die Schwingungsdauer T dieses Federpendels?



② Nun werden zwei solche Federn verwendet und die Masse hängt an einer masselosen Rolle.
Wie groß ist nun die Schwingungsdauer?



③ Nun wird nur wird eine Feder durch einen Faden ersetzt.
Wie groß ist nun die Schwingungsdauer?

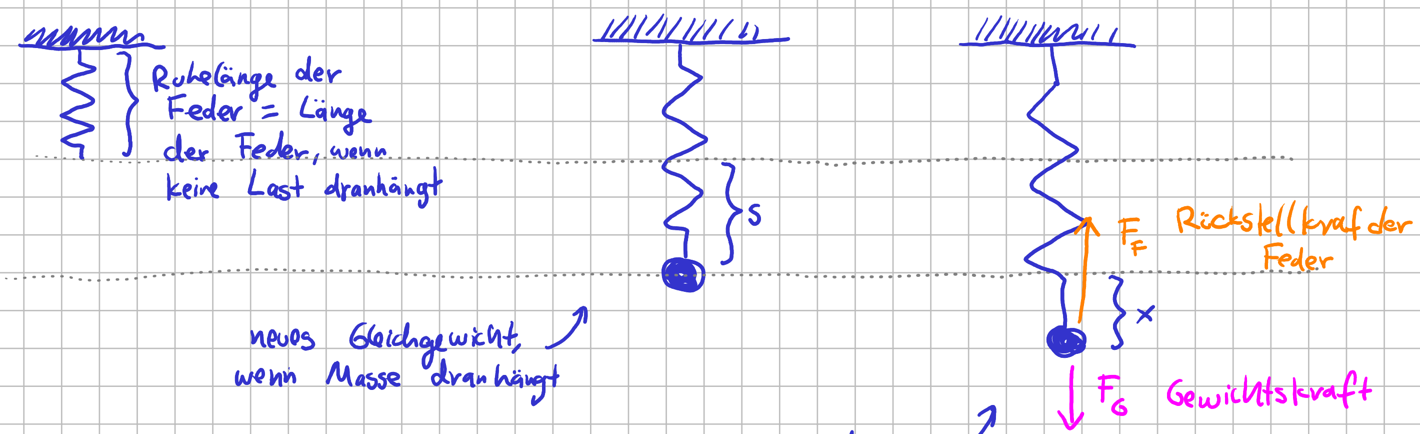


(siehe Leifi "Feder-Rollen-Kombination")

Lösung

① Sei s die Strecke, um die sich die Feder dehnt. Die Rückstellkraft $F = Ds$ muss im Gleichgewicht gleich der Gewichtskraft sein, d.h.

$$Ds = mg \Rightarrow s = \frac{mg}{D} \approx 25\,cm.$$



Wir lenken die Feder nun zusätzlich um x aus, indem wir die Masse nach unten ziehen. Wenn wir jetzt loslassen, führt die Masse eine Schwingung aus.

Bewegungsgleichung:

die Feder ist insgesamt um $s+x$ gestreckt

$$m \cdot a = F_G - F_F = mg - D\cdot(s+x)$$

Beschleunigung nach unten

$$= \underbrace{mg - Ds}_{=0\text{, siehe Berechnung oben}} - Dx = -Dx$$

Diese Rechnung zeigt, dass die konstante Gewichtskraft mg keinen Einfluss auf die Bewegung hat, außer die konstante Verschiebung s.

$\Rightarrow$ $m\ddot{x} = -Dx$, wobei wir mit $\ddot{x}$ die Beschleunigung bezeichnen (zweite Ableitung nach der Zeit, $\ddot{x}(t) = x''(t)$)

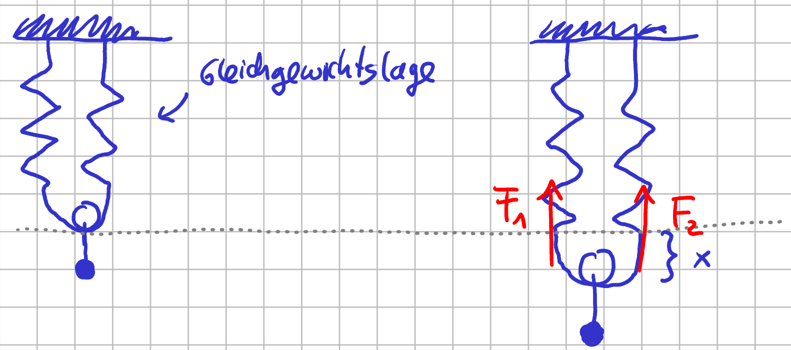
Immer wenn eine Größe x eine Bewegungsgleichung der Form

$$m\ddot{x} = -Dx$$

erfüllt, liegt eine harmonische Schwingung mit Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ bzw. Frequenz $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$ vor.

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{500\,g}{20\,N/m}} \approx 1\,s.$$

2

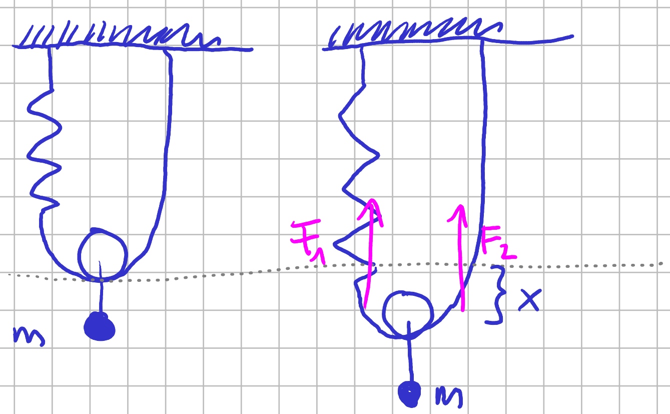


Bei einer Auslenkung um x sind beide Federn um x gestreckt, es folgt die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -F_1 - F_2 = -Dx - Dx = -2Dx$.

$\Rightarrow$ harmonische Schwingung mit $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2D}} \approx 0.7\,s$

Die zwei Federn wirken wie eine Feder mit doppelter Federkonstante.

3



Wird die Masse um x gesenkt, verlängert sich die Feder um $2x$, da der Faden eine konstante Länge hat. Die Feder übt somit eine Kraft $F_1 = D\cdot(2x) = 2Dx$ auf die linke Seite vom Faden aus.

Die Zugkraft in einem Faden ist stets konstant, also übt auch die rechte Seite des Fadens eine Kraft $2Dx$ aus. Die Bewegungsgleichung lautet

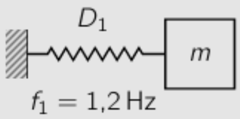
$$m\ddot{x} = -2Dx - 2Dx = -4Dx$$

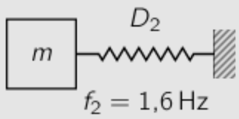
$\Rightarrow$ harmonische Schwingung mit $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4D}} \approx 0.5\,\mathrm{s}$.

Aufgabe 3 Doppeltes Federpendel (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

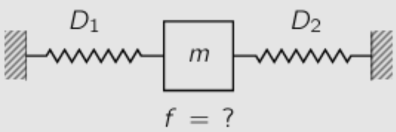
(2. Runde zur IPhO 2023, Idee: Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Thomas Hellerl)

In den beiden in der Abbildung gezeigten Federpendeln schwingt jeweils ein Körper der Masse m reibungsfrei. Die Federkonstanten D_1 und D_2 der beiden hookeschen Federn sind dabei jedoch unterschiedlich. Daher schwingen die Körper nach einer Auslenkung mit unterschiedlichen Frequenzen f_1 und f_2.





Wie groß ist die Schwingungsfrequenz (Eigenfrequenz) des unten gezeigten Systems, in dem die Federn gekoppelt sind?



A 1,4 Hz B 2,0 Hz C 2,4 Hz D 2,8 Hz

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

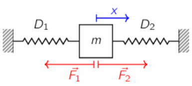
Die Eigenfrequenzen der oberen Oszillatoren sind gegeben durch

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D_i}{m}}\,. \tag{3.1}$$

Für die Federkonstanten D_i folgt demnach

$$D_i = 4\,\pi^2\,m\,f_i^2\,. \tag{3.2}$$

Die einzelnen Federkonstanten D_1 und D_2 des unteren Systems addieren sich zur neuen Federkonstante D aufgrund folgender Überlegung.



Im Gleichgewicht zieht jede Feder mit der Kraft F_0. Bei einer Auslenkung um x aus der Gleichgewichtslage üben die linke Feder den Kraftbetrag $F_1 = F_0 + D_1 x$ und die rechte Feder den Kraftbetrag $F_2 = F_0 - D_2 x$ auf m aus. Wir erhalten für die insgesamt auf die schwingende Masse m wirkende Kraft.

$$F(x) = -F_1 + F_2 = -(F_0 + D_1 x) + (F_0 - D_2 x) = -(D_1 + D_2)x \tag{3.3}$$

und damit ist für das System mit beiden Federn

$$D = D_1 + D_2 \tag{3.4}$$

Das neue System schwingt also mit der Frequenz

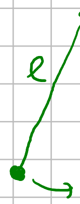
$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D_1 + D_2}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{4\pi^2\,m\,(f_1^2 + f_2^2)}{m}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}\,. \tag{3.5}$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$\boxed{f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{1.2^2 + 1.6^2}\,\mathrm{Hz} \approx 2{,}0\,\mathrm{Hz}}\,. \tag{3.6}$$

Korrekte Antwort: *B*

Wird ein Fadenpendel der Länge ℓ leicht ausgelenkt, so schwingt es mit Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.



Beachte, dass diese Zeit unabhängig von der Größe der Auslenkung und von der Masse ist!

2020, 2. Runde

Aufgabe 3 Schwingung mit Hindernis (MC-Aufgabe) (5 Pkt.)

Eine kleine Metallkugel hängt, wie nebenstehend skizziert, an einem dünnen Faden der Länge L von der Decke. Wenn dieses Fadenpendel leicht zur Seite ausgelenkt und losgelassen wird, schwingt es mit einer Schwingungsperiodendauer $T = 1{,}0\,\mathrm{s}$ parallel zur Wand.

Nun wird ein Nagel in einem Abstand von $\frac{3}{4}L$ von der Decke fest in die Wand geschlagen. Das Fadenpendel stößt beim Schwingen nach rechts an den Nagel und wird durch diesen behindert. Die Kugel wird jetzt aus der in Abbildung 2 rechts gezeigten Position losgelassen.

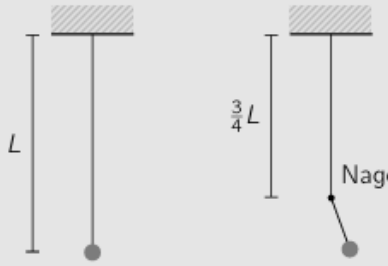
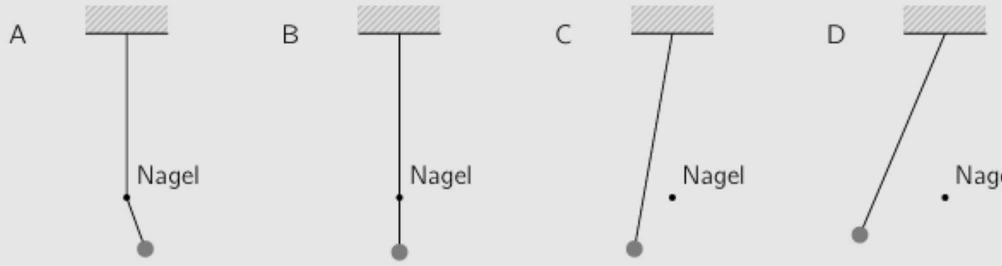


Abbildung 2: *Skizze des Pendels ohne (links) und mit Nagel in der Wand (rechts).*

Welche der folgenden Abbildungen zeigt die Position der Kugel 1,5 s nach dem Loslassen?



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Pendelperiode T eines Fadenpendels bei kleinen Auslenkungen ist proportional zur Wurzel aus der Pendellänge. Durch den Nagel wird die Pendellänge für einen Teil der Schwingung auf ein Viertel reduziert. Dadurch halbiert sich die Schwingungsdauer für den Teil der Schwingung, der durch den Nagel eingeschränkt ist.

Für die Pendelbewegung aus der anfänglichen Lage (in A gezeigt) bis zum Durchgang durch die Ruhelage (B) benötigt das Pendel daher eine Zeit von $\frac{1}{8}T$. Nach $\frac{3}{8}T$ ist es auf dem höchsten Punkt auf der anderen Seite angekommen (C) und nach $\frac{5}{8}T$ durchläuft es erneut die Ruhelage, bevor es nach $\frac{6}{8}T = \frac{3}{4}T$ wieder Position in A erreicht. 1,5 s oder $\frac{3}{2}T$ nach dem Loslassen hat das Pendel daher bereits zwei volle Schwingungsperioden durchlaufen und befindet sich wieder bei Position A.

Antwort A ist also die gesuchte Lösung.

Hinweis: Position D kann von dem Pendel gar nicht erreicht werden, da das Pendel dann höher wäre als in der ursprünglichen Lage, was energetisch unmöglich ist.

Korrekte Antwort: *A*

Aufgabe 2 Pendel im Fahrstuhl (MC-Aufgabe)

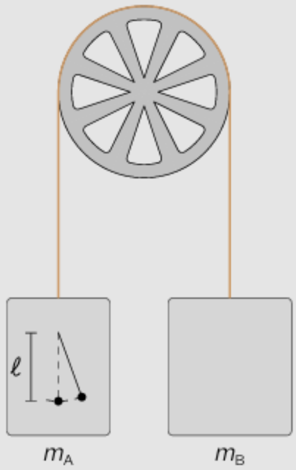
(2. Rd. zur IPhO 2022)

Zwei Fahrstuhlkabinen der Massen m_A und m_B mit $m_A < m_B$ hängen an den Enden eines langen Seiles, das über eine feste Rolle geführt ist. Die Masse der Rolle und des Seils können vernachlässigt werden. In der linken Kabine hängt ein Fadenpendel der Länge ℓ. Bei ruhenden Kabinen und kleinen Auslenkungen beträgt die Periodendauer des Pendels T.

Wenn die Kabinen losgelassen werden, bewegen diese sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft.

Wie muss die Länge ℓ' des Fadenpendels in der linken Kabine gewählt werden, damit es nach dem Loslassen der Kabine mit der Periode T schwingt?

A $\ell' = \frac{m_a}{m_B}\,\ell$ B $\ell' = \frac{2\,m_A}{m_A+m_B}\,\ell$ C $\ell' = \frac{2\,m_B}{m_A+m_B}\,\ell$ D $\ell' = \frac{m_B}{m_A}\,\ell$



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die Periodendauer T eines Fadenpendels der Länge ℓ beträgt

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \text{bzw.} \qquad \ell = \frac{T^2\,g}{4\,\pi^2}\,, \tag{2.1}$$

wobei g die Schwerebeschleunigung auf der Erde angibt.

Nach dem Loslassen der Kabinen wird die Kabine A nach oben beschleunigt, da ihre Masse kleiner ist als die der anderen Kabine. Die Beschleunigung nach oben lässt sich bestimmen aus

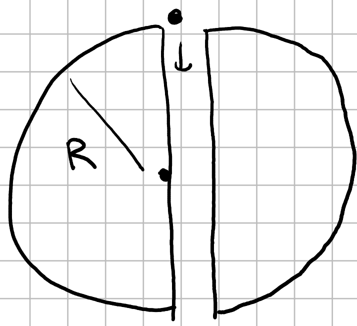
$$(m_B + m_A)\,a = m_B\,g - m_A\,g\,, \qquad \text{so dass} \qquad a = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\,g\,. \tag{2.2}$$

Auf das Pendel in der Kabine A wirkt damit die Beschleunigung $g + a$ nach unten. Wenn das Pendel auch im beschleunigten Fall die gleiche Pendeldauer T besitzen soll, muss es dafür eine Länge ℓ' haben mit

$$\boxed{\ell' = \frac{T^2}{4\,\pi^2}\,(g + a) = \frac{T^2\,g}{4\,\pi^2}\,\frac{2\,m_B}{m_A + m_B} = \frac{2\,m_B}{m_A + m_B}\,\ell > \ell}\,. \tag{2.3}$$

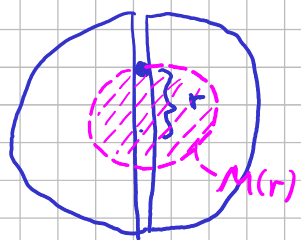
Korrekte Antwort: *C*

Ein Astronaut landet auf einem kugelförmigen Asteroiden der Masse M und Radius R. Er bohrt diametral durch den Asteroiden und lässt einen Gegenstand fallen. Wie lange dauert es, bis der Gegenstand auf der anderen Seite ankommt? Nimm an, dass die Dichte vom Asteroiden konstant ist.

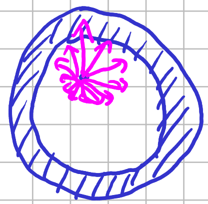


Wäre es schneller oder langsamer, den Gegenstand um den Asteroiden herum zur anderen Seite zu werfen?

Lösung Bezeichne mit r den Abstand zum Kugelmittelpunkt. Auf die Masse wirkt die Gravitationskraft. Um diese zu bestimmen benötigen wir das folgende Theorem.



Befindet sich eine Masse im Inneren einer Hohlkugel, so beträgt die Gesamtgravitationskraft 0.



(Beweis kann direkt durch Integration der einzelnen Kraftbeiträge erfolgen, oder mit dem Satz von Gauß. Suche z.B. nach „Newton's Schalentheorem".)

Es folgt als Gravitationskraft $F = G\frac{m\,M(r)}{r^2}$, wobei $M(r)$ die Masse der Kugel mit Radius r ist, also

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \quad \text{mit Dichte } \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \quad \text{d.h. } M(r) = \frac{r^3}{R^3} M.$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{Gm\frac{r^3}{R^3}M}{r^2} = -\frac{GmM}{R^3}r$$

$\Rightarrow$ harmonische Schwingung mit Periode

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GmM}{R^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Zeit zur anderen Seite: $\frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

Wenn man den Gegenstand knapp über der Oberfläche herumwirft (auf einer Kreisbahn), so gilt für die Geschwindigkeit

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{GmM}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$, da die Zentripetalkraft durch die Gravitationskraft gegeben ist.

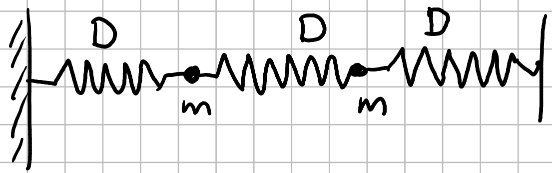
Zur anderen Seite beträgt die Strecke πR, also

$$T = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$\Rightarrow$ Die Zeit ist genau gleich!

Zwischen zwei Wänden sind drei Federn der Federstärke D gespannt, dazwischen sind zwei Massen m.

Das System kann verschiedenene Schwingungen ausführen. Berechne die Schwingungsdauer für den Fall, dass...



① ... die Massen gleichphasig schwingen, d.h. zu jedem Zeitpunkt sind beide Massen um die gleiche Strecke in die gleiche Richtung versetzt.

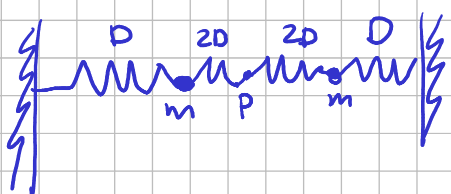
② ... die Massen genau entgegengesetzt schwingen, d.h. die eine Masse ist um genau die gleiche Strecke nach links versetzt, wie die andere nach rechts.

Lösung: Der allgemeine Ansatz ist es, die Bewegungsgleichungen für beide Massen aufzustellen und dann ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen zu lösen. Für den Fall, dass zumindest die äußeren beiden Federkonstanten gleich sind, gibt es einen schönen Trick:

① Die mittlere Feder wird gar nicht gestaucht oder gestreckt, auf die linke Masse wirkt nur die Kraft der linken Feder:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

② Wir können die mittlere Feder in zwei Federn mit Federkonstante 2D aufteilen.



Der Punkt P ist fest, auf die linke Masse wirkt die Feder mit D und die Feder mit 2D, also (siehe die Aufgabe "Doppeltes Federpendel" oben):

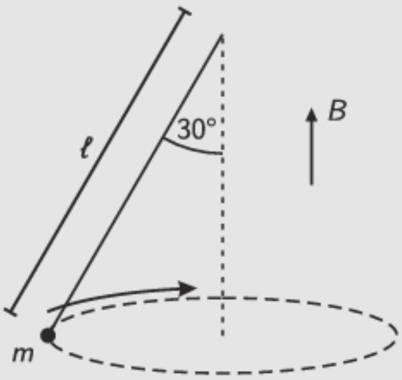
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3D}}.$$

Aufgabe für Gelangweilte zum Kräftgleichgewicht am Fadenpendel:

Aufgabe 56 Geladene Kugel am Faden

(3. Runde zur 42. IPhO 2011)

Eine geladene, kleine Kugel mit einer Masse $m = 10\,\mathrm{g}$ hängt an einem isolierenden, masselosen Faden der Länge $\ell = 1m$ von einer Decke herab. Sie befindet sich in einem homogenen, senkrechten Magnetfeld der Feldstärke $B = 50\,\mathrm{mT}$. Die Kugel wird, wie in der Abbildung skizziert, so in horizontale Rotation versetzt, dass die Kugel mit dem Faden einen Winkel von 30° mit der Vertikalen einschließt.



Die Rotationsfrequenzen im bzw. gegen den Uhrzeigersinn unterscheiden sich dabei um $2{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Hz}$.

a) Berechne mit Hilfe dieser Information die Ladung der Kugel.

b) Bestimme das Mittel aus den Rotationsfrequenzen der beiden Rotationsrichtungen.

Lösung

a) Auf die Kugel wirken während der Kreisbewegung die Gewichtskraft $m\,g$, die Zentrifugalkraft $m\,\omega^2\,r$ sowie die Lorentzkraft $q\,\omega\,r\,B$, die entlang der horizontalen Verbindungslinie der Kugel mit dem Fadenlot wirkt. Hierbei ist $r = \ell \sin\alpha$ mit $\alpha = 30°$ Die Summe der Kräfte muss bei einer Rotation mit konstanter Auslenkung des Fadens entlang des Fadens wirken. Es muss also gelten

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{m\,\omega_1^2\,r - q\,\omega_1\,r\,B}{m\,g} && \text{wenn die Lorentzkraft nach außen wirkt,} \\ \tan\alpha &= \frac{m\,\omega_2^2\,r + q\,\omega_2\,r\,B}{m\,g} && \text{wenn die Lorentzkraft nach innen wirkt.} \end{aligned} \tag{56.1}$$

Gleichsetzen der Gleichungen ergibt

$$m\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) = q\,B\,(\omega_1 + \omega_2) \tag{56.2}$$

und damit für die Frequenzdifferenz

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\,\pi} = \frac{q\,B}{2\,\pi\,m}\,. \tag{56.3}$$

Die Ladung q der Kugel ist also

$$q = \frac{\Delta f\,2\,\pi\,m}{B} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{As}\,. \tag{56.4}$$

b) Aus Gleichungen (56.1) ergibt sich

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{q\,B}{2\,m} + \sqrt{\frac{q^2\,B^2}{4\,m^2} + \frac{g\,\tan\alpha}{r}} = \pm\frac{q\,B}{2\,m} + \sqrt{\pi^2\,\Delta f^2 + \frac{g}{\ell\,\cos\alpha}}\,. \tag{56.5}$$

Damit ergibt sich für das Mittel der Frequenzen:

$$f_{\text{mean}} = \frac{1}{2}\,(f_1 + f_2) = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta f^2 + \frac{g}{\pi^2\,\ell\,\cos\alpha}} \approx 0{,}54\,\mathrm{Hz}\,. \tag{56.6}$$