

Spezielle Relativitätstheorie

Vorbereitung auf die 2. Runde der IPhO Deutschland

Tiago Luis Camisón Grimbach

16. Oktober · 27. Oktober · 3. November 2026

IPhO Deutschland

Warum Relativität?

Relativistische Kinematik

Relativistische Dynamik

Lösungsstrategien

Übungsaufgaben

Was ihr nach 90 Minuten können sollt

1. Wissen, **welches Bezugssystem** eine Aufgabe einfach macht.
2. **Zeit, Längen und Geschwindigkeiten** richtig interpretieren.
3. Mit **Energie, Impuls und Invarianten** rechnen.
4. Ein Ergebnis durch **Einheiten und Grenzfälle** prüfen.

Merksatz

Nicht jede Herleitung muss auswendig sitzen. Wichtiger ist: Welche Formel gilt *wann*, und warum?

Warum Relativität?

Warum spezielle Relativitätstheorie?

Nach Galilei gilt bei Bewegung eines Beobachters mit u :

$$v'_x = v_x - u.$$

Warum spezielle Relativitätstheorie?

Nach Galilei gilt bei Bewegung eines Beobachters mit u :

$$v'_x = v_x - u.$$

Für einen Lichtstrahl mit $v_x = c$ ergäbe das $v'_x = c - u$.

Warum spezielle Relativitätstheorie?

Nach Galilei gilt bei Bewegung eines Beobachters mit u :

$$v'_x = v_x - u.$$

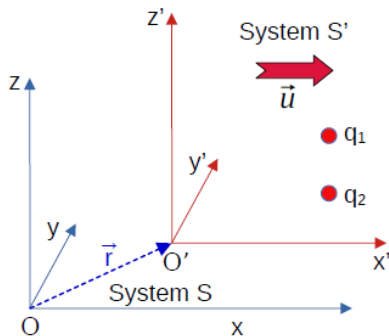
Für einen Lichtstrahl mit $v_x = c$ ergäbe das $v'_x = c - u$.

Aber die Elektrodynamik zeichnet eine Geschwindigkeit aus

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Welche Geschwindigkeit messen unterschiedliche Beobachter wirklich?

Beispiel: Elektrostatik in verschiedenen Bezugssystemen

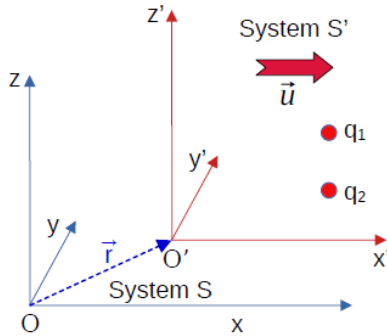


Nach Experimentalphysik II, Prof. Schöning (Heidelberg).

Eine Ladung — zwei Beschreibungen:

- Im einen System ruht die Ladung:
elektrisches Feld.

Beispiel: Elektrostatik in verschiedenen Bezugssystemen



Nach Experimentalphysik II, Prof. Schöning (Heidelberg).

Eine Ladung — zwei Beschreibungen:

- Im einen System ruht die Ladung:
elektrisches Feld.
- In einem anderen bewegt sie sich:
elektrisches und magnetisches Feld.

Magnetismus und Elektrizität sind eng mit der Wahl des Bezugssystems verknüpft.

Frage: Können die Gesetze des Elektromagnetismus in verschiedenen Systemen dieselben sein?

Das Äther-Konzept: ein historischer Ausweg

Die Vorstellung im 19. Jahrhundert: Wellen benötigen ein Medium. Licht sollte sich im hypothetischen *Lichtäther* ausbreiten.

Das Äther-Konzept: ein historischer Ausweg

Die Vorstellung im 19. Jahrhundert: Wellen benötigen ein Medium. Licht sollte sich im hypothetischen *Lichtäther* ausbreiten.

Eine experimentell überprüfbare Idee

Wenn sich die Erde relativ zum Äther bewegt, müsste ein sogenannter *Ätherwind* die Lichtlaufzeit in verschiedenen Richtungen beeinflussen.

Das Äther-Konzept: ein historischer Ausweg

Die Vorstellung im 19. Jahrhundert: Wellen benötigen ein Medium. Licht sollte sich im hypothetischen *Lichtäther* ausbreiten.

Eine experimentell überprüfbare Idee

Wenn sich die Erde relativ zum Äther bewegt, müsste ein sogenannter *Ätherwind* die Lichtlaufzeit in verschiedenen Richtungen beeinflussen.

Michelson–Morley (1887): Ein Interferometer vergleicht zwei zueinander senkrechte Lichtwege. Die erwartete Verschiebung der Interferenzstreifen blieb aus.

Merksatz

Das Nullresultat widersprach einfachen Äthermodellen. Es beweist für sich allein noch nicht die gesamte spezielle Relativitätstheorie.

Was stimmt nicht? Die historische Spannung

Klassische Mechanik

$$v'_x = v_x - u$$

Raum und Zeit gelten als absolut;
Geschwindigkeiten addieren sich
klassisch.

Maxwells Elektrodynamik

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Im Vakuum gibt es eine ausgezeichnete
Geschwindigkeit der elektromagnetischen
Wellen.

Was stimmt nicht? Die historische Spannung

Klassische Mechanik

$$v'_x = v_x - u$$

Raum und Zeit gelten als absolut;
Geschwindigkeiten addieren sich
klassisch.

Maxwells Elektrodynamik

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Im Vakuum gibt es eine ausgezeichnete
Geschwindigkeit der elektromagnetischen
Wellen.

Die Frage um 1900: Muss man die Gesetze der Elektrodynamik ändern, ein bevorzugtes Bezugssystem annehmen — oder Raum und Zeit neu denken?

1. **Relativitätsprinzip:** Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form.

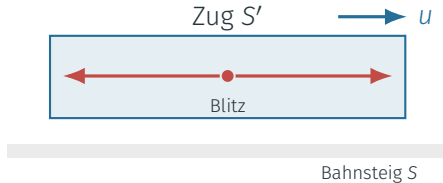
1. **Relativitätsprinzip:** Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form.
2. **Konstanz von c :** Alle Inertialbeobachter messen im Vakuum dieselbe Lichtgeschwindigkeit c .

1. **Relativitätsprinzip:** Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form.
2. **Konstanz von c :** Alle Inertialbeobachter messen im Vakuum dieselbe Lichtgeschwindigkeit c .

Merksatz

Wenn die Geschwindigkeitsaddition nicht mehr klassisch funktioniert, müssen unsere Vorstellungen von *Raum und Zeit* angepasst werden.

Ein Blitz in der Mitte eines Zuges



Im Zug:

- gleicher Abstand zu beiden Zugenden
- Licht in beide Richtungen mit c
- beide Ankünfte gleichzeitig

Kurz nachdenken

Sind die zwei *Ankunftsereignisse* auch für jemanden auf dem Bahnsteig gleichzeitig?

Gleichzeitigkeit ist nicht absolut

Im Bahnsteigsystem S seien beim Blitz beide Zugenden je d entfernt. Während das Licht läuft, bewegt sich der Zug mit u nach rechts.

$$\underbrace{ct_{\text{hinten}} = d - ut_{\text{hinten}}}_{\text{hinteres Ende}}, \quad \underbrace{ct_{\text{vorn}} = d + ut_{\text{vorn}}}_{\text{vorderes Ende}}.$$

Gleichzeitigkeit ist nicht absolut

Im Bahnsteigsystem S seien beim Blitz beide Zugenden je d entfernt. Während das Licht läuft, bewegt sich der Zug mit u nach rechts.

$$\underbrace{ct_{\text{hinten}} = d - ut_{\text{hinten}}}_{\text{hinteres Ende}}, \quad \underbrace{ct_{\text{vorn}} = d + ut_{\text{vorn}}}_{\text{vorderes Ende}}.$$

Daher

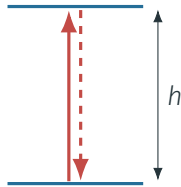
$$t_{\text{hinten}} = \frac{d}{c + u} \quad \text{und} \quad t_{\text{vorn}} = \frac{d}{c - u}.$$

Merksatz

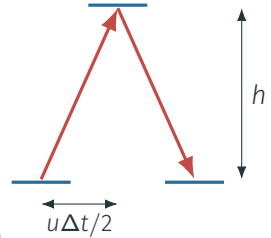
Im Zug *gleichzeitig*, am Bahnsteig *nicht*. Der Schluss benutzt, dass Licht auch in S mit c läuft; in der Galilei-Mechanik wäre Gleichzeitigkeit absolut.

Relativistische Kinematik

Eine Lichtuhr: Warum eine bewegte Uhr langsamer geht



Im Ruhesystem der Uhr $\Delta\tau = 2h/c$



Vom Bahnsteig gesehen

Idee: Längerer Lichtweg, aber in beiden Systemen dieselbe Lichtgeschwindigkeit c .

Für einen halben Umlauf der Uhr im Bahnsteigsystem:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2.$$

Zeitdilatation: Pythagoras und relative Zeit

Für einen halben Umlauf der Uhr im Bahnsteigsystem:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2.$$

Wegen $h = c\Delta\tau/2$ folgt:

$$\boxed{\Delta t = \gamma_u \Delta\tau}, \quad \boxed{\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}.$$

Merksatz

$\Delta\tau$ ist die **Eigenzeit**: Zeit auf einer Uhr, die bei beiden betrachteten Ereignissen dabei ist.
 $\Delta t \geq \Delta\tau$.

Ein wichtiger Denkfehler: »Wer geht denn nun langsamer?«

Aus Sicht des Zuges

Die Bahnsteiguhr ist bewegt und geht langsamer.

Aus Sicht des Bahnsteigs

Die Zuguhr ist bewegt und geht langsamer.

Ein wichtiger Denkfehler: »Wer geht denn nun langsamer?«

Aus Sicht des Zuges

Die Bahnsteiguhr ist bewegt und geht langsamer.

Aus Sicht des Bahnsteigs

Die Zuguhr ist bewegt und geht langsamer.

Kein Widerspruch: Um räumlich getrennte Uhren zu vergleichen, braucht man eine Definition von »gleichzeitig«. Diese hängt vom System ab.

Die Lorentztransformation: Werkzeug für Ereignisse

S' bewegt sich mit $+u$ gegenüber S in x -Richtung; bei $t = t' = 0$ fallen die Ursprünge zusammen.

$$\begin{aligned}x' &= \gamma_u(x - ut), \\t' &= \gamma_u \left(t - \frac{ux}{c^2} \right).\end{aligned}$$

Die Lorentztransformation: Werkzeug für Ereignisse

S' bewegt sich mit $+u$ gegenüber S in x -Richtung; bei $t = t' = 0$ fallen die Ursprünge zusammen.

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_u(x - ut), \\ t' &= \gamma_u \left(t - \frac{ux}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Umgekehrt ($S' \rightarrow S$):

$$x = \gamma_u(x' + ut'), \quad t = \gamma_u \left(t' + \frac{ux'}{c^2} \right).$$

Rezept: Erst S, S' und das Vorzeichen von u festlegen.

► Herleitung im Backup

Wann sind zwei Ereignisse gleichzeitig?

Für zwei Ereignisse gilt:

$$\Delta t' = \gamma_u \left(\Delta t - \frac{u \Delta x}{c^2} \right).$$

Wann sind zwei Ereignisse gleichzeitig?

Für zwei Ereignisse gilt:

$$\Delta t' = \gamma_u \left(\Delta t - \frac{u \Delta x}{c^2} \right).$$

Sind sie in S gleichzeitig ($\Delta t = 0$), aber an verschiedenen Orten ($\Delta x \neq 0$), dann ist im Allgemeinen

$$\Delta t' = -\gamma_u \frac{u \Delta x}{c^2} \neq 0.$$

Merksatz

Beim Transformieren von *Zeitabständen* unbedingt auch den Ortsabstand prüfen.

Längenkontraktion: Was heißt »Länge messen«?

Der Stab ruht in S' und ist dort L_0 lang (**Eigenlänge**). Seine Länge L in S wird durch *gleichzeitiges* Ablesen der Endpunkte ermittelt.

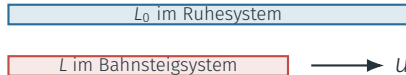
$$\Delta t = 0, \quad L_0 = \Delta x' = \gamma_u(\Delta x - u\Delta t) = \gamma_u L.$$

Längenkontraktion: Was heißt »Länge messen«?

Der Stab ruht in S' und ist dort L_0 lang (**Eigenlänge**). Seine Länge L in S wird durch *gleichzeitiges* Ablesen der Endpunkte ermittelt.

$$\Delta t = 0, \quad L_0 = \Delta x' = \gamma_u(\Delta x - u\Delta t) = \gamma_u L.$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma_u}.$$



► Details im Backup

Geschwindigkeiten addieren sich nicht einfach

Die Umkehrtransformation liefert für die Bewegung auf der x-Achse:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}.$$

Geschwindigkeiten addieren sich nicht einfach

Die Umkehrtransformation liefert für die Bewegung auf der x-Achse:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}.$$

Langsame Bewegungen:

$$v_x \approx v'_x + u.$$

Für Licht ($v'_x = c$):

$$v_x = \frac{c + u}{1 + u/c} = c.$$

Merksatz

Kein noch so schneller Zug macht aus einem Lichtstrahl ein Objekt mit $v > c$.

► Herleitung im Backup

Aufgabenstellung

Auf dem Weg zum Sternensystem Proxima Centauri begegnen Menschen einem Außerirdischen Raser, der mit $v = 0.7c$ auf sie zugeflogen kommt. Wie schnell vergeht für den Raser die Zeit relativ zum menschlichen Raumschiff? Wie sieht es aus Sicht des Außerirdischen aus?

Kurz nachdenken

Wessen Uhr ist jeweils die bewegte? Welche zwei Ereignisse vergleicht ihr?

1. **Systemwahl:** S ruht beim menschlichen Raumschiff; der Raser bewegt sich mit $|v| = 0,7c$.

1. **Systemwahl:** S ruht beim menschlichen Raumschiff; der Raser bewegt sich mit $|v| = 0,7c$.
2. **Lorentzfaktor:**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,7^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,51}} \approx 1,40.$$

1. **Systemwahl:** S ruht beim menschlichen Raumschiff; der Raser bewegt sich mit $|v| = 0,7c$.

2. **Lorentzfaktor:**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,7^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,51}} \approx 1,40.$$

3. **Bedeutung:** Zwischen zwei Ticks *der Raser-Uhr* gilt

$$\Delta t_{\text{Mensch}} = \gamma \Delta \tau_{\text{Raser}}, \quad \frac{\Delta \tau_{\text{Raser}}}{\Delta t_{\text{Mensch}}} = \sqrt{0,51} \approx 0,714.$$

1. **Systemwahl:** S ruht beim menschlichen Raumschiff; der Raser bewegt sich mit $|v| = 0,7c$.

2. **Lorentzfaktor:**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,7^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,51}} \approx 1,40.$$

3. **Bedeutung:** Zwischen zwei Ticks *der Raser-Uhr* gilt

$$\Delta t_{\text{Mensch}} = \gamma \Delta \tau_{\text{Raser}}, \quad \frac{\Delta \tau_{\text{Raser}}}{\Delta t_{\text{Mensch}}} = \sqrt{0,51} \approx 0,714.$$

4. **Umgekehrte Sicht:** Der Raser beschreibt die menschliche Uhr ebenso als bewegt und langsamer. Das ist kein Widerspruch (relative Gleichzeitigkeit).

Relativistische Dynamik

Was ändert sich bei Energie und Impuls?

In der Newtonmechanik gilt $p = mv$ und $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$. Bei hohen Geschwindigkeiten brauchen wir andere Ausdrücke.

Was ändert sich bei Energie und Impuls?

In der Newtonmechanik gilt $p = mv$ und $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$. Bei hohen Geschwindigkeiten brauchen wir andere Ausdrücke.

Relativistische Formeln für eine Masse m

$$\boxed{p = \gamma_v mv}, \quad \boxed{E = \gamma_v mc^2}, \quad \boxed{E_{\text{kin}} = (\gamma_v - 1)mc^2}.$$

- m ist die **Ruhemasse**, E die **gesamte Energie**.
- Für $v \ll c$ erhalten wir näherungsweise $p \approx mv$ und $E_{\text{kin}} \approx \frac{1}{2}mv^2$.

► Hintergrund und Herleitung

Wir setzen die Formeln aus der vorigen Folie ein:

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma_v^2 m^2 c^4 - \gamma_v^2 m^2 v^2 c^2.$$

Wir setzen die Formeln aus der vorigen Folie ein:

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma_v^2 m^2 c^4 - \gamma_v^2 m^2 v^2 c^2.$$

$$= \gamma_v^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^4.$$

Wir setzen die Formeln aus der vorigen Folie ein:

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma_v^2 m^2 c^4 - \gamma_v^2 m^2 v^2 c^2.$$

$$= \gamma_v^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^4.$$

Das wichtigste Rechenwerkzeug der Dynamik

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Die Kombination $E^2 - p^2 c^2$ ist in allen Inertialsystemen dieselbe.

► Warum invariant?

Was bringt uns diese Invariante?

Massives Teilchen in Ruhe

$p = 0$ und somit $E = mc^2$.

Photon

$m = 0$ und somit $E = pc$.

Stoß oder Zerfall

Immer Energie- und Impulserhaltung aufschreiben.

$$E_{\text{vor}} = E_{\text{nach}}, \quad \vec{p}_{\text{vor}} = \vec{p}_{\text{nach}}.$$

Merksatz

Wählt nach Möglichkeit das **Ruhesystem des Ausgangsteilchens**. Dort ist sein Anfangsimpuls null.

Kurzes Beispiel: Zerfall in zwei Photonen

Ein Teilchen der Masse M zerfällt *in Ruhe* in zwei Photonen.



Kurzes Beispiel: Zerfall in zwei Photonen

Ein Teilchen der Masse M zerfällt *in Ruhe* in zwei Photonen.



Impulserhaltung: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, also $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$. Für Photonen $E_i = c|\vec{p}_i|$, daher $E_1 = E_2$.

Kurzes Beispiel: Zerfall in zwei Photonen

Ein Teilchen der Masse M zerfällt *in Ruhe* in zwei Photonen.



Impulserhaltung: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, also $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$. Für Photonen $E_i = c|\vec{p}_i|$, daher $E_1 = E_2$.

Energieerhaltung: $Mc^2 = E_1 + E_2$, also

$$E_1 = E_2 = \frac{Mc^2}{2}.$$

► Bewegtes Mutterteilchen: Backup

Lösungsstrategien

Das Standardrezept für eine IPhO-Aufgabe

1. **Skizze:** Bewegungsrichtung, Ereignisse und Vorzeichen festlegen.
2. **System wählen:** Wo ruht das wichtige Objekt?
3. **Formeln nur mit Bedingungen:** Eigenzeit? Eigenlänge? Gleichzeitigkeit?
4. **Erhaltung + Invariante:** Oft einfacher als direkt transformieren.
5. **Kontrolle:** Einheiten, $v \ll c$, $v < c$, Energie > 0 .

Merksatz

Ein sauberer Ansatz ist in der IPhO viel wert — auch ohne fertige Endzahl.

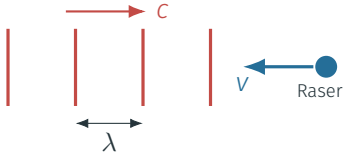
Übungsaufgaben

Aufgabenstellung

Um dem Außerirdischen, der mit $0.7c$ auf sie zurast, ihren Unmut klarzumachen, bedienen sich die Erdlinge einer Lichthupe. Sie senden Licht mit der Wellenlänge λ in Richtung des Rasers. Mit welcher Wellenlänge nimmt der Außerirdische das Licht auf?

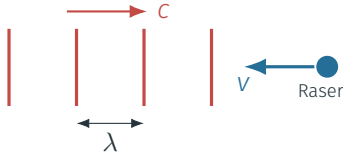
Kurz nachdenken

Was ist an der Bewegung des Rasers für das *Eintreffen aufeinanderfolgender Wellenberge* anders als bei einem ruhenden Beobachter?



Im menschlichen System:

- Abstand der Wellenberge: λ
- Wellen laufen nach rechts mit c
- Raser kommt ihnen mit v entgegen



Im menschlichen System:

- Abstand der Wellenberge: λ
- Wellen laufen nach rechts mit c
- Raser kommt ihnen mit v entgegen

Erster Schritt: Zeit zwischen zwei Ankünften in S

Annäherungsrate des Abstands in S: $c + v$ (nicht die im Raser-System gemessene Lichtgeschwindigkeit!).

$$\Delta t_S = \frac{\lambda}{c + v}.$$

Beide Empfangsereignisse liegen auf der Weltlinie des Rasers. **Daher** misst seine Uhr die Eigenzeit:

$$\Delta\tau_{\text{Raser}} = \frac{\Delta t_S}{\gamma_v} = \frac{\lambda}{\gamma_v(c + v)}.$$

Beide Empfangsereignisse liegen auf der Weltlinie des Rasers. **Daher** misst seine Uhr die Eigenzeit:

$$\Delta\tau_{\text{Raser}} = \frac{\Delta t_S}{\gamma_v} = \frac{\lambda}{\gamma_v(c+v)}.$$

Für die Frequenz, die er *selbst* misst:

$$f' = \frac{1}{\Delta\tau_{\text{Raser}}} = \gamma_v \frac{c+v}{\lambda} = \gamma_v(1+\beta)f, \quad f = \frac{c}{\lambda}.$$

Beide Empfangsereignisse liegen auf der Weltlinie des Rasers. **Daher** misst seine Uhr die Eigenzeit:

$$\Delta\tau_{\text{Raser}} = \frac{\Delta t_S}{\gamma_v} = \frac{\lambda}{\gamma_v(c+v)}.$$

Für die Frequenz, die er *selbst* misst:

$$f' = \frac{1}{\Delta\tau_{\text{Raser}}} = \gamma_v \frac{c+v}{\lambda} = \gamma_v(1+\beta)f, \quad f = \frac{c}{\lambda}.$$

Zwei Effekte: Wellenberge kommen im menschlichen System schneller an; die Raser-Uhr misst für diese beiden Ankünfte noch weniger Zeit.

Mit $\lambda' = c/f'$ und $\beta = v/c$:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{\gamma_v(1 + \beta)} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Mit $\lambda' = c/f'$ und $\beta = v/c$:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{\gamma_v(1 + \beta)} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Für $\beta = 0,7$:

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{0,3}{1,7}} \approx 0,420 \lambda.$$

Merksatz

Annäherung $\Rightarrow$ höhere Frequenz und **kürzere Wellenlänge** (Blauverschiebung).

► Alternative über Photonenenergie

Aufgabenstellung

Ein ruhendes Pion zerfällt in ein Myon und ein Neutrino. Das Myon hat die Ruhemasse m_μ und das Pion die Ruhemasse m_π . Nimm an, dass die Masse des Neutrinos zu vernachlässigen ist. Berechne die Energie des Myons und des Neutrinos nach dem Zerfall. Wie schnell ist das Myon?

Aufgabe angelehnt an *A Glimpse into the Special Theory of Relativity* von Süm Ainsaar.

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu.$$

Wir rechnen im Ruhesystem des Pions. Daher $p_\pi = 0$ und $E_\pi = m_\pi c^2$.

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu.$$

Wir rechnen im Ruhesystem des Pions. Daher $p_\pi = 0$ und $E_\pi = m_\pi c^2$.

Energieerhaltung

$$m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu.$$

Impulserhaltung

$$\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\mu = p_\nu = p.$$

Für das (masselose) Neutrino: $E_\nu = pc$. Für das Myon: $E_\mu^2 = m_\mu^2 c^4 + p^2 c^2$.

Für das (masselose) Neutrino: $E_\nu = pc$. Für das Myon: $E_\mu^2 = m_\mu^2 c^4 + p^2 c^2$. Also

$$E_\mu^2 = m_\mu^2 c^4 + E_\nu^2.$$

Aus der Energieerhaltung folgt zugleich

$$E_\mu = m_\pi c^2 - E_\nu.$$

Pionzerfall · 3. Energien wirklich ausrechnen

Einsetzen in die Energie-Impuls-Beziehung:

$$(m_\pi c^2 - E_\nu)^2 = m_\mu^2 c^4 + E_\nu^2.$$

Pionzerfall · 3. Energien wirklich ausrechnen

Einsetzen in die Energie-Impuls-Beziehung:

$$(m_\pi c^2 - E_\nu)^2 = m_\mu^2 c^4 + E_\nu^2.$$

Quadrat ausmultiplizieren; E_ν^2 fällt auf beiden Seiten weg:

$$m_\pi^2 c^4 - 2m_\pi c^2 E_\nu = m_\mu^2 c^4.$$

Pionzerfall · 3. Energien wirklich ausrechnen

Einsetzen in die Energie-Impuls-Beziehung:

$$(m_\pi c^2 - E_\nu)^2 = m_\mu^2 c^4 + E_\nu^2.$$

Quadrat ausmultiplizieren; E_ν^2 fällt auf beiden Seiten weg:

$$m_\pi^2 c^4 - 2m_\pi c^2 E_\nu = m_\mu^2 c^4.$$

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2.$$

Pionzerfall · 3. Energien wirklich ausrechnen

Einsetzen in die Energie-Impuls-Beziehung:

$$(m_\pi c^2 - E_\nu)^2 = m_\mu^2 c^4 + E_\nu^2.$$

Quadrat ausmultiplizieren; E_ν^2 fällt auf beiden Seiten weg:

$$m_\pi^2 c^4 - 2m_\pi c^2 E_\nu = m_\mu^2 c^4.$$

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2.$$

Rückeinsetzen in $E_\mu = m_\pi c^2 - E_\nu$ liefert:

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2.$$

Pionzerfall · 4. Geschwindigkeit des Myons

Aus $p = \gamma m v$ und $E = \gamma m c^2$ folgt für jedes massive Teilchen:

$$v = pc^2/E.$$

Pionzerfall · 4. Geschwindigkeit des Myons

Aus $p = \gamma m v$ und $E = \gamma m c^2$ folgt für jedes massive Teilchen:

$$v = pc^2/E.$$

Wir wissen: $p_\mu = p_\nu = E_\nu/c$. Also

$$v_\mu = \frac{(E_\nu/c)c^2}{E_\mu} = c \frac{E_\nu}{E_\mu}.$$

Pionzerfall · 4. Geschwindigkeit des Myons

Aus $p = \gamma mv$ und $E = \gamma mc^2$ folgt für jedes massive Teilchen:

$$v = pc^2/E.$$

Wir wissen: $p_\mu = p_\nu = E_\nu/c$. Also

$$v_\mu = \frac{(E_\nu/c)c^2}{E_\mu} = c \frac{E_\nu}{E_\mu}.$$

$$v_\mu = c \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}.$$

Merksatz

Check: $m_\mu \rightarrow m_\pi$ ergibt $v_\mu \rightarrow 0$. Außerdem gilt $0 < v_\mu < c$ für $0 < m_\mu < m_\pi$.

► Alternative mit Viererimpulsen

Aufgabe: Uhr auf einem Kreisorbit

Aufgabenstellung

Ein Raumschiff bewegt sich gleichförmig auf einem Kreisorbit mit der Periode $t = 3 \text{ h}$. Eine Uhr im Inneren des Raumschiffs behauptet, der Orbit würde nur $\tau = 30 \text{ min}$ dauern. Bestimme den Radius R des Orbits.

Aufgabe aus *A Glimpse into the Special Theory of Relativity* von Süm Ainsaar.

Das Inertialsystem des Kreismittelpunkts misst eine Umlaufzeit t . Die mitfliegende Uhr misst für dieselbe Bahn τ .

Das Inertialsystem des Kreismittelpunkts misst eine Umlaufzeit t . Die mitfliegende Uhr misst für dieselbe Bahn τ . Trotz der beschleunigten Bewegung gilt entlang der Bahn lokal $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Kreisorbit · 1. Von der Bordzeit zur Geschwindigkeit

Das Inertialsystem des Kreismittelpunkts misst eine Umlaufzeit t . Die mitfliegende Uhr misst für dieselbe Bahn τ . Trotz der beschleunigten Bewegung gilt entlang der Bahn lokal $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Da die *Bahngeschwindigkeit im Betrag konstant* ist:

$$\tau = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = c\sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{t}\right)^2}}.$$

Merksatz

Die Uhr ist nicht inertial, aber ihre Eigenzeit erhält man entlang ihrer Weltlinie. Wir vernachlässigen Gravitation.

Der Weg pro Umlauf ist $2\pi R$, also $v = 2\pi R/t$. Damit

$$R = \frac{vt}{2\pi} = \boxed{\frac{c}{2\pi} \sqrt{t^2 - \tau^2}}.$$

Der Weg pro Umlauf ist $2\pi R$, also $v = 2\pi R/t$. Damit

$$R = \frac{vt}{2\pi} = \boxed{\frac{c}{2\pi} \sqrt{t^2 - \tau^2}}.$$

Mit $t = 10\,800\text{ s}$ und $\tau = 1800\text{ s}$:

$$R = \frac{c}{2\pi} \sqrt{(10\,800\text{ s})^2 - (1800\text{ s})^2} \approx \boxed{5,08 \cdot 10^{11}\text{ m}}.$$

Plausibilität: $v \approx 0,986c$; ein großer Radius ist bei dieser Geschwindigkeit und einer Umlaufdauer von drei Stunden zu erwarten.

► Eigenzeit-Herleitung

Kinematik

- $\gamma_v = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$
- $\Delta t = \gamma_v \Delta \tau$
- $L = L_0 / \gamma_v$ (mit richtiger Messung!)
- Lorentztransformation und Geschwindigkeitsaddition

Dynamik

- $p = \gamma_v m v$
- $E = \gamma_v m c^2$
- $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$
- Energie *und* Impuls erhalten

Merksatz

Systeme benennen, Ereignisse trennen, sauber rechnen, Grenzfälle kontrollieren.

- **Noch einmal selbst:** Aufgaben zunächst ohne Musterlösung probieren.
- **Nachfragen:** Im Anhang stehen ausführliche Herleitungen und alternative Lösungswege.
- **Vertiefung:** Minkowski-Diagramme, Vierervektoren, allgemeine Zerfälle.

Viel Erfolg in der 2. Runde!

Backup · Die Idee: Raum und Zeit gehören zusammen

In der SRT betrachtet man ein Ereignis als einen **Vierervektor**:

$$X^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Backup · Die Idee: Raum und Zeit gehören zusammen

In der SRT betrachtet man ein Ereignis als einen **Vierervektor**:

$$X^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Der gewöhnliche räumliche Abstand ist nicht invariant. Aber für zwei Ereignisse ist es das **Raumzeitintervall**:

$$(\Delta X)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Backup · Die Idee: Raum und Zeit gehören zusammen

In der SRT betrachtet man ein Ereignis als einen **Vierervektor**:

$$X^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Der gewöhnliche räumliche Abstand ist nicht invariant. Aber für zwei Ereignisse ist es das **Raumzeitintervall**:

$$(\Delta X)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Die geometrische Idee

Ein Wechsel des Inertialsystems mischt Zeit und Ort, *erhält aber das Raumzeitintervall*.

Ähnlich wie eine Drehung im Raum die Länge eines Vektors erhält.

Backup · Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls

Auf der Weltlinie eines massiven Teilchens gilt

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_v} \quad (\text{Eigenzeit}).$$

Daraus folgt die **Vierergeschwindigkeit**:

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \gamma_v \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Backup · Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls

Auf der Weltlinie eines massiven Teilchens gilt

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_v} \quad (\text{Eigenzeit}).$$

Daraus folgt die **Vierergeschwindigkeit**:

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \gamma_v \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Multiplizieren mit der Ruhemasse liefert den **Viererimpuls**:

$$P^\mu = mU^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

mit

$$E = \gamma_v mc^2, \quad \vec{p} = \gamma_v m \vec{v}.$$

Backup · Lorentzboost: eine Matrix für alles

Das System S' bewegt sich mit $+u$ entlang der x -Achse relativ zu S .

$$\beta = \frac{u}{c}, \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Backup · Lorentzboost: eine Matrix für alles

Das System S' bewegt sich mit $+u$ entlang der x -Achse relativ zu S .

$$\beta = \frac{u}{c}, \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Die Lorentztransformation lautet in Matrixform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}}_{\text{in } S'} = \underbrace{\gamma_u \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_x(u)} \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}}_{\text{in } S}.$$

Backup · Lorentzboost: eine Matrix für alles

Das System S' bewegt sich mit $+u$ entlang der x -Achse relativ zu S .

$$\beta = \frac{u}{c}, \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Die Lorentztransformation lautet in Matrixform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}}_{\text{in } S'} = \underbrace{\gamma_u \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_x(u)} \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}}_{\text{in } S}.$$

Genau dieselbe Matrix transformiert den Viererimpuls:

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \end{pmatrix} = \Lambda_x(u) \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \end{pmatrix}.$$

Umkehrung: $u \mapsto -u$.

Backup · Das Skalarprodukt erklärt die Invarianten

Das **Minkowski-Skalarprodukt** zweier Vierervektoren lautet

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

Backup · Das Skalarprodukt erklärt die Invarianten

Das **Minkowski-Skalarprodukt** zweier Vierervektoren lautet

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

Ein Lorentzboost erhält dieses Skalarprodukt. Für den Viererimpuls gilt daher:

$$P^2 = P \cdot P = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2.$$

Backup · Das Skalarprodukt erklärt die Invarianten

Das **Minkowski-Skalarprodukt** zweier Vierervektoren lautet

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

Ein Lorentzboost erhält dieses Skalarprodukt. Für den Viererimpuls gilt daher:

$$P^2 = P \cdot P = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2.$$

Massives Teilchen

$$P^2 = m^2 c^2 > 0.$$

Photon

$$P^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = pc.$$

Der Trick: Nicht nur P^2 , sondern auch $P_A \cdot P_B$ ist unabhängig vom Bezugssystem.

Backup · Zerfälle: erst erhalten, dann quadrieren

Für einen Zweikörperzerfall $A \rightarrow B + C$ gilt die **Viererimpulserhaltung**:

$$P_A = P_B + P_C \quad \Rightarrow \quad P_C = P_A - P_B.$$

Backup · Zerfälle: erst erhalten, dann quadrieren

Für einen Zweikörperzerfall $A \rightarrow B + C$ gilt die **Viererimpulserhaltung**:

$$P_A = P_B + P_C \quad \Rightarrow \quad P_C = P_A - P_B.$$

Statt vier Komponenten auszurechnen, quadrieren wir *einmal*:

$$\underbrace{P_C^2}_{m_C^2 c^2} = \underbrace{P_A^2}_{m_A^2 c^2} + \underbrace{P_B^2}_{m_B^2 c^2} - 2P_A \cdot P_B.$$

Backup · Zerfälle: erst erhalten, dann quadrieren

Für einen Zweikörperzerfall $A \rightarrow B + C$ gilt die **Viererimpulserhaltung**:

$$P_A = P_B + P_C \quad \Rightarrow \quad P_C = P_A - P_B.$$

Statt vier Komponenten auszurechnen, quadrieren wir *einmal*:

$$\underbrace{P_C^2}_{m_C^2 c^2} = \underbrace{P_A^2}_{m_A^2 c^2} + \underbrace{P_B^2}_{m_B^2 c^2} - 2P_A \cdot P_B.$$

Im Ruhesystem des Mutterteilchens ist

$$P_A = (m_A c, \vec{0}), \quad P_A \cdot P_B = m_A E_B.$$

Daraus folgt sofort:

$$E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} c^2$$

Backup · Pionzerfall in wenigen Zeilen

Das ruhende Pion zerfällt gemäß

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu, \quad m_\nu \simeq 0.$$

Backup · Pionzerfall in wenigen Zeilen

Das ruhende Pion zerfällt gemäß

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu, \quad m_\nu \simeq 0.$$

$$P_\nu = P_\pi - P_\mu$$

und damit

$$0 = P_\nu^2 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu.$$

Backup · Pionzerfall in wenigen Zeilen

Das ruhende Pion zerfällt gemäß

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu, \quad m_\nu \simeq 0.$$

$$P_\nu = P_\pi - P_\mu$$

und damit

$$0 = P_\nu^2 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu.$$

Direkt folgt:

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2, \quad E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

Backup · Pionzerfall in wenigen Zeilen

Das ruhende Pion zerfällt gemäß

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu, \quad m_\nu \simeq 0.$$

$$P_\nu = P_\pi - P_\mu$$

und damit

$$0 = P_\nu^2 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu.$$

Direkt folgt:

$$\boxed{E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2}, \quad \boxed{E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2}$$

Weil die Impulsbeträge gleich sind, gilt $p_\mu = E_\nu/c$ und somit

$$v_\mu = \frac{p_\mu c^2}{E_\mu} = \boxed{c \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}}.$$

Backup · Bewegter Zerfall: einfach zurückboosten

Ein Teilchen der Masse M zerfällt in seinem Ruhesystem S_* in zwei Photonen entlang $\pm x$:

$$E_{\pm,*} = \frac{Mc^2}{2}, \quad p_{\pm,x,*} = \pm \frac{Mc}{2}.$$

Backup · Bewegter Zerfall: einfach zurückboosten

Ein Teilchen der Masse M zerfällt in seinem Ruhesystem S_* in zwei Photonen entlang $\pm x$:

$$E_{\pm,*} = \frac{Mc^2}{2}, \quad p_{\pm,x,*} = \pm \frac{Mc}{2}.$$

Im Labor fliegt das Mutterteilchen mit $+u$. Mit dem **inversen Boost** folgt:

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= \gamma_u (E_{\pm,*} + up_{\pm,x,*}) \\ &= \boxed{\gamma_u \frac{Mc^2}{2} (1 \pm \beta)}. \end{aligned}$$

Backup · Bewegter Zerfall: einfach zurückboosten

Ein Teilchen der Masse M zerfällt in seinem Ruhesystem S_* in zwei Photonen entlang $\pm x$:

$$E_{\pm,*} = \frac{Mc^2}{2}, \quad p_{\pm,x,*} = \pm \frac{Mc}{2}.$$

Im Labor fliegt das Mutterteilchen mit $+u$. Mit dem **inversen Boost** folgt:

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= \gamma_u (E_{\pm,*} + up_{\pm,x,*}) \\ &= \boxed{\gamma_u \frac{Mc^2}{2} (1 \pm \beta)}. \end{aligned}$$

Für $\beta = 0,8$ und $\gamma_u = 5/3$:

$$\boxed{E_+ = \frac{3}{2}Mc^2}, \quad \boxed{E_- = \frac{1}{6}Mc^2}.$$

Kontrolle:

$$E_+ + E_- = \gamma_u Mc^2, \quad \frac{E_+ - E_-}{c} = \gamma_u Mu.$$

Backup · Zwei Photonen: Auch ihre Summe hat eine Masse

Beide Photonen sind masselos:

$$p_1^2 = p_2^2 = 0.$$

Aber ihre gemeinsame invariante Masse M muss nicht null sein.

Backup · Zwei Photonen: Auch ihre Summe hat eine Masse

Beide Photonen sind masselos:

$$p_1^2 = p_2^2 = 0.$$

Aber ihre gemeinsame invariante Masse M muss nicht null sein.

$$M^2 c^2 = (p_1 + p_2)^2 = 2 p_1 \cdot p_2.$$

Zwischen den Flugrichtungen liege der Winkel θ . Dann gilt

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{E_1 E_2}{c^2} - \frac{E_1 E_2}{c^2} \cos \theta.$$

Backup · Zwei Photonen: Auch ihre Summe hat eine Masse

Beide Photonen sind masselos:

$$p_1^2 = p_2^2 = 0.$$

Aber ihre gemeinsame invariante Masse M muss nicht null sein.

$$M^2 c^2 = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2.$$

Zwischen den Flugrichtungen liege der Winkel θ . Dann gilt

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{E_1 E_2}{c^2} - \frac{E_1 E_2}{c^2} \cos \theta.$$

Invariante Masse eines Zwei-Photonen-Systems

$$M^2 c^4 = 2E_1 E_2 (1 - \cos \theta)$$

Bei parallelen Photonen ist $M = 0$.

Bei entgegengesetzten Richtungen und $E_1 = E_2 = E$ gilt dagegen $Mc^2 = 2E$.

Backup · Die schöne Geometrie: Rapidity

Setze statt der Geschwindigkeit $\beta = u/c$ die **Rapidity** χ :

$$\beta = \tanh \chi, \quad \gamma_u = \cosh \chi, \quad \gamma_u \beta = \sinh \chi.$$

Backup · Die schöne Geometrie: Rapidität

Setze statt der Geschwindigkeit $\beta = u/c$ die **Rapidität** χ :

$$\beta = \tanh \chi, \quad \gamma_u = \cosh \chi, \quad \gamma_u \beta = \sinh \chi.$$

Dann wird die Boostmatrix zu einer *hyperbolischen Drehung*:

$$\Lambda_x(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi \\ -\sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix}.$$

Backup · Die schöne Geometrie: Rapidität

Setze statt der Geschwindigkeit $\beta = u/c$ die **Rapidität** χ :

$$\beta = \tanh \chi, \quad \gamma_u = \cosh \chi, \quad \gamma_u \beta = \sinh \chi.$$

Dann wird die Boostmatrix zu einer *hyperbolischen Drehung*:

$$\Lambda_x(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi \\ -\sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix}.$$

Aufeinanderfolgende kollineare Boosts addieren ihre Rapiditäten:

$$\chi_{\text{ges}} = \chi_1 + \chi_2.$$

Daraus folgt die relativistische Geschwindigkeitsaddition:

$$w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}.$$

Lorentzboosts verhalten sich wie Drehungen – aber mit der Geometrie der Minkowski-Raumzeit.

Backup · Lorentztransformation herleiten I

Gesucht ist die Transformation für S' mit Geschwindigkeit u relativ zu S . **Linearität und die Weltlinie des Ursprungs** $x = ut$ legen nahe:

$$x' = A(x - ut), \quad t' = B(t - kx).$$

Backup · Lorentztransformation herleiten I

Gesucht ist die Transformation für S' mit Geschwindigkeit u relativ zu S . **Linearität und die Weltlinie des Ursprungs** $x = ut$ legen nahe:

$$x' = A(x - ut), \quad t' = B(t - kx).$$

Ein Lichtsignal nach rechts erfüllt $x = ct$ und $x' = ct'$:

$$A(c - u) = cB(1 - kc).$$

Für ein Lichtsignal nach links ($x = -ct$, $x' = -ct'$):

$$A(c + u) = cB(1 + kc).$$

Backup · Lorentztransformation herleiten I

Gesucht ist die Transformation für S' mit Geschwindigkeit u relativ zu S . **Linearität und die Weltlinie des Ursprungs** $x = ut$ legen nahe:

$$x' = A(x - ut), \quad t' = B(t - kx).$$

Ein Lichtsignal nach rechts erfüllt $x = ct$ und $x' = ct'$:

$$A(c - u) = cB(1 - kc).$$

Für ein Lichtsignal nach links ($x = -ct$, $x' = -ct'$):

$$A(c + u) = cB(1 + kc).$$

Addieren gibt $A = B$; Subtrahieren gibt $k = u/c^2$.

$$\boxed{x' = A(x - ut), \quad t' = A(t - ux/c^2)}.$$

Backup · Lorentztransformation herleiten II

Die inverse Transformation muss aufgrund der Gleichberechtigung der Inertialsysteme dieselbe Form mit $u \rightarrow -u$ besitzen:

$$x = A(x' + ut'), \quad t = A(t' + ux'/c^2).$$

Backup · Lorentztransformation herleiten II

Die inverse Transformation muss aufgrund der Gleichberechtigung der Inertialsysteme dieselbe Form mit $u \rightarrow -u$ besitzen:

$$x = A(x' + ut'), \quad t = A(t' + ux'/c^2).$$

Einsetzen der Vorwärtsformel in $x = A(x' + ut')$:

$$x = A^2 \left[(x - ut) + u \left(t - \frac{ux}{c^2} \right) \right] = A^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) x.$$

Backup · Lorentztransformation herleiten II

Die inverse Transformation muss aufgrund der Gleichberechtigung der Inertialsysteme dieselbe Form mit $u \rightarrow -u$ besitzen:

$$x = A(x' + ut'), \quad t = A(t' + ux'/c^2).$$

Einsetzen der Vorwärtsformel in $x = A(x' + ut')$:

$$x = A^2 \left[(x - ut) + u \left(t - \frac{ux}{c^2} \right) \right] = A^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) x.$$

Also $A^2(1 - u^2/c^2) = 1$. Wir wählen $A > 0$ und erhalten

$$A = \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Backup · Längenkontraktion ohne Abkürzungen

Sei der Stab im Ruhesystem S' durch Endpunkte $x'_1 = 0$ und $x'_2 = L_0$ beschrieben. In S werden die zwei Positionen *zur gleichen Zeit* t gemessen:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0, \quad L = x_2 - x_1.$$

Backup · Längenkontraktion ohne Abkürzungen

Sei der Stab im Ruhesystem S' durch Endpunkte $x'_1 = 0$ und $x'_2 = L_0$ beschrieben. In S werden die zwei Positionen *zur gleichen Zeit t* gemessen:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0, \quad L = x_2 - x_1.$$

Für die Ereignisse »hinteres Ende ablesen« und »vorderes Ende ablesen«:

$$\Delta x' = \gamma_u(\Delta x - u\Delta t) = \gamma_u L.$$

Da $\Delta x' = L_0$, folgt $L = L_0/\gamma_u$.

Merksatz

Würde man die Endpunkte in S zu *verschiedenen Zeiten* ablesen, wäre Δx keine gemessene Länge.

Backup · Geschwindigkeitsaddition herleiten

Die Umkehrtransformation lautet

$$x = \gamma_u(x' + ut'), \quad t = \gamma_u \left(t' + \frac{ux'}{c^2} \right).$$

Backup · Geschwindigkeitsaddition herleiten

Die Umkehrtransformation lautet

$$x = \gamma_u(x' + ut'), \quad t = \gamma_u \left(t' + \frac{ux'}{c^2} \right).$$

Für zwei benachbarte Ereignisse auf der Bahn eines Teilchens:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma_u(dx' + udt')}{\gamma_u(dt' + udx'/c^2)}.$$

Teilen von Zähler und Nenner durch dt' :

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}.$$

Transversal: $v_y = v'_y / [\gamma_u(1 + uv'_x/c^2)]$ und analog für z.

Zwei infinitesimal benachbarte Ereignisse auf einer Teilchenbahn haben in S :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Dieser Ausdruck ist *Lorentz-invariant*. Im momentanen Ruhesystem des Teilchens ist $d\vec{x}' = 0$, daher $ds^2 = c^2 d\tau^2$.

Zwei infinitesimal benachbarte Ereignisse auf einer Teilchenbahn haben in S :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Dieser Ausdruck ist *Lorentz-invariant*. Im momentanen Ruhesystem des Teilchens ist $d\vec{x}' = 0$, daher $ds^2 = c^2 d\tau^2$. Im System S mit $v^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2$:

$$c^2 d\tau^2 = (c^2 - v^2) dt^2, \quad \boxed{d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Für konstantes $|v|$ auf einer Kreisbahn folgt $\tau = \int_0^t dt' / \gamma_v = t / \gamma_v$.

Backup · Warum ist das Raumzeitintervall invariant?

In einer Raumrichtung (Boost u):

$$x' = \gamma_u(x - ut), \quad ct' = \gamma_u(ct - \beta x), \quad \beta = u/c.$$

Backup · Warum ist das Raumzeitintervall invariant?

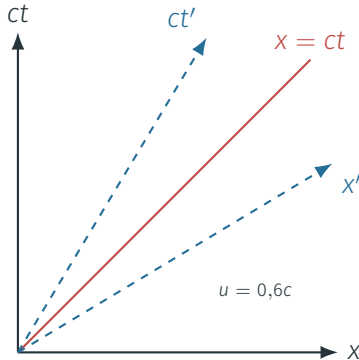
In einer Raumrichtung (Boost u):

$$x' = \gamma_u(x - ut), \quad ct' = \gamma_u(ct - \beta x), \quad \beta = u/c.$$

$$\begin{aligned}(ct')^2 - (x')^2 &= \gamma_u^2 [(ct - \beta x)^2 - (x - \beta ct)^2] \\ &= \gamma_u^2 (1 - \beta^2) (c^2 t^2 - x^2) \\ &= c^2 t^2 - x^2.\end{aligned}$$

Dasselbe gilt für *Differenzen* zweier Ereignisse und in drei Raumdimensionen.

Backup · Minkowski-Diagramm (korrekte Achsen)



- ct' -Achse: Weltlinie des bewegten Ursprungs $x = ut$.
- x' -Achse: $t' = 0$, also $ct = (u/c)x$.
- Lichtgerade: $x = ct$ in beiden Systemen.

Merksatz

Ein Boost ist *keine* gewöhnliche Drehung auf kariertem Papier.

Backup · Woher kommt der relativistische Impuls?

Ein mathematisch konsistenter Weg nutzt die **Eigenzeit** und Vierervektoren (nicht nötig für die Aufgaben des Hauptvortrags):

$$X^\mu = (ct, \vec{x}), \quad U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \gamma_v(c, \vec{v}).$$

Backup · Woher kommt der relativistische Impuls?

Ein mathematisch konsistenter Weg nutzt die **Eigenzeit** und Vierervektoren (nicht nötig für die Aufgaben des Hauptvortrags):

$$X^\mu = (ct, \vec{x}), \quad U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \gamma_v(c, \vec{v}).$$

Mit Ruhemasse m bilden wir den Viererimpuls

$$P^\mu = mU^\mu = (\gamma_v mc, \gamma_v m\vec{v}).$$

Seine räumliche Komponente ist

$$\boxed{\vec{p} = \gamma_v m\vec{v}}, \quad E = cP^0 = \gamma_v mc^2.$$

Warum das hilft: P^μ transformiert wie X^μ ; die Erhaltung aller vier Komponenten gilt konsistent in jedem Inertialsystem.

Entlang der Bewegungsrichtung:

$$dE_{\text{kin}} = Fdx = vdp, \quad p = \gamma_v mv.$$

Entlang der Bewegungsrichtung:

$$dE_{\text{kin}} = Fdx = vdp, \quad p = \gamma_v mv.$$

Wegen $d\gamma_v/dv = \gamma_v^3 v/c^2$ und $d(\gamma_v v)/dv = \gamma_v^3$:

$$dE_{\text{kin}} = mv\gamma_v^3 dv = mc^2 d\gamma_v.$$

Entlang der Bewegungsrichtung:

$$dE_{\text{kin}} = Fdx = vdp, \quad p = \gamma_v mv.$$

Wegen $d\gamma_v/dv = \gamma_v^3 v/c^2$ und $d(\gamma_v v)/dv = \gamma_v^3$:

$$dE_{\text{kin}} = mv\gamma_v^3 dv = mc^2 d\gamma_v.$$

Ab Ruhe ($\gamma = 1$, $E_{\text{kin}} = 0$):

$$E_{\text{kin}} = mc^2 \int_1^{\gamma_v} d\gamma = (\gamma_v - 1)mc^2.$$

Achtung: Das Arbeitsintegral liefert die *kinetische*, nicht direkt die Ruheenergie. [▶ Zur Hauptfolie](#)

Backup · Warum $E^2 - p^2 c^2$ invariant ist

Für die Komponenten $P^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$ gelten bei einem Boost in x-Richtung:

$$E' = \gamma_u(E - u p_x), \quad p'_x = \gamma_u \left(p_x - \frac{u E}{c^2} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z.$$

Backup · Warum $E^2 - p^2 c^2$ invariant ist

Für die Komponenten $P^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$ gelten bei einem Boost in x-Richtung:

$$E' = \gamma_u(E - up_x), \quad p'_x = \gamma_u \left(p_x - \frac{uE}{c^2} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z.$$

Dann

$$(E')^2 - c^2(p'_x)^2 = \gamma_u^2 [(E - up_x)^2 - (cp_x - uE/c)^2] = E^2 - c^2 p_x^2.$$

Auch p_y, p_z bleiben bei diesem Boost unverändert.

$$\boxed{E'^2 - c^2 |\vec{p}'|^2 = E^2 - c^2 |\vec{p}|^2 = m^2 c^4}.$$

Fragestellung

Übungsaufgabe: Was ist, wenn das Teilchen zuvor im Laborsystem die Geschwindigkeit $v = 0.8c$ hatte? Berechne sowohl aus dem Schwerpunktsystem, als auch über Vierervektoren

Präzisierung für die Rechnung: Das Mutterteilchen der Masse M bewegt sich mit $+v$ entlang der gemeinsamen Photonenachse; seine beiden Photonen fliegen entgegengesetzt entlang dieser Achse.

Kurz nachdenken

Kann man die beiden Photonenergien sogar ganz ohne Vierervektoren nur mit Energie- und Impulserhaltung im Labor finden?

Backup · Zusatzaufgabe: direkter Laborweg

Bei $\beta = 0,8$ gilt $\gamma = 1/\sqrt{1 - 0,8^2} = 5/3$. Im Labor besitzt das Mutterteilchen

$$E_A = \gamma Mc^2 = \frac{5}{3}Mc^2, \quad p_A = \gamma Mv = \frac{4}{3}Mc.$$

Backup · Zusatzaufgabe: direkter Laborweg

Bei $\beta = 0,8$ gilt $\gamma = 1/\sqrt{1 - 0,8^2} = 5/3$. Im Labor besitzt das Mutterteilchen

$$E_A = \gamma M c^2 = \frac{5}{3} M c^2, \quad p_A = \gamma M v = \frac{4}{3} M c.$$

Für Photonen nach $+x$ beziehungsweise $-x$ folgt:

$$\underbrace{E_+ + E_- = \frac{5}{3} M c^2}_{\text{Energieerhaltung}}, \quad \underbrace{\frac{E_+}{c} - \frac{E_-}{c} = \frac{4}{3} M c}_{\text{Impulserhaltung}}.$$

Backup · Zusatzaufgabe: direkter Laborweg

Bei $\beta = 0,8$ gilt $\gamma = 1/\sqrt{1-0,8^2} = 5/3$. Im Labor besitzt das Mutterteilchen

$$E_A = \gamma Mc^2 = \frac{5}{3}Mc^2, \quad p_A = \gamma Mv = \frac{4}{3}Mc.$$

Für Photonen nach $+x$ beziehungsweise $-x$ folgt:

$$\underbrace{E_+ + E_- = \frac{5}{3}Mc^2}_{\text{Energieerhaltung}}, \quad \underbrace{\frac{E_+}{c} - \frac{E_-}{c} = \frac{4}{3}Mc}_{\text{Impulserhaltung}}.$$

Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen ergeben

$$\boxed{E_+ = \frac{3}{2}Mc^2}, \quad \boxed{E_- = \frac{1}{6}Mc^2}.$$

Backup · Zwei Photonen aus bewegtem Mutterteilchen

Im Ruhesystem von A mit Masse M fliegen zwei Photonen entlang $\pm x$:

$$E_{1*} = E_{2*} = \frac{Mc^2}{2}, \quad p_{1*} = +\frac{Mc}{2}, \quad p_{2*} = -\frac{Mc}{2}.$$

Backup · Zwei Photonen aus bewegtem Mutterteilchen

Im Ruhesystem von A mit Masse M fliegen zwei Photonen entlang $\pm x$:

$$E_{1*} = E_{2*} = \frac{Mc^2}{2}, \quad p_{1*} = +\frac{Mc}{2}, \quad p_{2*} = -\frac{Mc}{2}.$$

Das Labor bewegt sich relativ dazu so, dass A im Labor mit $+u$ fliegt. Die Umkehrtransformation für die Photonenergien ist

$$E_1 = \gamma_u(E_{1*} + up_{1*}), \quad E_2 = \gamma_u(E_{2*} + up_{2*}).$$

Backup · Zwei Photonen aus bewegtem Mutterteilchen

Im Ruhesystem von A mit Masse M fliegen zwei Photonen entlang $\pm x$:

$$E_{1*} = E_{2*} = \frac{Mc^2}{2}, \quad p_{1*} = +\frac{Mc}{2}, \quad p_{2*} = -\frac{Mc}{2}.$$

Das Labor bewegt sich relativ dazu so, dass A im Labor mit $+u$ fliegt. Die Umkehrtransformation für die Photonenergien ist

$$E_1 = \gamma_u(E_{1*} + up_{1*}), \quad E_2 = \gamma_u(E_{2*} + up_{2*}).$$

$$E_1 = \gamma_u \frac{Mc^2}{2} (1 + \beta),$$

$$E_2 = \gamma_u \frac{Mc^2}{2} (1 - \beta).$$

Für $\beta = 0,8$: $\gamma_u = 5/3$, also $E_1 = 3Mc^2/2$ und $E_2 = Mc^2/6$. **Check:** $E_1 + E_2 = \gamma_u Mc^2$. [► Zur Hauptfolie](#)

Backup · Dopplereffekt alternativ über Photonenergie

Die Menschen ruhen in S. Das Licht fliegt nach +x:

$$p_x = \frac{E}{c}, \quad E = hf.$$

Der Raser bewegt sich mit $-v$ in S, sein Ruhesystem ist gegenüber S also ein Boost mit $u = -v$.

Backup · Dopplereffekt alternativ über Photonenergie

Die Menschen ruhen in S. Das Licht fliegt nach +x:

$$p_x = \frac{E}{c}, \quad E = hf.$$

Der Raser bewegt sich mit $-v$ in S, sein Ruhesystem ist gegenüber S also ein Boost mit $u = -v$. Die Transformation der Energie lautet allgemein $E' = \gamma_u(E - up_x)$. Daher

$$E' = \gamma_v(E + vp_x) = \gamma_v E(1 + \beta).$$

Backup · Dopplereffekt alternativ über Photonenergie

Die Menschen ruhen in S. Das Licht fliegt nach +x:

$$p_x = \frac{E}{c}, \quad E = hf.$$

Der Raser bewegt sich mit $-v$ in S, sein Ruhesystem ist gegenüber S also ein Boost mit $u = -v$. Die Transformation der Energie lautet allgemein $E' = \gamma_u(E - up_x)$. Daher

$$E' = \gamma_v(E + vp_x) = \gamma_v E(1 + \beta).$$

Weil $E' = hf'$:

$$\boxed{\frac{f'}{f} = \gamma_v(1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}}.$$

Der Wellenberg-Weg im Hauptvortrag braucht diese Transformation nicht.

Backup · Pionzerfall, alternative Methode mit Viererimpulsen

$P_\pi = P_\mu + P_\nu$ und $P_\nu^2 = 0$ (masseloses Neutrino). Also

$$0 = (P_\pi - P_\mu)^2 = P_\pi^2 + P_\mu^2 - 2P_\pi \cdot P_\mu.$$

Backup · Pionzerfall, alternative Methode mit Viererimpulsen

$P_\pi = P_\mu + P_\nu$ und $P_\nu^2 = 0$ (masseloses Neutrino). Also

$$0 = (P_\pi - P_\mu)^2 = P_\pi^2 + P_\mu^2 - 2P_\pi \cdot P_\mu.$$

Im Pionruhesystem:

$$P_\pi = (m_\pi c, \vec{0}), \quad P_\pi^2 = m_\pi^2 c^2, \quad P_\mu^2 = m_\mu^2 c^2, \quad P_\pi \cdot P_\mu = m_\pi E_\mu.$$

Daher

$$\boxed{E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2}, \quad \boxed{E_\nu = m_\pi c^2 - E_\mu}.$$

Die reine Energie-/Impulsmethode ist leichter zugänglich, aber langsamer.

Backup · Allgemeiner Zweikörperzerfall $A \rightarrow B + C$

Mutterteilchen A ruht, $m_A \geq m_B + m_C$. Energie-/Impulserhaltung:

$$E_B + E_C = m_A c^2, \quad |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C| = p.$$

Backup · Allgemeiner Zweikörperzerfall $A \rightarrow B + C$

Mutterteilchen A ruht, $m_A \geq m_B + m_C$. Energie-/Impulserhaltung:

$$E_B + E_C = m_A c^2, \quad |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C| = p.$$

$$E_B^2 = m_B^2 c^4 + p^2 c^2, \quad E_C^2 = m_C^2 c^4 + p^2 c^2. \text{ Also}$$

$$E_B^2 - E_C^2 = (m_B^2 - m_C^2) c^4.$$

Backup · Allgemeiner Zweikörperzerfall $A \rightarrow B + C$

Mutterteilchen A ruht, $m_A \geq m_B + m_C$. Energie-/Impulserhaltung:

$$E_B + E_C = m_A c^2, \quad |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C| = p.$$

$$E_B^2 = m_B^2 c^4 + p^2 c^2, \quad E_C^2 = m_C^2 c^4 + p^2 c^2. \text{ Also}$$

$$E_B^2 - E_C^2 = (m_B^2 - m_C^2) c^4.$$

Mit $E_B + E_C = m_A c^2$ und $(E_B - E_C)(E_B + E_C) = E_B^2 - E_C^2$:

$$E_B - E_C = \frac{m_B^2 - m_C^2}{m_A} c^2.$$

Daraus

$$\boxed{E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} c^2}, \quad \boxed{E_C = \frac{m_A^2 + m_C^2 - m_B^2}{2m_A} c^2}.$$

Für $v \ll c$

$$\gamma_v = 1 + \frac{1}{2}(v/c)^2 + O((v/c)^4)$$

$$E_{\text{kin}} \approx \frac{1}{2}mv^2.$$

Für $pc \gg mc^2$

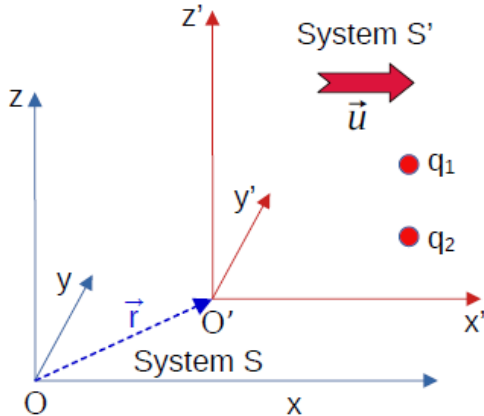
$$E \approx pc, \quad E_{\text{kin}} \approx E.$$

Aber $E_{\text{kin}} \neq E$ bei $m > 0$.

- Zeitdilatation nur mit korrekt identifizierter Eigenzeit.
- Längenkontraktion nur mit *gleichzeitiger* Ortsmessung.
- Bei Zerfällen immer *Energie und Vektorimpuls* erhalten.

- Hypothese des 19. Jahrhunderts: Elektromagnetische Wellen breiten sich in einem Lichtäther aus.
- Dann sollten Interferometer bei Bewegung der Erde relativ zum Äther Richtungsunterschiede der Lichtlaufzeiten feststellen können.
- Michelson und Morley fanden 1887 nicht die erwartete Verschiebung der Interferenzstreifen.

Einordnung: Das Nullresultat schränkte einfache Äthertheorien ein, beweist für sich allein aber nicht sämtliche Postulate der SRT.



Felder hängen vom System ab:

- In einem System kann eine Ladung ruhen und ein elektrisches Feld erzeugen.
- In einem anderen System bewegt sie sich und erzeugt auch ein Magnetfeld.
- Die Lorentzkraft lautet $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

Skizze nach Experimentalphysik II, Universität Heidelberg (Prof. Schöning).

$$\gamma_u = (1 - u^2/c^2)^{-1/2},$$

$$x' = \gamma_u(x - ut),$$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2},$$

$$E = \gamma_v mc^2,$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4,$$

$$\Delta t = \gamma_u \Delta \tau, \quad L = L_0 / \gamma_u,$$

$$t' = \gamma_u(t - ux/c^2),$$

$$\vec{p} = \gamma_v m \vec{v},$$

$$E_{\text{kin}} = (\gamma_v - 1)mc^2,$$

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - |\Delta \vec{x}|^2.$$

Merksatz

Die Bedingungen für Zeit- und Längenmessungen gehören zur Formel dazu.