1 Wärmekapazität

Es ist verschieden viel Energie (Wärme) ΔQ nötig, um verschiedene Materialien um eine bestimmte Temperatur ΔT zu erwärmen. Außerdem ist dazu selbstverständlich umso mehr Wärme nötig, je mehr Masse m von diesem Material man erwärmt:

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

1.1 Übungsaufgabe: Wasserkocher

- Ein Wasserkocher erheizt einen Liter Wasser mit einer Leistung von $P = 2,1kW$. Wie lange dauert es, das Wasser von 20 auf 80°C zu erwärmen?
- Wasser hat eine Verdampfungsenthalpie von 2256 kJ/kg. Diese Energie wird benötigt, um 100°C heißes, flüssiges Wasser in den Gaszustand zu überführen. Welcher Temperaturdifferenz entspräche diese Wärmemenge beim Erhitzen von flüssigem Wasser?

1.2 Übungsaufgabe: Ofen vorheizen

- Ein Ofen hat die Maße $0,8m * 0,5m * 0,5m$. Trockene Luft hat eine Wärmekapazität von $c_L = 0,72kJ/(kg * K)$. Berechne die Masse an Luft, die sich bei $T = 20°C$ im Ofen befindet. (Hinweis: nutze die Formel $p = \rho R_L T$ mit der Gaskonstante von Luft $R_L = 287J/(kg * K)$)

- Welche Wärme muss zugeführt werden, um diese Masse an Luft von $20°C$ auf $180°C$ vorzuheizen?

- Warum ist diese Rechnung ungenau, wenn ich die Wärme zum Vorheizen des Ofens berechnen will?

2 Wärmeleitung und -übertragung

Wärme fließt von warm nach kalt.
Wärmeübertragung beschreibt, wie Wärme von einem Objekt A zu einem anderen Objekt B übertragen wird.
Wärmeleitung dagegen beschreibt, wie Wärme innerhalb eines einzigen Objektes fließt, z.B. innerhalb eines Stahlträgers, der links heiß und rechts kalt ist.

Nehmen wir z.B. einen Ofen, der innen eine konstante Temperatur von $T_1 = 220°C$ aufweist. Die Luft in der Küche sei konstant $T_2 = 20°C$ warm. Dazwischen befindet sich die Glasplatte, die hoffentlich möglichst gut isoliert - also eine schlechte Wärmeleitung(innerhalb der Platte)- und Wärmeübertragung(Luft-Glas und Glas-Luft) aufweist.

Die Wärmeleitung ist gegeben durch

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx},$$

wobei λ der materialspezifische Wärmeleitungskoeffizient ist.
Würde man den Ofen copy-pasten, so hätte man natürlich bei gleicher Temperaturdifferenz den doppelten Wärmefluss. Das erklärt die Proportionalität zur Fläche A: zwei Glasplatten übertragen doppelt so viel; drei Platten das Dreifache.
Außerdem ist hier nicht nur die Temperaturdifferenz relevant, sondern die Temperaturdifferenz pro Dicke, dT/dx: Die Wärme fließt schneller, wenn man heiß und kalt direkt aneinander hält. Umgekehrt würde sich kaum ein Wärmefluss einstellen, wenn heiß und kalt mehrere Kilometer auseinander lägen.

Mit den selben Überlegungen erklärt sich auch die Formel für die Wärmeübertragung zwischen zwei Objekten, die man aneinander hält:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \alpha A \Delta T \\ &= \alpha A (T_2 - T_1).\end{aligned}$$

Hier kommt es jetzt auf die Temperaturdifferenz zwischen Objekt A und B an, nicht auf das Temperaturgefälle innerhalb einer Platte (wie oben).
Das Vorzeichen muss man dabei dann so wählen, dass Wärme immernoch von warm nach kalt fließt.

2.1 Beispiel: Temperaturprofil in einer Platte

Eine Platte mit konstantem Querschnitt habe links ($x = 0$) die Temperatur T_1 und rechts ($x = L$) die Temperatur $T_2 < T_1$. Wir betrachten den stationären Zustand, d.h. dass T_1 und T_2, und auch die Temperatur $T(x)$ an jedem beliebigen Ort in der Platte sich nicht mit der Zeit ändern. Trotzdem ist $T_1 \neq T_2$.
Aufgabe: Berechne das Temperaturprofil $T(x)$ in der Platte.

An einem Ort x in der Platte strömt Wärme von links zu:

$$\dot{Q}_1 = -\lambda A \cdot T'(x).$$

Ein kleines Stück weiter rechts strömt Wärme ab:

$$\dot{Q}_2 = -\lambda A \cdot T'(x + dx).$$

Da sich die Temperatur an keiner Stelle der Platte ändert, muss der Wärmezustrom gleich dem Wärmeabfluss sein:

$$\begin{aligned}Q_1 &= Q_2 \\ T'(x) &= T'(x + dx).\end{aligned}$$

Da das für jeden Ort x der Platte gilt, muss $T'(x) = konst.$ sein; die Temperatur verläuft also linear. Mit den Randbedingungen ergibt sich

$$T(x) = T_1 + \left(\frac{x}{L}\right)(T_2 - T_1).$$

2.2 Übungsaufgaben Temperaturprofil

- Berechne das Temperaturprofil $T(r)$ in einem Hohlzylinder, der innen (Radius R_1) eine konstante Temperatur T_1 und außen R_2 eine konstante Temperatur T_2 aufweist. *Hinweis:* $f(x) = ln(x) \Rightarrow f'(x) = 1/x$.
- Berechne obige Aufgabe für eine Hohlkugel, statt einen Hohlzylinder.

2.3 Beispiel: Abkühlende Teetasse

Wir vernachlässigen die verschiedenen Mechanismen zur Wärmeübertragung zwischen Teetasse, Tee, Luft etc. Der Tee habe eine Oberfläche A und gebe Wärme an die Umgebung ($T_U = konst$) gemäß $\dot{Q} = -\alpha \cdot A \cdot (T - T_U)$ ab.

Aufgabe: Gib mit Wärmekapazität c und Dichte ρ des Tees an, wie sich die Temperatur des Tees pro Sekunde ändert.

Lösung:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= c \cdot m \cdot \dot{T} \\ &= c \cdot \rho V \cdot \dot{T} \\ \dot{Q} &= -\alpha \cdot A \cdot (T(t) - T_U) \\ \Rightarrow c\rho V\dot{T}(t) &= -\alpha A(T(t) - T_U) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha}{c\rho}\frac{A}{V}(T(t) - T_U).$$

Damit ist die Differentialgleichung, also die Änderungsrate der Temperatur für eine bestimmte gegebene Temperatur, gefunden.

Aufgabe: Bei welcher Temperatur T_∞ bleibt die Temperatur konstant?

Lösung: Wir setzen $dT/dt = 0$ und erhalten die Bedingung $T - T_U = 0$, also $T_\infty = T_U$. Die Temperatur ändert sich also nur dann nicht, wenn sie gleich der Umgebungstemperatur ist.

Aufgabe: Berechne die Temperatur in Abhängigkeit der Zeit.

Lösung: Dies ist eine typische DGL: Die Abweichung von einem Gleichgewichtszustand, hier $T - T_U$ bzw. $T - T_\infty$, ist direkt proportional zur Änderungsrate der sich ändernden Größe, hier T.
Zur Lösung führen wir die Definition $f(t) := T(t) - T_U$ ein. Beachte, dass

$$df/dt = dT/dt - dT_U/dt = dT/dt$$

gilt, da sich die Umgebungstemperatur nicht ändert.
Außerdem definieren wir $\beta := \alpha A/(c\rho V)$. Damit bleibt die DGL

$$\frac{df}{dt} = -\beta f(t)$$

Die Lösung (gerne ableiten und überprüfen) ist die Exponentialfunktion

$$f(t) = f_0 \cdot e^{-\beta t}.$$

Ist die Anfangstemperatur T_0 gegeben, so folgt die Lösung:

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-\beta t}.$$

Hinweis: Es lohnt sich, diese zwei DGLen zu merken: Ist die erste Ableitung $f'(x) = k * f(x)$ proportional zur Größe $f(x)$ selbst, so ist die Lösung eine Exponentialfunktion, $f_0 \cdot e^{kx}$.
Ist dagegen die zweite Ableitung $f''(x) = -k * f(x)$ proportional zu $f(x)$, undzwar entgegengerichtet, so ergibt sich eine Sinusförmige Schwingung $A * \sin(\sqrt{k}x + x_0)$.

Aufgabe: Nach einer beliebigen Zeit soll eine festgelegte Menge Milch zum Tee gegeben werden. Überlege dir, wann dies am Besten geschehen soll, wenn der Tee möglichst lange warm bleiben soll.
Wie ändert sich das, wenn die Milch Raumtemperatur hat oder aus dem Kühlschrank kommt? Diese Aufgabe kann man sich qualitativ überlegen, aber auch gerne mathematisch genau berechnen.

2.4 Übungsaufgabe: Ventilator

Ein Ventilator verwendet elektrische Energie und verrichtet mechanische Arbeit an der Luft - führt also dem Raum Energie zu. Wieso fühlt sich das trotzdem im Sommer nach Abkühlung an?

3 Temperaturausdehnung von Festkörpern

Nicht nur Gase dehnen sich mit steigender Temperatur aus, sondern auch Festkörper - jedoch sehr sehr viel weniger. Dies ist der Grund für Dehnungsfugen in Brücken. Auch im Alltag kann man zwischen Sommer und Winter merken, dass sich die Tür leicht verzieht und daher evtl. nichtmehr perfekt ins Schloss fällt.

Die relative Längenänderung durch Temperaturausdehnung ist durch die Formel

$$\varepsilon_T = \Delta L/L = \alpha \Delta T$$

gegeben. Typische Werte für den Ausdehnungskoeffizieten α sind z.B. für Stahl $\alpha = 10^{-5} * 1/K$.
Da sich Flächen immer durch die Multiplikation von zwei Längen ergeben, die jeweils diese relative Längenänderung erfahren, ergibt sich die relative Flächenäderung durch

$$A_1/A_0 = (1 + \alpha \Delta T)^2$$

.
Aufgabe: Begründe, warum sich die Flächenänderung bzw. Volumenänderung durch Temperaturausdehnung durch die Formeln

$$\Delta A = A_0 * 2\alpha * \Delta T$$
$$\Delta V = V_0 * 3\alpha * \Delta T$$

berechnen lassen.
Diese Ausdehnungskoeffizienten gelten nicht für alle Temperaturen - im Extremfall kann ja Stahl auch schmelzen. Es ist aber eine gute Näherung.

3.1 Übungsaufgabe: Mechanische Spannung und Temperaturausdehnung

Die Zugspannung $F/A =: \sigma = E\varepsilon$ ist proportional zum Elastizitätsmodul E und der Dehnung (relativen Ländenänderung) $\varepsilon = dl/l$.

- Betrachte eine Metallleiste an einem Türrahmen, die sich im Winter gegenüber dem Sommer um $40°C$ abkühlt. Die Länge im Sommer sei $L_0 = 2m$ und $\alpha = 10^{-5} * 1/K$. Um welche Länge verkürzt sich die Leiste?
- Welche mechanische Dehnung ε muss angewendet werden, um die Leiste wieder auf die ursprüngliche Länge mechanisch auszudehnen? Verwende die Näherung $1/(1+x) = 1-x+x^2-x^3+\mathcal{O}(x^4) \approx 1-x$ für $x \approx 0$.
- Welchen Unterschied macht es, ob die Leiste zuerst abgekühlt und dann gedehnt wird, oder erst gedehnt und dann abgekühlt?
- Der E-Modul ist $E = 210kN/mm^2$, die Leiste sei $2mm$ breit und $1cm$ tief. Berechne die Zugspannung σ und die Kraft F, die nötig sind, um die oben berechnete mechanische Streckung zu erreichen. Welches Gewicht könnte man an eine identische Leiste hängen, um diese Dehnung zu bezwecken?

Lösungen:

- 0,4 mm
- $\varepsilon \approx 4 \cdot 10^{-4}$
- garkeinen; $(1 - \alpha\Delta T)(1 + \varepsilon) = (1 + \varepsilon)(1 - \alpha\Delta T)$.

4 Wärmeausdehnung von Gasen: ideales Gasgesetz

Gase ändern ihr Volumen in Folge von Temperaturänderungen sehr viel deutlicher, als Festkörper. Außerdem sind sie kompressibel: Erhöht man den Druck, sinkt das Volumen. Das ideale Gasgesetz beschreibt diesen Zusammenhang qualitativ: Für eine festgelegte Menge (Masse m) eines Gases ist das Volumen proportional zur Temperatur und antiproportional zum Druck:

$$V/m = R_g * T/p.$$

Man kann auch beide Seiten mit der Masse multiplizieren und sieht, dass das Volumen sinnvoller Weise doppelt so groß ist, wenn man doppelt so viel Gas betrachtet.
Oft wird dieses Gesetz auch mit der universellen Gaskonstante $\overline{R} \approx 8J/(mol * K)$ und Stoffmenge n (in mol) geschrieben:

$$pV = n\overline{R}T.$$

Ebenfalls gängig ist die Schreibweise

$$pv = R_g T,$$

wobei $v = V/m = 1/\rho$ das *spezifische Volumen* - den Kehrwert der Dichte - darstellt. R_g ist dabei die Gaskonstante für das betrachtete Gas. Sie ist über die Molare Masse $M = m/n$ mit der universellen Gaskonstante verbunden: $R_g * M = \overline{R}$.

Erhöht man die Temperatur eines Gases, während das Volumen konstant bleibt, so steigt auch der Druck. Dehnt sich ein Gas bei konstantem Druck aus, so kühlt es ab.
Man kann sich weitere solcher Zusammenhänge überlegen.

4.1 Wie funktioniert ein Kühlschrank?

Wärme fließt immer von warm nach kalt. Wie kann also die Wärme aus dem kalten Kühlschrank an die wärmere Umgebung abgegeben werden?
Der Trick besteht darin, dass man ein Gas (oder Dampf) sowohl durch Wärmezufuhr aufheizen kann ($dq = c_v * dT$), als auch durch Kompression ($dw = -pdv$): erhöht sich im idealen Gasgesetz der Druck, so steigt auch die Temperatur.
Nachdem man Druck (und dadurch Temperatur) erhöht hat, bringt man das Kühlmedium in Kontakt mit der Umgebung, an die es seine Wärme abgibt. Danach lässt man den Druck wieder auf Anfangsbedingungen ab (Drossel), doch das Medium hat ja eben bereits an Wärme verloren; also wurde insgesamt Energie aus dem Kühlmedium abgeführt. Daher erreicht das Kühlmedium nach der Drosselung eine noch tiefere Temperatur, als die Ausgangstemperatur.