

Atom- & Kernphysik: Herleitungen und Lösungen

Jonas Wendlandt

Werkzeug: Konstanten in eV-Einheiten

Wer in eV und nm rechnet, spart sich fast alle Zehnerpotenzen. Diese Kombinationen reichen für alle Rechnungen unten:

Größe	Wert	Wofür
hc	1240 eV·nm	Photonenenergie $\leftrightarrow \lambda$
$\hbar c$	197,3 eV·nm	Bohr-Radius, Unschärfe
$ke^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$	1,440 eV·nm	Coulomb-Energie
$m_e c^2$	0,511 MeV = 511 000 eV	Elektronenmasse
$\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c}$	$\approx \frac{1}{137}$	Feinstrukturkonstante
$1 \text{ u} \cdot c^2$	931,5 MeV	Massendefekt $\rightarrow$ Energie

1. Bohr-Modell: Woher kommen die 13,6 eV? (Folie 11)

Idee: Das Elektron kreist klassisch um das Proton (Schritt 1), aber nur auf Bahnen, auf die seine de-Broglie-Welle genau passt (Schritt 2). Aus diesen zwei Gleichungen folgen Radius und Energie.

Schritt 1 · Kreisbahn Die Coulombkraft liefert die Zentripetalkraft:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} \Rightarrow m_e v^2 = \frac{ke^2}{r} \quad (\text{I})$$

Schritt 2 · Stehende Welle Der Umfang ist ein ganzzahliges Vielfaches der de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = h/(m_e v)$:

$$2\pi r = n \cdot \lambda = \frac{nh}{m_e v} \Rightarrow m_e v r = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (\text{II})$$

Das ist genau Bohrs Quantisierung des Drehimpulses: $L = n\hbar$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$

Schritt 3 · Radius Aus (II) folgt $v = \frac{n\hbar}{m_e r}$. Einsetzen in (I):

$$m_e \left(\frac{n\hbar}{m_e r} \right)^2 = \frac{ke^2}{r} \Rightarrow \frac{n^2 \hbar^2}{m_e r^2} = \frac{ke^2}{r}$$

$$r_n = \frac{\hbar^2}{m_e ke^2} \cdot n^2 = n^2 \cdot a_0$$

Zahlenwert mit den eV-Konstanten (Zähler und Nenner mit c^2 erweitern):

$$a_0 = \frac{(\hbar c)^2}{m_e c^2 \cdot k e^2} = \frac{(197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{511\,000 \text{ eV} \cdot 1,440 \text{ eV} \cdot \text{nm}} \approx 0,0529 \text{ nm}$$

Also $r_n = n^2 \cdot 0,053 \text{ nm}$: Der Grundzustand hat einen Durchmesser von etwa 0,1 nm, passend zur Atomgröße von Folie 5.

Schritt 4 · Energie Gesamtenergie = kinetische + potenzielle Energie. Aus (I) folgt $E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{k e^2}{2r}$:

$$E = \frac{k e^2}{2r} - \frac{k e^2}{r} = -\frac{k e^2}{2r_n}$$

Die kinetische Energie ist also genau halb so groß wie der Betrag der potenziellen, und die Gesamtenergie ist negativ (gebunden). Mit $r_n = n^2 a_0$:

$$E_n = -\frac{k e^2}{2a_0} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{1,440 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{2 \cdot 0,0529 \text{ nm}} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$E_n = -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Kontrolle über α : Setzt man a_0 ein, wird $E_n = -\frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 \cdot \frac{1}{n^2}$. Mit $m_e c^2 = 511\,000 \text{ eV}$ und $\alpha \approx 1/137$ ergibt sich ebenfalls 13,6 eV. Diese Form ist gut zu merken.

Erweiterung: wasserstoffähnliche Ionen (He^+ , Li^{2+} , ...)

Ein Kern mit Ladung Ze bei nur einem Elektron: In allen Formeln wird $k e^2$ durch $Z k e^2$ ersetzt. Dann gilt

$$r_n = \frac{n^2 a_0}{Z}, \quad E_n = -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

Alle Energien wachsen mit Z^2 , alle Wellenlängen schrumpfen um $1/Z^2$. Das braucht man in Aufgabe 1c.

2. Spektrallinien und Rydberg-Formel (Folie 12)

Herleitung Springt das Elektron von einem oberen Niveau n auf ein unteres Niveau m ($n > m$), trägt das Photon die Differenz davon:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_m = 13,6 \text{ eV} \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Durch hc teilen:

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad R = \frac{13,6 \text{ eV}}{hc}$$

$$R = \frac{13,6 \text{ eV}}{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}} = 0,01097 \text{ nm}^{-1} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Wichtig: m ist das untere Niveau (darauf „endet“ die Serie), n das obere. Die Rydberg-Konstante ist also keine neue Naturkonstante, sondern die Ionisierungsenergie in Wellenzahl-Einheiten.

Die Balmer-Linien ($m = 2$) Für $m = 2$ gilt $\lambda = \frac{1}{R \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)}$:

Übergang	Klammer	λ	Farbe
$3 \rightarrow 2$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$	656 nm	rot ($\text{H}\alpha$) – die „? nm“-Linie

$4 \rightarrow 2$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$	486 nm	türkis (H β)
$5 \rightarrow 2$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{25} = \frac{21}{100}$	434 nm	blau (H γ)
$6 \rightarrow 2$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{36} = \frac{2}{9}$	410 nm	violett (H δ)
$\infty \rightarrow 2$	$\frac{1}{4}$	365 nm	Seriengrenze (UV)

Antwort auf Folie 12: Die fehlende rote Linie liegt bei $\lambda = \frac{36}{5R} \approx 656$ nm. Zur Kontrolle: Die Linien rücken zur Seriengrenze hin immer dichter zusammen, genau wie im Spektrum auf der Folie.

Grenzen der Serien Die kürzeste Wellenlänge gehört zu $n \rightarrow \infty$, die längste zu $n = m + 1$:

Serie	kürzeste λ ($n \rightarrow \infty$)	längste λ ($n = m + 1$)
Lyman ($m = 1$)	$\lambda = \frac{1}{R} \approx 91$ nm	$\lambda = \frac{4}{3R} \approx 122$ nm
Balmer ($m = 2$)	$\lambda = \frac{4}{R} \approx 365$ nm	$\lambda = \frac{36}{5R} \approx 656$ nm
Paschen ($m = 3$)	$\lambda = \frac{9}{R} \approx 820$ nm	$\lambda = \frac{144}{7R} \approx 1875$ nm

Daher die Bereiche auf der Folie: Lyman liegt komplett im UV (91–122 nm), Paschen komplett im Infrarot (ab 820 nm). Nur Balmer reicht ins Sichtbare.

3. Lösungen der Aufgaben 1 und 2 (Folie 15)

Aufgabe 1 · Die rote Linie

a) Energien der beiden Niveaus mit $E_n = -13,6 \text{ eV}/n^2$:

$$E_3 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{9} = -1,51 \text{ eV}, \quad E_2 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{4} = -3,40 \text{ eV}$$

Die Photonenenergie ist die Differenz (oben minus unten, damit sie positiv ist):

$$\Delta E = E_3 - E_2 = -1,51 \text{ eV} - (-3,40 \text{ eV}) = 1,89 \text{ eV}$$

Eleganter in einem Schritt: $\Delta E = 13,6 \text{ eV} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 13,6 \text{ eV} \cdot \frac{5}{36} = 1,89 \text{ eV}$

b) Wellenlänge mit der Merkformel:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1,89 \text{ eV}} \approx 656 \text{ nm}$$

656 nm liegt am roten Ende des sichtbaren Bereichs (380–750 nm). Die Farbe passt: Das ist die H α -Linie, die Wasserstoff rötlich leuchten lässt.

c) He⁺ hat nur ein Elektron, ist also wasserstoffähnlich mit $Z = 2$. Alle Energien sind mit $Z^2 = 4$ multipliziert:

$$\Delta E_{\text{He}^+} = Z^2 \cdot 1,89 \text{ eV} = 4 \cdot 1,89 \text{ eV} = 7,56 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{7,56 \text{ eV}} \approx 164 \text{ nm} = \frac{656 \text{ nm}}{4}$$

164 nm liegt tief im UV, also unsichtbar. Merke: Gleicher Übergang bei Ladung Z heißt Wellenlänge durch Z^2 .

Aufgabe 2 · Photoeffekt an Cäsium

a) Energie eines Photons:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{400 \text{ nm}} = 3,10 \text{ eV}$$

b) Einstein: Das Photon gibt seine ganze Energie an ein Elektron ab. Die Austrittsarbeit geht verloren, der Rest wird Bewegungsenergie:

$$E_{kin,max} = E - W = 3,10 \text{ eV} - 2,1 \text{ eV} = 1,0 \text{ eV}$$

„Maximal“, weil Elektronen aus tieferen Schichten zusätzlich Energie verlieren und langsamer herauskommen.

c) Grenzfall: Die Photonenenergie reicht gerade noch für die Austrittsarbeit, also $E_{kin} = 0$:

$$\frac{hc}{\lambda_G} = W \Rightarrow \lambda_G = \frac{hc}{W}$$

$$\lambda_G = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{2,1 \text{ eV}} \approx 590 \text{ nm}$$

Für $\lambda > 590 \text{ nm}$ (gelb, orange, rot) kommt kein Elektron heraus, egal wie hell die Lampe ist. Cäsium hat eine der kleinsten Austrittsarbeiten aller Metalle und reagiert deshalb schon auf sichtbares Licht.

d) Die Gegenspannung muss den schnellsten Elektronen ihre ganze Bewegungsenergie nehmen:

$$e \cdot U_G = E_{kin,max} \Rightarrow U_G = \frac{E_{kin,max}}{e} = \frac{1,0 \text{ eV}}{e}$$

$$U_G = 1,0 \text{ V}$$

Trick: Eine Energie in eV geteilt durch e ist direkt die Spannung in V. Genau dafür ist das Elektronenvolt definiert.

4 Lösungen der Aufgaben 3 und 4 (Folie 26)

Aufgabe 3 · Wie fest hält der Heliumkern?

a) Massendefekt = Masse der Einzelteile minus Masse des Kerns:

$$2m_p + 2m_n = 2 \cdot 1,007276 \text{ u} + 2 \cdot 1,008665 \text{ u} = 2,014552 \text{ u} + 2,017330 \text{ u} = 4,031882 \text{ u}$$

$$\Delta m = 4,031882 \text{ u} - 4,001506 \text{ u} = 0,030376 \text{ u}$$

Der Kern ist um etwa 0,75 % leichter als seine Bausteine. Achtung: Hier ist die Kernmasse gegeben. Bei Atommassen (mit Elektronen) nimmt man stattdessen die Masse des H-Atoms statt m_p , damit sich die Elektronen herauskürzen.

b) Umrechnung mit $1 \text{ u} \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}$:

$$E_B = \Delta m \cdot c^2 = 0,030376 \cdot 931,5 \text{ MeV} \approx 28,3 \text{ MeV}$$

$$\frac{E_B}{A} = \frac{28,3 \text{ MeV}}{4} \approx 7,1 \text{ MeV pro Nukleon}$$

Vergleich mit der Kurve auf Folie 19: ${}^4\text{He}$ liegt mit 7,1 MeV auffällig hoch für einen so leichten Kern. Er ist besonders stabil, deshalb ist er das Endprodukt der Fusion und wird beim α -Zerfall als Ganzes ausgesandt.

c) Vergleich mit der Ionisierungsenergie des H-Atoms (beide Energien in eV):

$$\frac{28,3 \cdot 10^6 \text{ eV}}{13,6 \text{ eV}} \approx 2,1 \cdot 10^6$$

Kernbindung ist rund zwei Millionen Mal stärker als atomare Bindung. Das ist der Grund, warum Kernreaktionen pro Reaktion ungefähr eine Million Mal mehr Energie liefern als chemische Reaktionen.

Aufgabe 4 • Wie alt ist das Holz?

Die Aktivität ist proportional zur Zahl der C-14-Kerne, also gilt dasselbe Zerfallsgesetz. Mit $n = t/T_{\frac{1}{2}}$ als Zahl der verstrichenen Halbwertszeiten:

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow 2^n = \frac{A_0}{A} \Leftrightarrow n = \log_2 \frac{A_0}{A} = \frac{\ln\left(\frac{A_0}{A}\right)}{\ln 2}$$

$$t = T_{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 \frac{A_0}{A}$$

a) Noch 25 % der Aktivität:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,25 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow n = 2$$

$$t = 2 \cdot 5730 \text{ a} = 11\,460 \text{ a} \approx 11\,500 \text{ Jahre}$$

b) Noch 10 % der Aktivität:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,1 \Rightarrow n = \log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} = \frac{2,303}{0,693} \approx 3,32$$

$$t = 3,32 \cdot 5730 \text{ a} \approx 19\,000 \text{ Jahre}$$

Plausibilitätscheck: 10 % liegt zwischen 12,5 % (3 Halbwertszeiten) und 6,25 % (4 Halbwertszeiten), also muss n zwischen 3 und 4 liegen.

c) Zahl der Halbwertszeiten in einer Million Jahren:

$$n = \frac{10^6 \text{ a}}{5730 \text{ a}} \approx 175$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{175} = 10^{-175 \cdot \lg 2} = 10^{-52,7} \approx 2 \cdot 10^{-53}$$

Zum Vergleich: 1 g frischer Kohlenstoff enthält nur etwa 10^{-12} g C-14, das sind rund $6 \cdot 10^{10}$ Kerne.

Nach 175 Halbwertszeiten ist rechnerisch kein einziger mehr übrig. Schon nach rund 10 Halbwertszeiten ($\approx 57\,000$ Jahre, Rest $\approx 0,1\%$) geht das Signal im Untergrund unter. Die praktische Grenze der Radiokarbonmethode liegt deshalb bei etwa 50 000 Jahren. Für ältere Proben braucht man Nuklide mit längerer Halbwertszeit (z. B. K-40 $\rightarrow$ Ar-40).