

Hydrostatik & Hydrodynamik

Vortragsreihe zur Vorbereitung auf die 2. Runde des
Auswahlwettbewerbs zur IPhO 2027

Gliederung und Ziele des Vortrags

- Hydrostatik
 - Druck, Auftrieb
 - (Kapillareffekte)
- Hydrodynamik
 - Dynamischer Druck, Kontinuitätsgleichung
 - (Laminare Strömungen, viskose Fluide)
- Aufgaben mit Lösungsskizzen
- Kenntnis der grundlegenden Zusammenhänge
 - Anwendung der Basics/Formeln
 - Transfer auf schwierigere/unbekannte Problemstellungen (IPhO-Aufgaben)
- Wissen/Formeln aus Folien (oder Vorkenntnisse) und Training mit Aufgaben

Hydrostatischer Druck

- Ohne äußere Kraft überall gleich im Medium

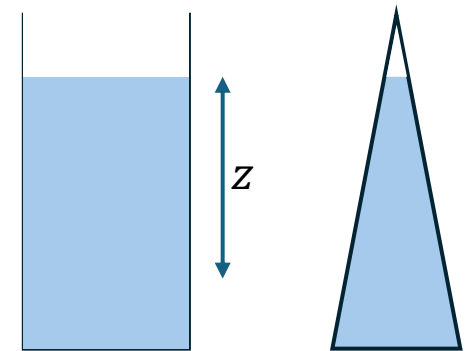
→ Auslösende Kräfte: Gewichtskraft, Trägheitskräfte (bsp. Zentrifuge), „direkte“ Kraft auf die Wände (bsp. Kolben, Luftdruck)

- Skalare Größe, wirkt in alle Richtungen (Pascal'sches Prinzip)

→ Beispiel: Schweredruck des Wassers ist bei gleicher Höhe überall gleich

Zunahme bei steigender Tiefe z : $dp = \frac{dF}{A} = \frac{g}{A} dm = \frac{g\rho}{A} dV = g\rho dz$

Integration: $p(z) = p_0 + g\rho z$



Hydrostatischer Druck

- Zunahme bei steigender Tiefe z : $dp = \frac{dF}{A} = \frac{g}{A} dm = \frac{g\rho}{A} dV = g\rho dz$

→ Integration: $p(z) = p_0 + g\rho z$

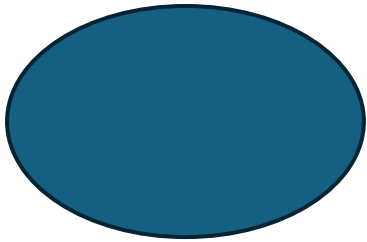
Beispielaufgaben:

A1*: Berechne die Tiefe, in der ein hydrostatischer Druck von 1 bar (10^5 Pa) herrscht. Wie hoch ist der Gesamtdruck? Wie könnte man den Luftdruck mithilfe einer Vakuumpumpe messen?

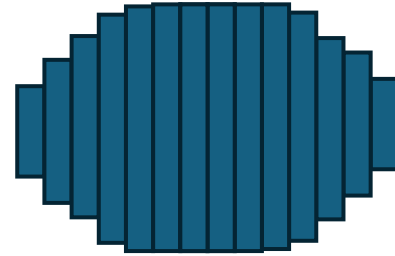
A2****: Finde einen Ausdruck für den Luftdruck in Abhängigkeit der Höhe. Die Temperatur ist als konstant anzunehmen.

Auftriebskraft

- Kraft als Konsequenz der Druckdifferenz auf Ober- und Unterseite eines Körpers
→ Zerlege einen Körper in viele Quader mit kleiner Querschnittsfläche



$$V = \sum h_i A_i$$



→ Kraft durch Druckdifferenz: $F = \sum (p_{U,i} - p_{O,i}) A_i = \sum g \rho (z_{U,i} - z_{O,i}) A_i = g \rho \sum h_i A_i$

→ $F_A = g \rho V$

- Für einen eingetauchten Körper erhält man eine Beschleunigung: $a = \frac{F_G - F_A}{m}$

→ $a = g \left(1 - \frac{\rho_{\text{Fluid}}}{\rho_{\text{Körper}}} \right)$

Auftriebskraft

→ Kraft durch Druckdifferenz: $F = \sum (p_{U,i} - p_{O,i}) A_i = \sum g \rho (z_{U,i} - z_{O,i}) A_i = g \rho \sum h_i A_i$

→ $F_A = g \rho V$

• Für einen eingetauchten Körper erhält man eine Beschleunigung: $a = \frac{F_G - F_A}{m}$

→ $a = g \left(1 - \frac{\rho_{\text{Fluid}}}{\rho_{\text{Körper}}} \right)$

Beispielaufgaben:

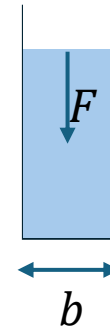
A3*: Welche Auftriebskraft erfährt ein vollständig in Wasser getauchter Körper ($V = 10 \text{ cm}^3$; $\rho = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)? Welcher Anteil ist oberhalb der Wasseroberfläche bei einem Kräftegleichgewicht?

A4**: Wie kann man das Volumen und die Dichte eines homogenen, beliebig geformten Körpers mithilfe einer Waage bestimmen (bsp. wenn die Daten für A3 nicht gegeben sind)?

Kapillareffekte

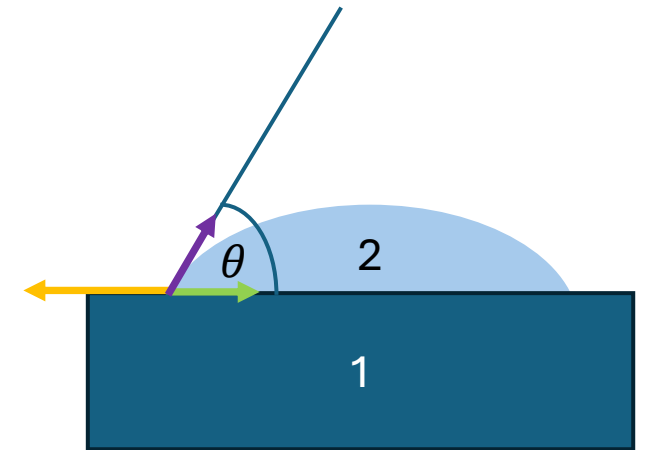
- Für IPhO-Auswahlwettbewerb weniger relevant
- Grundlegendes Konzept: Vergrößerung einer (Phasen-)Grenzfläche ist energetisch i.d.R. unvorteilhaft.

→ Oberflächenspannung $\sigma := \frac{dW}{dA}$ oder $\sigma := \frac{F}{2b}$



- Flüssigkeitstropfen zeigen auf Oberflächen charakteristische Formen

→ Benetzungswinkel $\cos(\theta) = \frac{\sigma_1 - \sigma_{12}}{\sigma_2}$



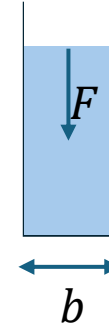
$$0 = \sigma_1 - \sigma_{12} - \sigma_2 \cos(\theta)$$

- Krümmung erzeugt Druckdifferenz (konvex > konkav)

→ Bsp.: Wassertropfen mit Radius R : $p_{\text{in}} - p_0 = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{dW(r=R)}{dr} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dW(r=R)}{dA} 8\pi R = \frac{2\sigma}{R}$

Kapillareffekte

- Oberflächenspannung $\sigma := \frac{dW}{dA}$ oder $\sigma := \frac{F}{2b}$
- Krümmung erzeugt Druckdifferenz (konvex>konkav)
→ Bsp.: Wassertropfen mit Radius R : $p_{\text{in}} - p_0 = \frac{2\sigma}{R}$



Beispielaufgaben:

A5**: Zeige, dass beide Definitionen für σ äquivalent sind.

A6***: Zeige, dass (zylinderförmige) Würstchen eher längs als quer aufplatzen.

A7****: Wie hoch würde Wasser in Glaskapillaren mit 1 mm Durchmesser steigen?

A8****: Ein Cellulose-Ultrafilter lässt laut Hersteller keine Partikel >450 nm durch. Um dies zu überprüfen, wird der nasse Filter einseitig mit Druckluft beschickt. Bei welcher Druckdifferenz sollte der Filter die Luft durchlassen?

Dynamischer Druck und Kontinuität

- Entlang einer Stromlinie bleibt die Energie erhalten

→ Gesamtenergie = kinetische E. + Verschiebearbeit + Lageenergie

→ $E = \frac{1}{2}mv^2 + pV + mgh = \text{const.}$ oder $\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gh = \text{const.}$ (bei Inkompressibilität)

→ für $v = 0$ aus Hydrostatik bekannt

- Inkompressibilität fordert einen konstanten Massestrom

→ Fließgeschwindigkeit ändert sich mit dem Querschnitt (Düseneffekt)

→ $\text{const.} = \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho A \frac{dl}{dt} = \rho Av;$ also $v_1 A_1 = v_2 A_2$

Dynamischer Druck und Kontinuität

- Entlang einer Stromlinie bleibt die Energie erhalten

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + pV + mgh = \text{const.} \text{ oder } \boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gh = \text{const.}} \text{ (bei Inkompressibilität)}$$

- Inkompressibilität fordert einen konstanten Massestrom:

$$\boxed{v_1 A_1 = v_2 A_2}$$

Beispielaufgaben:

A9**: Bei einem sehr großen Fass wird 1 m unter dem Wasserspiegel ein 0.25 cm^2 großes Loch geschlagen. Wie schnell (in m/s und l/min) fließt das Wasser raus (Randeffekte und Strömungswiderstand vernachlässigt)? Wie ändern sich beide Werte, wenn das Loch 10 cm unter dem Wasserspiegel geschlagen wird, aber wie zuvor 1 m unter dem Wasserspiegel gemessen wird? Wie ändert sich die Form des Wasserstrahls?

A10**: Welchen Unterdruck kann man mit einer Leitungswasser-betriebenen Wasserstrahlpumpe in etwa erzeugen ($\dot{V} = 0.2 \frac{\text{l}}{\text{s}}$, $A = 0.1 \text{ cm}^2$)?

Euler-Gleichung (1D) und Viskosität

- Druckgradienten führen zu Strömungen

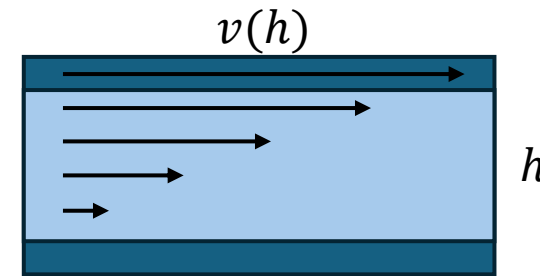
$$\rightarrow dm \, a = \rho \, dx \, dy \, dz \, \dot{v}_x = dF = \frac{dp}{dx} dx \, dA$$

$$\rightarrow \rho \dot{v}_x = \frac{dp}{dx}$$

- „Zähflüssigkeit“ erzeugt Kraft bei Scherung

$$\rightarrow F = \eta A \frac{dv}{dh}$$

- η ist bei newtonschen Fluiden unabhängig von $\frac{dv}{dh}$



- Kugelförmige Körper erfahren bei laminaren Strömungen eine Reibungskraft $F = 6\pi\eta Rv$

Euler-Gleichung (1D) und Viskosität

- Druckgradienten führen zu Strömungen: $\rho \dot{v}_x = \frac{dp}{dz}$
- „Zähflüssigkeit“ erzeugt Kraft bei Scherung : $F = \eta A \frac{dv}{dh}$
- Kugelförmige Körper erfahren bei laminaren Strömungen eine Reibungskraft $F = 6\pi\eta Rv$

Beispielaufgaben:

A11**: Wie kann man mit einer Stoppuhr, einer Kugel (m, ρ sind bekannt), und einem Messzylinder die Viskosität einer Flüssigkeit bestimmen?

A12*****: Für den Volumenstrom (laminare Strömung) in einem Rohr mit Länge L und Radius R gilt bei einer Druckdifferenz Δp zwischen Anfang und Ende $\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p$. Leite die Formel her.

A13***: Mit einer Pumpe können durch Rohr 1 2 l/min und durch Rohr 2 5 l/min gepumpt werden. Wie hoch ist der Volumenstrom bei Neben- bzw. Hintereinanderschaltung der Rohre?

Weitere Aufgaben

IPhO-Zweitrundenaufgaben der letzten Jahre: Zu den [Aufgaben](#) auf der Website

- A3 2026, A1 2024, A8 2024, A1 2023, A10 2023, A1 2022, A1 2020, A1 2019

Erste Runde

→ ggf. etwas stöbern

LEIFI-Physik

→ Nach Themenschwerpunkt

Aufgaben mit Lösungsbesprechung

Beispielaufgaben:

- A1
- A3, A4
- A9
- A13

IPhO 2. Runde:

- A1, 2019
- A1, 2020
- A8, 2024

Lösungsskizzen

Hinweis:

Die folgenden Lösungsskizzen können Fehler enthalten. Sie sind als Orientierungshilfe zur Bearbeitung der Fragen bzw. zur Selbstüberprüfung zu verstehen, nicht als unanfechtbare Musterlösung! Einige Probleme sind bewusst schwerer als typische IPhO-Zweitrundenaufgaben gestellt und sollen eher als Herausforderung bzw. zum Erlernen einiger ggf. unbekannter physikalischen Prinzipien herangezogen werden!

Lösungsskizzen

A1*: Berechne die Tiefe, in der ein hydrostatischer Druck von 1 bar (10^5 Pa) herrscht. Wie hoch ist der Gesamtdruck? Wie könnte man den Luftdruck mithilfe einer Vakuumpumpe messen?

Lösungsvorschlag:

$$h = \frac{p_h}{\rho g} = \frac{100000 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10 \text{ m s}^{-2}} = 10 \text{ m}$$
$$p_{ges} = p_h + p_0 = 1 \text{ bar} + 1 \text{ bar} = 2 \text{ bar}$$

Mit einem langen „Strohalm“ wird oben Wasser angesaugt. Im Idealfall herrscht oben ein definierter Druck p , sodass bei gemessener Steighöhe h gilt: $p_0 = p + \rho gh$. Der „definierte Druck“ kann bsp. An einigen Pumpen eingestellt werden oder ist durch den Dampfdruck des Wassers limitiert

Lösungsskizzen

A2****: Finde einen Ausdruck für den Luftdruck in Abhängigkeit der Höhe. Die Temperatur ist als konstant anzunehmen.

Lösungsvorschlag:

Herleitung analog zur Folie, aber ρ hängt von p ab!

$$pV = nRT \leftrightarrow p = \frac{nRT}{V} = \frac{\rho RT}{M} \leftrightarrow \rho = \frac{Mp}{RT}$$

Einsetzen in $dp = -\rho g dz$ (beachte, dass z die Tiefe ist):

$$\begin{aligned} dp &= -\frac{Mp}{RT} g dz \leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz = -\frac{Mg}{RT} dh \\ \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} &= \int_{h_0}^h -\frac{Mg}{RT} dh = \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT} h \end{aligned}$$

Lösungsskizzen

A3*: Welche Auftriebskraft erfährt ein vollständig in Wasser getauchter Körper ($V = 10 \text{ cm}^3$; $\rho = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)? Welcher Anteil ist oberhalb der Wasseroberfläche bei einem Kräftegleichgewicht?

Lösungsvorschlag:

$$F_A = \rho_{\text{Wasser}} g V = 1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 0.1 \text{ N}$$

$$\rho_{\text{Wasser}} g V_{in} = \rho g V \leftrightarrow \frac{V_{in}}{V} = \frac{\rho}{\rho_{\text{Wasser}}} = 0.8$$

20% ist demnach über der Oberfläche!

Lösungsskizzen

A4**: Wie kann man das Volumen und die Dichte eines homogenen, beliebig geformten Körpers mithilfe einer Waage bestimmen (bsp. wenn die Daten für A3 nicht gegeben sind)?

Lösungsvorschlag:

Ein Gefäß mit Wasser wird auf eine Waage gestellt. Der Körper wird in das Gefäß gelegt. Die Masse m lässt sich ablesen (nach Tarieren). Je nach Dichte wird der Körper mit einem dünnen Gegenstand in Wasser gehalten bzw. vollständig untergetaucht, dabei wird eine Kraft F (def. Nach unten gerichtet) ausgeübt. Es gilt

$$F_A = F + F_G$$

Die Waage misst $F + F_G$, also F_A . Das Volumen ist also $V = \frac{F_A}{\rho_{\text{Wasser}} g} = \frac{\text{Wert}}{\rho_{\text{Wasser}}}$. Die Dichte folgt aus $\rho = \frac{m}{V}$.

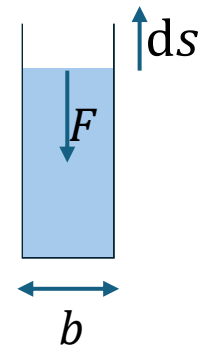
Lösungsskizzen

A5**: Zeige, dass beide Definitionen für σ äquivalent sind.

Lösungsvorschlag:

Die Fläche, die vergrößert wird, ist die „Vorderseite“ und die Rückseite und demnach ist

$$\sigma := \frac{dW}{dA} = \frac{F \, ds}{2 \, b \, ds} = \frac{F}{2b}$$



Lösungsskizzen

A6***: Zeige, dass (zylinderförmige) Würstchen eher längs als quer aufplatzen.

Lösungsvorschlag:

Es wird ein Hohlzylinder mit Radius R , Länge $L \gg R$ und Wandstärke s (sehr klein) betrachtet. Die Spannung σ (nicht mit Oberflächenspannung zu verwechseln) (Kraft pro Fläche), die durch einen inneren Druck p ausgeübt wird, ist:

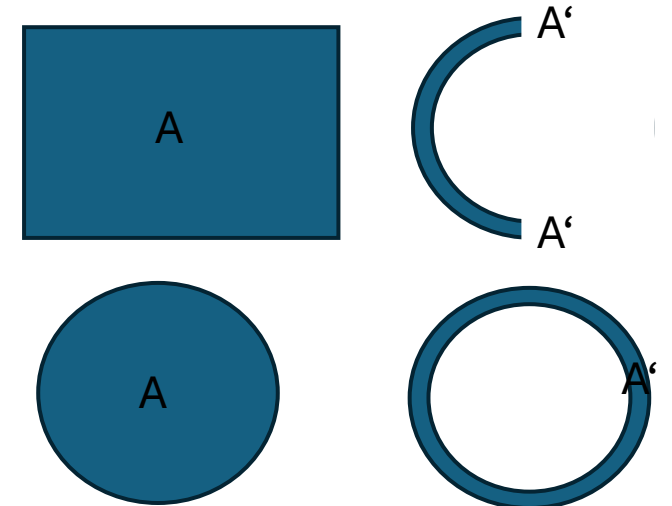
Längs:

$$\sigma_l = \frac{F}{A'_l} = p \frac{A_l}{A'_l} = p \frac{2RL}{2sL} = p \frac{R}{s}$$

Quer:

$$\sigma_q = \frac{F}{A'_q} = p \frac{A_q}{A'_q} = p \frac{\pi R^2}{2\pi R s} = p \frac{R}{2s}$$

Da $\sigma_l = 2\sigma_q$, ist ein Aufplatzen längs wahrscheinlicher



Lösungsskizzen

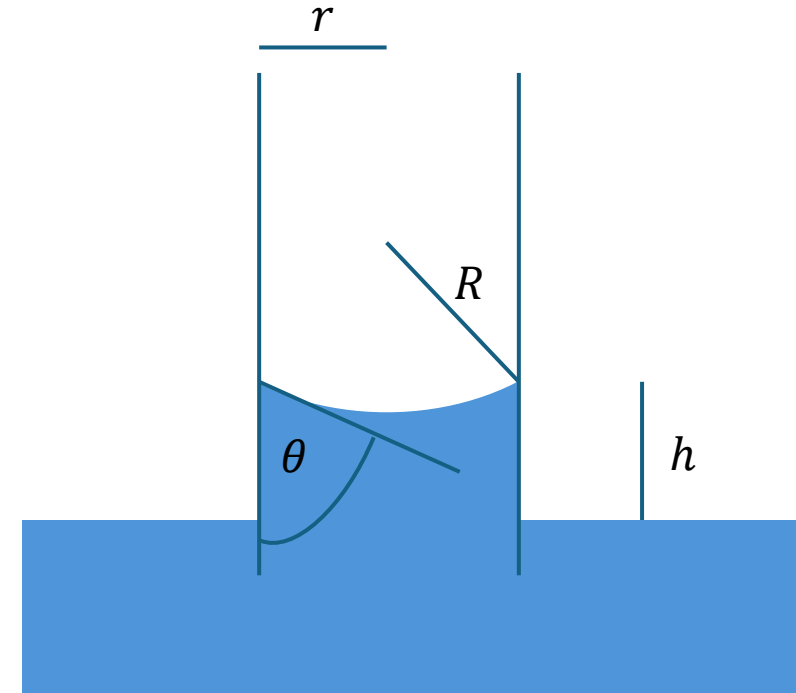
A7****: Wie hoch würde Wasser in Glaskapillaren mit 1 mm Durchmesser steigen?

Lösungsvorschlag:

$$R = \frac{r}{\cos(\theta)}$$
$$p_0 = p_0 + \rho g h - \frac{2\sigma}{R}$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{2\sigma}{R\rho g} = \frac{2\sigma \cos(\theta)}{r\rho g}$$

Mit Konstanten, bsp. hier abrufbar: [Kapillareffekt – Wikipedia](#)

$$h = \frac{2 \cdot 0.07 \text{ J m}^{-2} \cos(20^\circ)}{1 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10 \text{ m s}^{-2}} = 1.3 \text{ cm}$$



Lösungsskizzen

A8****: Ein Cellulose-Ultrafilter lässt laut Hersteller keine Partikel >450 nm durch. Um dies zu überprüfen, wird der nasse Filter einseitig mit Druckluft beschickt. Bei welcher Druckdifferenz sollte der Filter die Luft durchlassen?

Lösungsvorschlag:

Analog zu A7, man stelle sich vor, man übt einen Druck anstelle des Schweredruckes aus, sodass beide Wasserstände gleich sind. Anders ausgedrückt, man muss den Kapillardruck (Laplace-Druck) überwinden:

$$\Delta p = \frac{2\sigma \cos(\theta)}{r} = \frac{4\sigma \cos(\theta)}{D} = \frac{4 \cdot 0.07 \text{ J m}^{-2} \cdot 1}{4.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 6 \text{ bar}$$

Der Benetzungswinkel wurde aufgrund der Hydrophilie von Cellulose als 0° angenommen.

Lösungsskizzen

A9**: Bei einem sehr großen Fass wird 1 m unter dem Wasserspiegel ein 0.25 cm^2 großes Loch geschlagen. Wie schnell (in m/s und l/min) fließt das Wasser raus (Randeffekte und Strömungswiderstand vernachlässigt)? Wie ändern sich beide Werte, wenn das Loch 10 cm unter dem Wasserspiegel geschlagen wird, aber wie zuvor 1 m unter dem Wasserspiegel gemessen wird? Wie ändert sich die Form des Wasserstrahls?

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho v^2 &= \rho g h \leftrightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{20 \text{ m s}^{-2} \cdot 1 \text{ m}} = 4.5 \text{ m s}^{-1} \\ \dot{V} &= Av = 0.1 \text{ dm}^2 \cdot 45 \text{ dm s}^{-1} = 4.5 \text{ l s}^{-1} = 270 \text{ l min}^{-1} \end{aligned}$$

Analog zum ersten Teil, bei Messung in 1 m ändert sich v bei dieser Höhe nicht.

$$\dot{V}' = Av' = \frac{\dot{V}}{\sqrt{10}} = 85 \text{ l min}^{-1}$$

Da v bei größeren Höhenunterschieden zunimmt, der Massenstrom aber konstant bleibt, ändert sich der Querschnitt des Strahls (er wird dünner, bis er aufgrund der Oberflächenspannung Tropfen bildet)

Lösungsskizzen

A10**: Welchen Unterdruck kann man mit einer Leitungswasser-betriebenen Wasserstrahlpumpe in etwa erzeugen ($\dot{V} = 0.2 \frac{\text{l}}{\text{s}}$, $A = 0.25 \text{ cm}^2$)?

Lösungsvorschlag:

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho v^2 \leftrightarrow p_0 - p = \frac{\rho \dot{V}^2}{2A^2} = \frac{1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot (0.0002 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1})^2}{2 \cdot (0.00001 \text{ m}^2)^2} = 32000 \text{ Pa} = 0.32 \text{ bar}$$

Lösungsskizzen

A11**: Wie kann man mit einer Stoppuhr, einer Kugel (m, ρ sind bekannt), und einem Messzylinder die Viskosität einer Flüssigkeit bestimmen?

Lösungsvorschlag:

In einem Abstand zur Wasseroberfläche wird ein Kräftegleichgewicht erreicht:

$$mg = 6\pi\eta rv$$
$$t = \frac{s}{v} = \frac{6\pi\eta sr}{mg} = \frac{6\pi\eta s}{g} \left(\frac{3}{4\rho\pi m^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Mit

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \leftrightarrow r = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3m}{4\rho\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Da $t \sim \eta$, wird oft mit einem Viskositätsstandard gemessen

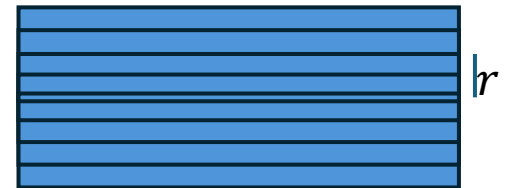
Lösungsskizzen

A12****: Für den Volumenstrom (laminare Strömung) in einem Rohr mit Länge L und Radius R gilt bei einer Druckdifferenz Δp zwischen Anfang und Ende $\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p$. Leite die Formel her.

Lösungsvorschlag:

Betrachte den Zylinderquerschnitt und zerlege die Flüssigkeit in kleine Hohlzylinder. Für die Geschwindigkeit und die Scherkraft gilt bei einem Radius r :

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{F(r)}{\eta A(r)} = -\frac{\Delta p \pi r^2}{\eta \cdot 2\pi r L}$$
$$v(r) = \int_0^r -\frac{\Delta p r}{2\eta L} dr = -\frac{\Delta p r^2}{4\eta L} + C = -\frac{\Delta p r^2}{4\eta L} + \frac{\Delta p R^2}{4\eta L}$$



Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Randbedingung $v(R) = 0$. Der Volumenstrom entspricht der Summe aus allen „Kreisscheiben“.

$$\dot{V} = \int_0^R v(r) dA'(r) = \int_0^R \left(-\frac{\Delta p r^2}{4\eta L} + \frac{\Delta p R^2}{4\eta L} \right) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p$$

Lösungsskizzen

A13***: Mit einer Pumpe können durch Rohr 1 2 l/min und durch Rohr 2 5 l/min gepumpt werden. Wie hoch ist der Volumenstrom bei Neben- bzw. Hintereinanderschaltung der Rohre?

Lösungsvorschlag:

Nebeneinander: Beide Volumenstromdichten addieren, also 7 l/min.

Hintereinander: Sei $\dot{V} = Cp$, es gilt $\dot{V}_1 = \dot{V}_2$ und $p = p_1 + p_2 = \frac{\dot{V}_1}{C_1} + \frac{\dot{V}_1}{C_2}$. Umgestellt:

$$\dot{V}_1 = p \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\dot{V}_{1,0} \dot{V}_{2,0}}{\dot{V}_{1,0} + \dot{V}_{2,0}} = \frac{2 \cdot 5}{2 + 5} \text{ l min}^{-1} = 1.4 \text{ l min}^{-1}$$

Solche Systeme verhalten sich ähnlich zu elektrischen Schaltkreisen!