Himmelsmechanik - Vorbereitung IPhO 2. Runde

Armas Scharpegge

Oktober 2025

CC BY-SA 4.0, außer die Komet-Aufgabe.

Gravitation

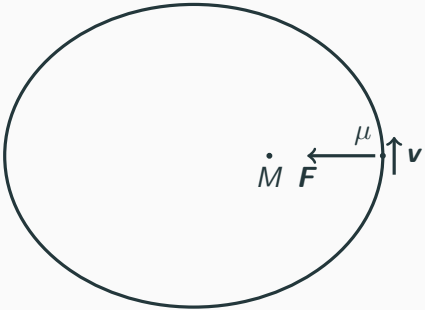
Massenhafte Körper ziehen sich an!

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$
$$\boldsymbol{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}}$$

Ähnlichkeiten zu Elektrodynamik (Coulombsches Gesetz).

Problemstellung

Leichter Körper umkreist sehr schweren Körper. Dann bewegt sich der schwere Körper kaum.

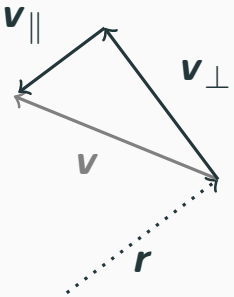


Notation

- Zahlen x, Vektoren $\boldsymbol{x}$ (dann $x = |\boldsymbol{x}|$)
- Zeitliche Ableitungen

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\left(= \boldsymbol{x}'(t)\right)$$
$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\left(= \boldsymbol{x}''(t)\right)$$

Geschwindigkeit und Drehimpuls



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_\parallel + \boldsymbol{v}_\perp \\
\boldsymbol{v}^2 &= \boldsymbol{v}_\parallel^2 + \boldsymbol{v}_\perp^2 \\
\boldsymbol{L} &= \mu \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \mu \boldsymbol{r} \times \left(\boldsymbol{v}_\parallel + \boldsymbol{v}_\perp\right) \\
&= \mu \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\parallel + \mu \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\perp \\
&= \mu \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\perp \\
\implies L &= \mu r v_\perp
\end{aligned}
$$

Übung: Zeige $|\boldsymbol{v}_\perp| = \dot{\theta} r, |\boldsymbol{v}_\parallel| = \dot{r}$.

Potential

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r}) \implies E = E_{\mathrm{kin}} + U(\boldsymbol{r}) \text{ erhalten}$$

(In etwa $F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} U$)

Übung: Rechne $\dot{E} = 0$ nach.

$$U(r) = -\int^r F(r')\,\mathrm{d}r' = -\int^r -\frac{Gm_1 m_2}{r'^2}\,\mathrm{d}r' = -\left[\frac{Gm_1 m_2}{r'}\right]_\infty^r = \frac{-Gm_1 m_2}{r}$$

Erhaltungsgrößen

- Energie $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM\mu}{r}$
- Drehimpuls $L = \mu r v_\perp$

Effektives Potential

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{GM\mu}{r} \\
&= \frac{1}{2}\mu\left(\boldsymbol{v}_\parallel^2 + \boldsymbol{v}_\perp^2\right) - \frac{GM\mu}{r} \quad \text{mit } L = \mu r v_\perp \\
&= \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right) - \frac{GM\mu}{r} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}_{E_{\mathrm{kin}}} + \underbrace{\left(\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}\right)}_{U_{\mathrm{eff}}}
\end{aligned}
$$

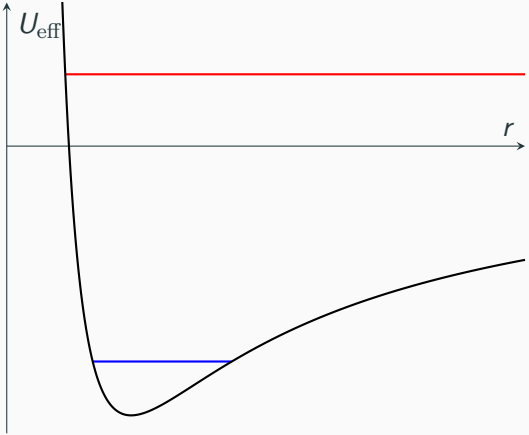
Effektives Potential

$E < 0 \implies$ gebundene Bahn

$E > 0 \implies$ ungebunde Bahn

$\implies$ Geschwindigkeit im Unendlichen

$E = 0 \implies$ Grenzfall



Die Lösung

$r(t)$ lässt sich nicht angeben, nur $r(\theta)$.

Die möglichen Bahnen $\boldsymbol{r}$ sind genau die Kegelschnitte.[1]

Im Fokus liegt die schwere Masse.

$\approx$ 1. Keplersches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Fokus die Sonne liegt.

[1] Außer $L = 0$.

Kegelschnitte

- Exzentrizität e
  - $e = 0$: Kreis
  - $0 < e < 1$: Ellipse
  - $e = 1$: Parabel
  - $e > 1$: Hyperbel
- Semi-latus rectum p. Abstand bei $\theta = 90°$.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Ellipse $0 < e < 1,\ E < 0$

$$a = \text{große Halbachse}$$

$$b = \text{kleine Halbachse}$$

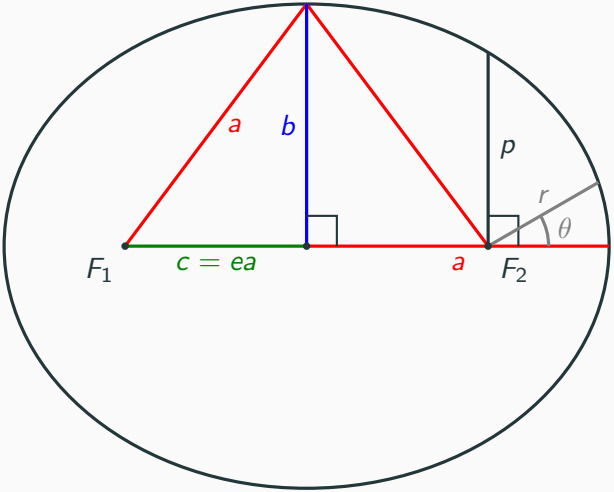
$$c = \text{lineare Exzentrizität}$$

$$e = \frac{c}{a} = \text{Exzentrizität}$$

$$p = \textit{semi-latus rectum}$$

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a, \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Wie ergibt sich e aus a und b?



Ellipse $0 < e < 1,\ E < 0$

$$a = \text{große Halbachse}$$

$$b = \text{kleine Halbachse}$$

$$c = \text{lineare Exzentrizität}$$

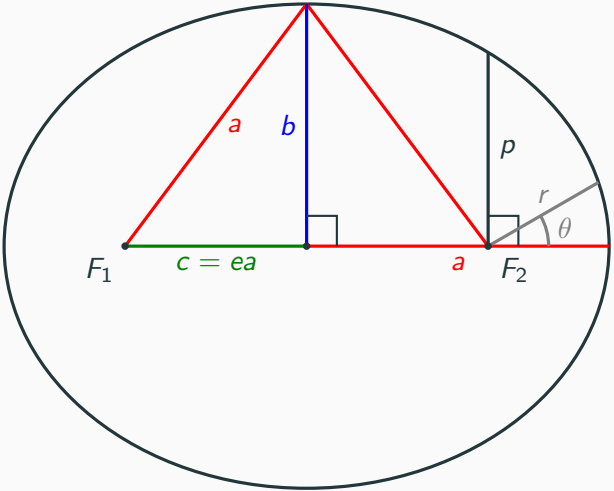
$$e = \frac{c}{a} = \text{Exzentrizität}$$

$$p = \textit{semi-latus rectum}$$

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a, \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Wie ergibt sich e aus a und b?

$$b^2 + c^2 = a^2 \implies e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$



Gesamtenergie

In Peri-/Apoapsis (nächster/entferntester Punkt) gilt $\dot{r} = 0$. Aus Ellipse ist klar $r_p = a(1-e), r_a = a(1+e)$.

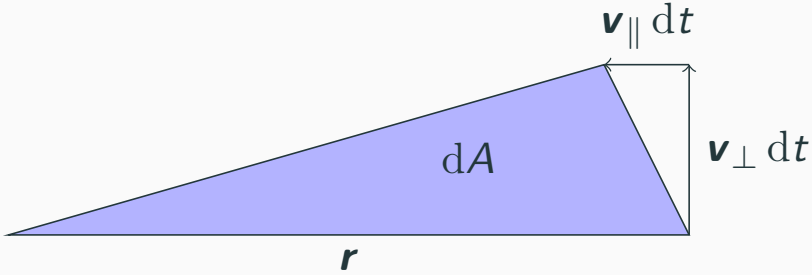
$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}\right) \\
&= \frac{L^2}{2\mu r_p^2} - \frac{GM\mu}{r_p} = \frac{L^2}{2\mu r_a^2} - \frac{GM\mu}{r_a} \\
\implies \frac{L^2}{2\mu} &= \left(E + \frac{GM\mu}{r_p}\right) r_p^2 \\
&\text{... \textbf{Übung} ...} \\
E &= \frac{-GM\mu}{2a}
\end{aligned}
$$

Vis-viva

$$E = \frac{-GM\mu}{2a} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM\mu}{r}$$

$$\implies v^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{GM}{a} = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Flächensatz



$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2} r \cdot v_{\perp}\,\mathrm{d}t = \frac{L}{2\mu}\,\mathrm{d}t$$

$$\implies \dot{A} = \frac{L}{2\mu} = \mathrm{const.} \implies \text{2. Keplersches Gesetz}$$

3. Keplersches Gesetz für eine Kreisbahn

Was ist die Periodendauer einer Kreisbahn im Abstand $r = a$?

$$F_G = F_{\mathrm{ZP}}$$

3. Keplersches Gesetz für eine Kreisbahn

Was ist die Periodendauer einer Kreisbahn im Abstand $r = a$?

$$
\begin{aligned}
F_G &= F_{\mathrm{ZP}} \\
\frac{GM\mu}{a^2} &= \mu\omega^2 a \\
a^3\omega^2 &= GM \\
\frac{a^3}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2} \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}
$$

3. Keplersches Gesetz

Fläche von Teilabschnitten gibt uns Zeitdauer:

$$A = \dot{A}t \implies t = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{2\mu A}{L}$$

Für eine ganze Ellipse $A = \pi ab$ und $L(a, b)$:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Übung: Führe die Rechnung für die Ellipsenbahn durch.

Hyperbel $e > 1, E > 0$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

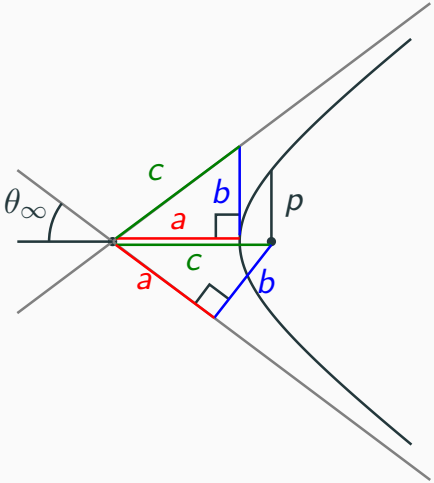
$$|XF_2| - |XF_1| = 2a$$

$$c = ea$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \iff b^2 = (e^2 - 1)a^2$$

$$r_{\min} = a(1 - e)$$

$$\theta_\infty = \pm \arccos\left(\frac{-1}{e}\right)$$



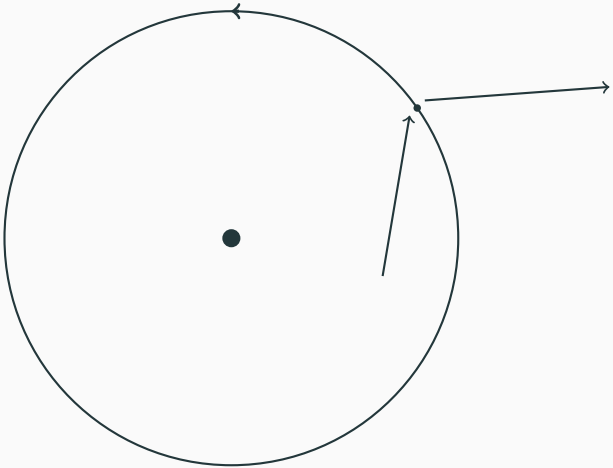
Himmelsmechanik: Hyperbel

$$E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 = \frac{-GM\mu}{2a} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM\mu}{r}$$
$$L = bv_\infty$$

Energie genau wie bei Ellipse (a negativ).

$\Longrightarrow$ Energie- und Impulserhaltung: Elastischer Stoß

Swing-By



Aus Sicht des Planeten eine hyperbolische Bahn.

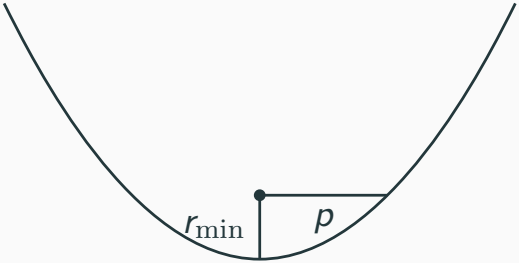
Parabel $e = 1, E = 0$

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta}$$

$$p = 2r_{\mathrm{min}}$$

$$\frac{L}{m} = v(r_{\mathrm{min}})r_{\mathrm{min}} = \sqrt{2GMr_{\mathrm{min}}}$$

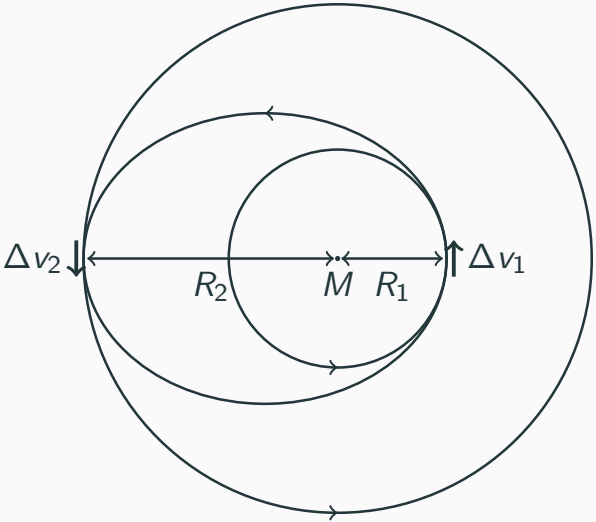
$$y = \frac{1}{4r_{\mathrm{min}}}x^2 - r_{\mathrm{min}}$$



Nur ein Freiheitsgrad (statt zwei).
Nicht wirklich analog zur Ellipsen- oder Hyperbelbahn.

Hohmann Transfer

- Was ist die große Halbachse a und Exzentrizität e der Ellipse?
- Wie groß muss Δv_1, Δv_2 sein?



Hohmann Transfer

$$2a = R_2 + R_1 \implies a = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$R_1 = a(1 - e) \implies e = 1 - \frac{R_1}{a} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$$

Hohmann Transfer

$$2a = R_2 + R_1 \implies a = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$R_1 = a(1-e) \implies e = 1 - \frac{R_1}{a} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$$

Aus Energieerhaltung

$$E_0 = \frac{-GM\mu}{2R_1} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM\mu}{R_1} \implies v = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}$$

$$E = \frac{-GM\mu}{2a} = \frac{1}{2}\mu\left(v + \Delta v_1\right)^2 - \frac{GM\mu}{R_1} \implies \left(v + \Delta v_1\right)^2 = GM\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a}\right)$$

Hohmann Transfer

$$(v + \Delta v_1)^2 = GM\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a}\right) = GM\left(\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_1 + R_2}\right) = \frac{2GMR_2}{R_1\left(R_1 + R_2\right)}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{2GMR_2}{R_1\left(R_1 + R_2\right)}} - \sqrt{\frac{GM}{R_1}} = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1\right)$$

Δv_2 ist die gleiche Situation, nur rückwarts. D.h. Vorzeichen drehen und $R_1 \leftrightarrow R_2$ tauschen:

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_2}}\right)$$

Komet - 3. Runde zur 38. IPhO 2007

Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn im Gravitationsfeld der Sonne. Seine Bahnebene fällt mit der Bahnebene der Erde zusammen. Im sonnennächsten Punkt hat der Komet einen Abstand von einem Drittel de Erdbahnradius zur Sonne R.

Bestimme die Anzahl der Tage, die sich der Komet innerhalb der Erdbahn befindet.

Eventuell kann das folgende unbestimmte Integral zur Lösung hilfreich sein:

$$\int \mathrm{d}x \frac{x}{\sqrt{x-a}} = \frac{2}{3}(x+2a)\sqrt{x-a} + \mathrm{const.} \quad \text{für } x > a.$$

Komet - 3. Runde zur 38. IPhO 2007

Parabolische Bahn $\implies E = 0$. Effektives Potential

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}$$

Periapsis $\dot{r} = 0 \implies \frac{L^2}{2\mu} = GM\mu r = GM\mu\alpha R$ mit $\alpha = \frac{1}{3}$.

Also

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{GM\mu\alpha R}{r^2} - \frac{GM\mu}{r} \implies \dot{r} = \sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{\alpha R}{r^2}}$$

Komet - 3. Runde zur 38. IPhO 2007

$$
\begin{aligned}
\frac{T}{2} &= \int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = \int_{\alpha R}^{R} \frac{1}{\dot{r}}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_{\alpha R}^{R} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{\alpha R}{r^2}}}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_{\alpha R}^{R} \frac{r}{\sqrt{r - \alpha R}}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{2}{3\sqrt{2GM}} \left[(x + 2\alpha R)\sqrt{x - \alpha R}) \right]_{\alpha R}^{R} \\
T &= \sqrt{2}GM \frac{10}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} R^{\frac{3}{2}} \approx 75\,\mathrm{d}
\end{aligned}
$$

Weiteres

- Kepler-Gleichung
- Roche-Grenze
- Lagrange-Punkte
- Drei-Körper Problem (Spezialfälle)
- Laplace-Runge-Lenz Vektor
- Virialsatz

Zwei-Körper $\leftrightarrow$ Ein-Körper Problem

Schwerpunkt

Positionen $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$
Kraft $\boldsymbol{F} = m_1 \ddot{\boldsymbol{x}}_1 = -m_2 \ddot{\boldsymbol{x}}_2$ (*actio gleich reactio* / Newton 3)

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2)\, \boldsymbol{R} &= m_1 \boldsymbol{x}_1 + m_2 \boldsymbol{x}_2 \\
(m_1 + m_2)\, \dot{\boldsymbol{R}} &= m_1 \dot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2 \dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{P} \\
(m_1 + m_2)\, \ddot{\boldsymbol{R}} &= m_1 \ddot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2 \ddot{\boldsymbol{x}}_2 = \dot{\boldsymbol{P}} = 0
\end{aligned}
$$

Im Schwerpunktsystem ($V = \dot{\boldsymbol{R}}$) ist $\boldsymbol{R} = 0, \dot{\boldsymbol{R}} = 0 \implies \boldsymbol{P} = 0$.

Reduzierte Masse

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= m_1 \dot{\boldsymbol{x}}_1 = -m_2 \dot{\boldsymbol{x}}_2 \\
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \\
\dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{\boldsymbol{x}}_1 - \dot{\boldsymbol{x}}_2 = \frac{\boldsymbol{p}}{m_1} + \frac{\boldsymbol{p}}{m_2} \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{\frac{1}{\mu}} \boldsymbol{p} \\
\implies \mu \dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{p}
\end{aligned}
$$

Übung: Drücke $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ durch $\boldsymbol{r}$ aus.

Energie

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{x}}_1^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_1 \dot{\boldsymbol{x}}_1)^2}{m_1} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_1}$$

$$\implies E_{\text{kin}} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_1} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_2} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu \dot{\boldsymbol{r}}^2$$

Übung: Wie sieht die Energie in anderen Systemen aus, d.h. $\dot{\boldsymbol{x}}' = \dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{x}}$? Nutze $\boldsymbol{P} = 0$ im Schwerpunktsystem.

Drehimpuls

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \mu \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$$

Recap

Zwei-Körper Problem $\rightarrow$ Ein-Körper Problem

$$
\begin{aligned}
M &= m_1 + m_2 \\
\mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \iff \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \\
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \\
\boldsymbol{p} &= m_1 \dot{\boldsymbol{x}}_1 = -m_2 \dot{\boldsymbol{x}}_2 = \mu \dot{\boldsymbol{r}} \\
\mu \ddot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{F} \\
\boldsymbol{L} &= \mu \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} \\
E_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2} \mu \dot{\boldsymbol{r}}^2
\end{aligned}
$$

Näherung

Wenn $m_1 \gg m_2$, dann $M = m_1 + m_2 \, (\approx m_1)$ und $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_2$.
Eine Masse steht im Grunde still.

Drehimpulserhaltung

Zentralkraft $\boldsymbol{F} \propto \boldsymbol{r} \propto \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \implies \ddot{\boldsymbol{r}} \propto \boldsymbol{r}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \mu \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} \\
\dot{\boldsymbol{L}} &= \mu \left(\underbrace{\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}}_{0} + \underbrace{\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}}_{0} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0$ für alle Vektoren.

$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{r} = 0 \implies$ Bewegung in einer Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{L}$.