Aufgabe 15 Ladungsquadrat (Kurzaufgabe)

(4. Runde zur 43. IPhO 2012)

Zwei Positronen und zwei Protonen befinden sich anfänglich in Ruhe an den Ecken eines Quadrates der Seitenlänge a. Dabei sitzen die Positronen auf gegenüberliegenden Ecken des Quadrates.

Schätze das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Positronen zu der Geschwindigkeit der Protonen ab, wenn sich die Teilchen sehr weit voneinander entfernt haben.

Lösung

Die Teilchen stoßen sich aufgrund der Coulombwechselwirkung ab. Da die Masse der Positronen nur etwa 1/2000-tel der Masse der Protonen beträgt, werden die Positronen so schnell beschleunigt, dass sich die Protonen während des Wegfliegens der Positronen kaum bewegen. Der Prozess kann also näherungsweise unterteilt in die Bewegung der Positronen bei ortsfesten Protonen und anschließend das Wegfliegen der Protonen.

Die kinetische Energie der Positronen lässt sich aus dem Energiesatz bestimmen. Anfänglich besitzt das System eine potentielle Energie E_{pot}, die sich aus der elektrostatischen (Coulomb-)kraft unter den einzelnen Teilchen ergibt zu

$$E_{\text{pot}} = 2\,\frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{2}\,a} + 2\,\frac{2\,e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,. \tag{15.1}$$

Dabei stellt der erste Term die potentielle Energie der beiden Paare sich jeweils auf dem Quadrat gegenüberliegender Teilchen gleicher Art dar und der zweite Term die potentielle Energie, die sich aus der Wechselwirkung mit den benachbarten Teilchen ergibt.

Wenn die Positronen wegfliegen, wird die potentielle Energie $E_{\bar{e}}$ aus der Wechselwirkung der Positronen untereinander und mit den benachbarten Protonen in kinetische Energie umgesetzt. Es ergibt sich daher

$$E_{\bar{e}} = \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{2}\,a} + \frac{4\,e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a} = \frac{1+4\,\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a} = 2\,\frac{1}{2}\,m_{\bar{e}}\,v_{\bar{e}}^2\,. \tag{15.2}$$

Bei dem anschließenden Wegfliegen der Protonen wird die verbleibende potentielle Energie E_p aus der Wechselwirkung der Protonen untereinander in kinetische Energie umgesetzt und es gilt

$$E_p = \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a} = 2\,\frac{1}{2}\,m_p\,v_p^2\,. \tag{15.3}$$

Damit gilt für das gesuchte Verhältnis der Geschwindigkeiten

$$\boxed{\frac{v_{\bar{e}}}{v_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_{\bar{e}}}}\,\sqrt{1+4\,\sqrt{2}} \approx 111}\,. \tag{15.4}$$