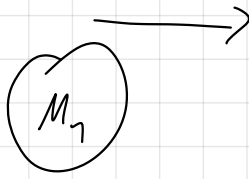


Bonus: im Anhang

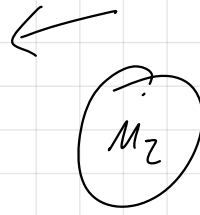
Himmelsmechanik

Copyright © 2026 Armas Scharpegge
CC BY-SA 4.0

Gravitation



$$F = \frac{G M_1 M_2}{r^2}$$

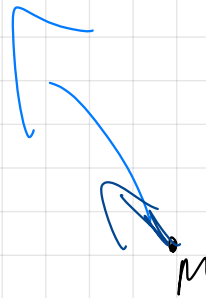


$$G \hat{=} \text{Gravitationskonstante} \\ = 6.7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

Problemstellung in der Himmelsmechanik

$$m \ll M$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$



M, m

Annahme: Der schwere Körper M , bewegt sich nicht.

Bonus: Reduzierung des Zwei-Körper Problems auf ein Einkörperproblem mit der reduzierten Masse

Notation

Skalare / Zahlen

r, x, F

Vektoren

$\vec{r}, \vec{x}, \vec{F}$

Zeitliche Ableitungen

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{x}'(t) = \vec{v}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Analyse

Energieerhaltung, Zentralkraft

Impulserhaltung? Nein.

Energieerhaltung?

Konservative Kraft

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Delta E_{\text{kin}} = W = F \cdot \Delta s = \int F \cdot ds$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x) \quad \text{ist erhalten.}$$

$$U(r) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = - \int - \frac{G M m}{r^2} dr = - \left[+ \frac{G M m}{r} \right] \\ = - \frac{G M m}{r} + \text{const.}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r}$$

Aufgabe: Mit welcher Geschwindigkeit müsste ein Ball besitzen, um dem Einfluss der Erde zu entweichen? In welchem Winkel sollte er geworfen werden?

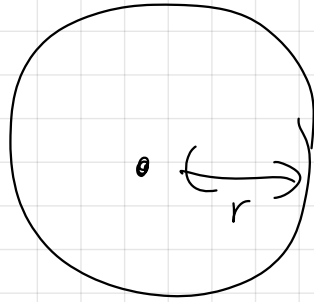
$$\text{Kriterium: } E = 0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2 G M}{r}} = 11 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Erdradius



Aufgabe: Was ist die Gesamtenergie einer Kreisbahn mit Radius r ?



$$F_{zp} = \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad | \cdot r$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$$

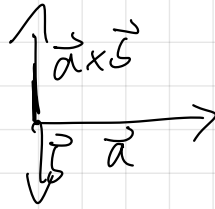
$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} \end{aligned}$$

Drehimpuls

Kreuzprodukt, Lineare Bewegung, Referenzpunkt, Drehmoment
 $\vec{L} \cdot \vec{r} = 0$, Zerlegung der Geschwindigkeit

Wahl von Koordinatensystem nicht egal!

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \vec{r} \times (m \vec{a})$$

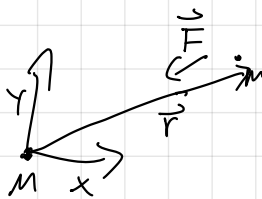
$$= \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \text{Drehmoment}$$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

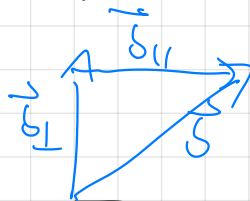
$$\vec{a} \times \vec{b} = 0$$



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$$



$$\vec{b} = \vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel)$$

$$= \vec{a} \times \vec{b}_\perp + \vec{a} \times \vec{b}_\parallel$$

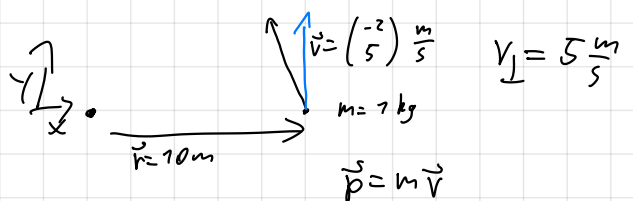
$$= \vec{a} \times \vec{b}_\perp$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}_\perp| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}_\perp|$$

$\hookrightarrow$ Zentralkraft: $\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$

Aufgabe:

Berechne den Drehimpuls L .



$$L = r \cdot m v_\perp = 10 \text{ m} \cdot 7 \text{ kg} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



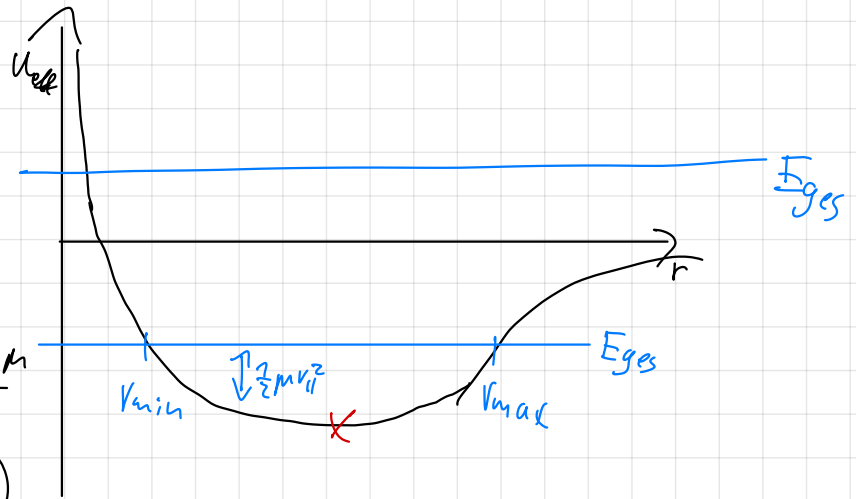
$$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp \quad L = r \cdot m v_\perp \quad v_\perp = \frac{L}{m r}$$

$$v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$$

$$v_\parallel = \dot{r}$$

Effektives Potential

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r} \\ &= \frac{1}{2} m (v_{||}^2 + v_{\perp}^2) - \frac{G M m}{r} \\ &= \frac{1}{2} m v_{||}^2 + \frac{1}{2} m \frac{L^2}{m^2 r^2} - \frac{G M m}{r} \\ &= \frac{1}{2} m \underbrace{v_{||}^2}_{\dot{r}^2} + \underbrace{\left(\frac{L^2}{2 m r^2} - \frac{G M m}{r} \right)}_{U_{\text{eff}}} \end{aligned}$$



Arten von Bahnen

$E < 0$: geschlossene Bahn

$E > 0$: nicht geschlossene Bahn

Lösung des Keplerproblems

Die Masse m sich auf einem Kegelschnitt, wobei die schwere Masse M in einem Fokus liegt.

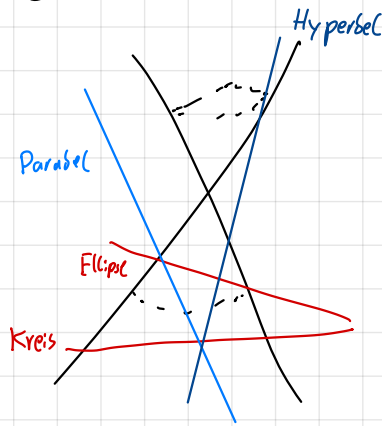
$\approx$ 1. Keplersches Gesetz

Ausnahme: $L = 0$

• $\hookrightarrow$

Kegelschnitte

Im Kegel



Allgemeiner Ausdruck

$$r(\theta=0) = r_{\min}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

p : semi-latus rectum,
 $r(90^\circ) = p$

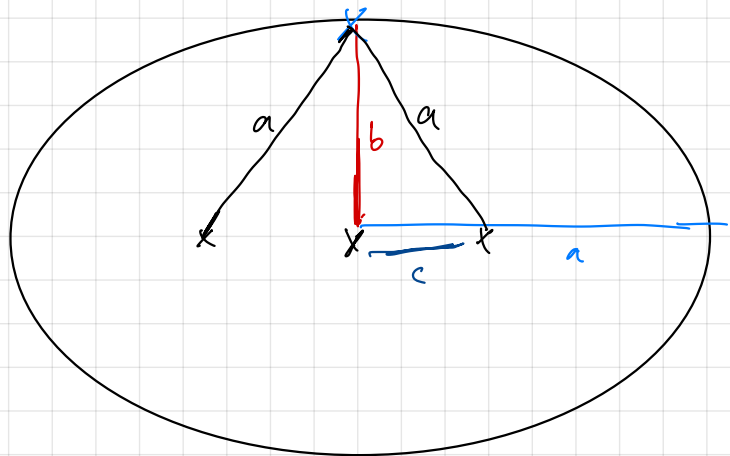


e : Exzentrizität
 $\hookrightarrow 0 \leq e < \infty$

Ellipse $0 < e < 1 \Leftrightarrow E < 0$

$$c = e \cdot a$$

$$|x F_1| + |x F_2| = 2a$$



Aufgabe: Berechne e aus a und b !

$$\begin{aligned} \text{Lsg. } a^2 &= b^2 + c^2 = b^2 + e^2 a^2 \\ \Rightarrow e^2 &= 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \end{aligned}$$

Aufgabe: (Wie) lässt sich ein Satellit mit einem Boost in eine Erd-umlaufbahn bringen?

(Wann) kann ein Planet einen Mond „einfangen“?

Lsg. Wegen der Periodizität der Bahn gar nicht.

Als Kepler-Problem unmöglich mind. drei Körper notwendig!

Gesamtenergie

$$E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

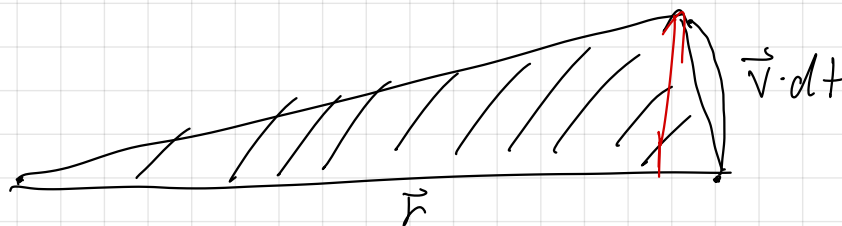
$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Bonus: Herleitung

Aufgabe: Was ist die Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn?

Flächensatz

Bedeutung



$$dA = \frac{1}{2} r v_\perp dt$$

$$= \frac{L}{2m} dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{L}{2m}$$

$$h = \underline{v}_\perp \cdot dt$$

3. Keplersches Gesetz

1. Weg (nur Kreisbahn) = Zentripetalkraft

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

2. Weg (allgemein) $A = \pi ab$ $T = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{2m}{L} \cdot A$

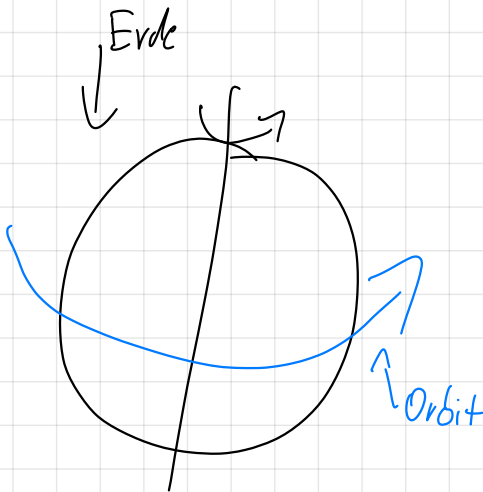
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Zuhause: Führe die Rechnung für allgemeine Ellipsen durch.

Aufgabe: Wie lässt sich ein geostationärer Orbit erreichen?
(Satellit immer über dem gleichen Punkt)

Lsg.

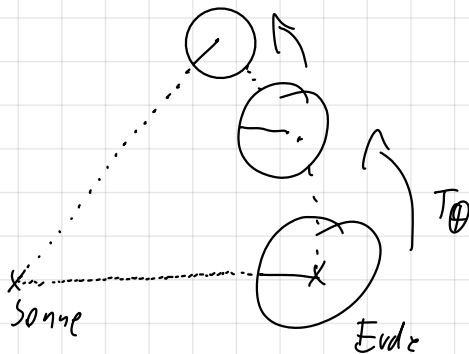
Erde dreht sich gleichmäßig um eine Achse. Daher muss der Satellit sich auf einer Kreisbahn um die gleiche Achse um den Äquator befinden.
Eine Ellipsenbahn ist ungleichmäßig.



$T = \text{Rotationsperiode der Erde} = 23^h 56^m = T_{\oplus}$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_{\oplus}}{4\pi^2} \quad \leftarrow \text{Erde Masse} \Rightarrow a = r = 42\,200 \text{ km}$$

Warum $T_{\oplus} \neq 24^h$? Sonnentag vs. Sterntag



nicht rotierenden
Aus Sicht der Erde rotiert Sonne mit Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{T_a}$, d.h. im rotierenden System subtrahiert sich dann die Winkelgeschwindigkeit der Erde daraus:

$$\frac{2\pi}{T_{\oplus}} = \frac{2\pi}{T_{\oplus}} - \frac{2\pi}{T_a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_{\oplus}} = \frac{1}{T_{\oplus}} + \frac{1}{T_a} = \frac{1}{T_{\oplus}} + \frac{1}{365 T_{\oplus}}$$

$$\Rightarrow T_{\oplus} = 23^h 56^m 04^s$$

Aufgabe: Die Parker Solar Probe erreichte ein Perihel von $10 R_{\odot}$ (Sonnenradii) mit einer Geschwindigkeit von rund $200 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Um auf diese Bahn zu gelangen, wurde der Einfluss der Venus nahe des Aphels genutzt.

Perihel $\equiv r_{\min}$
Aphel $\equiv r_{\max}$

Was wäre im Aphel der Geschwindigkeitsunterschied zur Venus?

Quelle: Wikipedia

Lsg. Drehimpulserhaltung $\Rightarrow r_p v_p = r_a v_a \quad r_a = a_{\text{Venus}} = 1,1 \cdot 10^8 \text{ m} \quad R_{\odot} = 7,0 \cdot 10^8 \text{ m}$
 $\hookrightarrow v_a = v_p \cdot \frac{r_p}{r_a} = 13 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad M_{\odot} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Geschwindigkeit der Venus: $v_{\text{Venus}} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\text{Venus}}}} = 35 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Differenz: $22 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Tatsächlich treffen sie nie genau im Aphel aufeinander.

Die Basics

$$F = \frac{G M m}{r^2}$$

$$E = -\frac{G M m}{2a} = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{G M m}{r} = \text{const.}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G M}{4\pi^2}$$

$$L = \mu r v_{\perp} = \text{const.}$$

Wichtige
Erhaltungs-
größen!

Ideen: $v^2 = \dot{r}^2 + v_{\perp}^2 = \dot{r}^2 + \left(\frac{L}{\mu r}\right)^2$

- Energie nach v umstellen
- Negative Gesamtenergie $\Rightarrow$ gebundene Bahn
- Flächensatz um Zeiten auszurechnen
- Geometrie der Kegelschnitte

Weitere Themen

- Reduzierte Masse
- Roche - Grenze
- Lagrange - Punkte
- Drei - Körper Problem (Spezialfälle)
- Laplace - Runge - Lenz Vektor
- Virial satz

Bonus (basierend auf meinen Folien von 2025)

- Herleitung $E = -\frac{G M m}{2a}$
- Hyperbel- und Parabelbahnen
- Aufgabe: Hohmann - Transfer

Herleitung $E = -\frac{GM\mu}{2a}$ (für Ellipsenbahn)
↳ stimmt auch für Hyperbel

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}$$

Nutze $r_{\max}$ und $r_{\min}$, wo $\dot{r}=0$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2\mu r_{\min}^2} - \frac{GM\mu}{r_{\min}} \\ E_{r_{\min}} &= \frac{L^2}{2\mu} - GM\mu r_{\min} \end{aligned} \quad \cdot r_{\min}^2 \quad \cdot r_{\max}^2 \quad \begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2\mu r_{\max}^2} - \frac{GM\mu}{r_{\max}} \\ E_{r_{\max}} &= \frac{L^2}{2\mu} - GM\mu r_{\max} \end{aligned}$$

Differenz: $E(r_{\max}^2 - r_{\min}^2) = -GM\mu(r_{\max} - r_{\min})$

3. Binomische Formel:
 $= (r_{\max} + r_{\min})(r_{\max} - r_{\min})$

$$\Rightarrow E = \frac{-GM\mu}{r_{\max} + r_{\min}} = -\frac{GM\mu}{2a}$$

Hyperbel $e > 1, E > 0$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

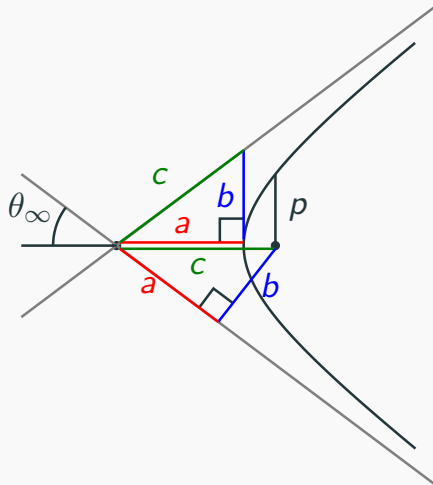
$$|XF_2| - |XF_1| = 2a$$

$$c = ea$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \iff b^2 = (e^2 - 1)a^2$$

$$r_{\min} = a(1 - e)$$

$$\theta_{\infty} = \pm \arccos \left(\frac{-1}{e} \right)$$

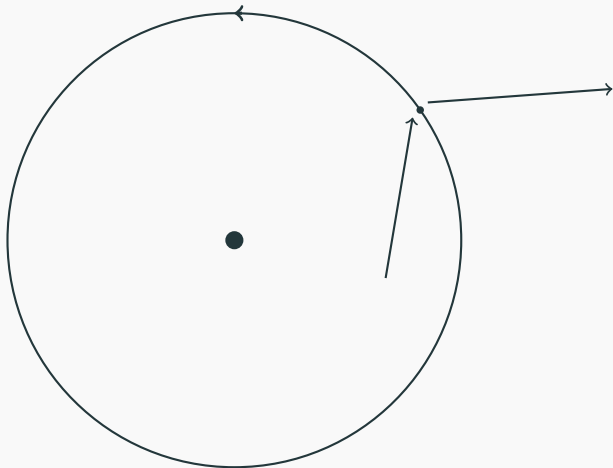


$$E = \frac{1}{2}\mu v_{\infty}^2 = \frac{-GM\mu}{2a} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM\mu}{r}$$
$$L = bv_{\infty}$$

Energie genau wie bei Ellipse (a negativ).

$\Rightarrow$ Energie- und Impulserhaltung: Elastischer Stoß

Nutzen von
Gravitation der
Planeten um
effizient die
Bahn um die
Sonne zu verändern.



Aus Sicht des Planeten eine hyperbolische Bahn.

Parabel $e = 1, E = 0$

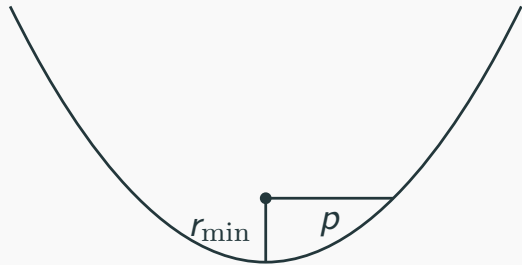
$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

$$p = 2r_{\min}$$

$$\frac{L}{m} = v(r_{\min})r_{\min} = \sqrt{2GM r_{\min}}$$

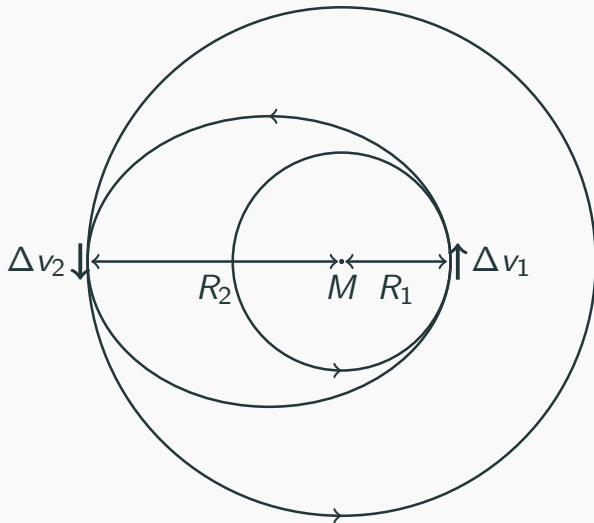
$$y = \frac{1}{4r_{\min}}x^2 - r_{\min}$$

Nur ein Freiheitsgrad (statt zwei).
Nicht wirklich analog zur Ellipsen- oder
Hyperbelbahn.



Aufgabe

- Was ist die große Halbachse a und Exzentrizität e der Ellipse?
- Wie groß muss Δv_1 , Δv_2 sein?



Lsg.

$$2a = R_2 + R_1 \implies a = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$R_1 = a(1 - e) \implies e = 1 - \frac{R_1}{a} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$$

Aus Energieerhaltung

$$E_0 = \frac{-GM\mu}{2R_1} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM\mu}{R_1} \implies v = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}$$

$$E = \frac{-GM\mu}{2a} = \frac{1}{2}\mu (v + \Delta v_1)^2 - \frac{GM\mu}{R_1} \implies (v + \Delta v_1)^2 = GM \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a} \right)$$

$$(v + \Delta v_1)^2 = GM \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a} \right) = GM \left(\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_1 + R_2} \right) = \frac{2GMR_2}{R_1(R_1 + R_2)}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{2GMR_2}{R_1(R_1 + R_2)}} - \sqrt{\frac{GM}{R_1}} = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} \left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right)$$

Δv_2 ist die gleiche Situation, nur rückwärts. D.h. Vorzeichen drehen und $R_1 \leftrightarrow R_2$ tauschen:

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_2}} \right)$$

Bonus:

Zwei-Körper $\leftrightarrow$ Ein-Körper
Problem / reduzierte Masse

Positionen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$

Kraft $\mathbf{F} = m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2$ (*actio gleich reactio* / Newton 3)

$$(m_1 + m_2) \mathbf{R} = m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2$$

$$(m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{P}$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{R}} = m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \dot{\mathbf{P}} = 0$$

Im Schwerpunktsystem ($V = \dot{\mathbf{R}}$) ist $\mathbf{R} = 0, \dot{\mathbf{R}} = 0 \implies \mathbf{P} = 0$.

$$\mathbf{p} = m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 = -m_2 \dot{\mathbf{x}}_2$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{\mathbf{p}}{m_1} + \frac{\mathbf{p}}{m_2} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}_{\frac{1}{\mu}} \mathbf{p}\end{aligned}$$

$$\implies \mu \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}$$

Übung: Drücke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ durch $\mathbf{r}$ aus.

$$\frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{x}}_1^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1\dot{\mathbf{x}}_1)^2}{m_1} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_1}$$
$$\implies E_{\text{kin}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2$$

Übung: Wie sieht die Energie in anderen Systemen aus, d.h. $\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{x}}$? Nutze $\mathbf{P} = 0$ im Schwerpunktsystem.

$$\mathbf{L} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{p} - \mathbf{x}_2 \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

Zwei-Körper Problem $\rightarrow$ Ein-Körper Problem

$$M = m_1 + m_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \iff \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{p} = m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 = -m_2 \dot{\mathbf{x}}_2 = \mu \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2$$

Wenn $m_1 \gg m_2$, dann $M = m_1 + m_2 (\approx m_1)$ und $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_2$.
Eine Masse steht im Grunde still.