Mechanik – Statik

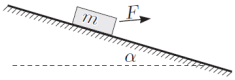
Online-Training 2. Runde IPhO 2027

Luise Köhler

30.10. und 4.11.2026

Motivation

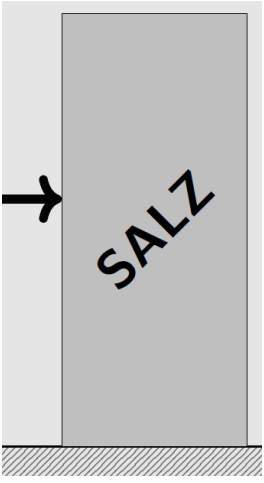
pr 4. What is the minimum force needed to dislodge a block of mass m resting on an inclined plane of slope angle α, if the coefficient of friction is μ? Investigate the cases when *a)* $\alpha = 0$; *b)* $0 < \alpha < \arctan \mu$.



Kaalda: Mechanics Handout



Pixabay, kenalston



Auswahlwettbewerb IPhO

Newtonsche Gesetze:

1. Trägheitsgesetz: Körper, auf den keine Kräfte wirken, bleibt in Ruhe oder gleichförmig geraliniger Bewegung ($\vec{v} = \text{const.}$)
2. Aktionsprinzip: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$, für $m = \text{const.}$ folgt $\vec{F} = m\vec{a}$
3. Reaktionsprinzip: übt A auf B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große entgegen gerichtete Kraft von B auf A (reactio)

grundlegende Gleichungen der Mechanik:

- konservative Kräfte: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$
- Energieerhaltung: $E = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots) = \text{const.}$
- Impulserhaltung: $\sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{p} = \text{const.}$
- nur Zentralkräfte: $\vec{F}(\vec{r}) \sim \vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{L} = \text{const.}$

hier:

- Erklärungen der Inhalte und Tips zum Herangehen an IPhO-Aufgaben
- kurze Denkaufgaben und etwas längere Anwendungsaufgaben hier im Seminar - gemeinsam bearbeiten (Fragen einfach hier / im Chat stellen), was wir nicht schaffen kann zuhause geübt werden

---

danach:

- kleine zusätzliche Aufgaben im Vortrag $\rightarrow$ Lösung bei Bedarf anfragen
- Liste mit Materialien zum weiteren Üben / Verständnis des Stoffes
- auf Wunsch auch Liste mit Aufgaben-Empfehlungen mgl.

Syllabus

Inhalte des IPhO-Syllabus zum Thema Statik:

- Massenschwerpunkt eines Systems über $\sum$ / $\int$ bestimmen
- Ggw. von Kräften (Vektoren/Projektion) und Drehmomenten (max. 2D)
- Normalkraft, Spannung, Reibungskraft
- Hooke'sches Gesetz
- stabiles/instabiles Gleichgewicht
- Materialeigenschaften (z.B. Young-Modul, stress, strain)

Inhalte

Starrer Körper im statischen Gleichgewicht erfüllt:

Kräftegleichgewicht

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}}$$

... keine Beschleunigung des Schwerpunkts

Drehmomentgleichgewicht

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_0 = \vec{0}}$$

... keine Winkelbeschleunigung

In der Ebene ergibt das drei skalare Gleichungen:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum \tau_0 = 0.$$

Wichtig!

Kräftegleichgewicht allein reicht nicht: Ein Kräftepaar kann ein Drehmoment erzeugen, obwohl die resultierende Kraft null ist.

Die Haftreibungskraft ist nur so groß wie erforderlich und erfüllt:

$$\boxed{|\vec{f_H}| \leq \mu_H N}$$

Erst im Grenzfall des beginnenden Gleitens gilt $f_H = \mu_H N$. Gleitet der Körper, wirkt die (kleinere) Gleitreibungskraft $f_{Gl} = \mu_{Gl} N$.

Um festzustellen, ob ein Objekt umkippt, muss die Position des Schwerpunkts relativ zum Kipppunkt bestimmt werden.

Kipppunkt

Wenn ein Objekt kurz davor ist, umzukippen, wirkt die gesamte Normalkraft normalerweise an einem Punkt.

1. Folgt aus $\sum \vec{F} = 0$ auch $\sum \vec{\tau} = 0$?
2. Kann $\sum \vec{\tau_A} = 0$ an Punkt A und $\sum \vec{\tau_B} \neq 0$ an anderem Punkt B gelten?
3. Wann kann ich $f_H = \mu_H N$ setzen?
4. Wohin wird der Angriffspunkt der Schwerkraft zur Berechnung von Drehmomenten gesetzt?

Besprechung

Denkt kurz nach und meldet euch dann gerne (wir gehen die Aufgaben durch).

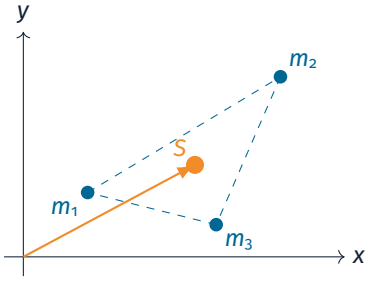
(Massen-)Schwerpunkt: mit Masse gewichtetes Mittel der Positionen von den Punktmassen eines Systems

- für N Punktmassen m_i an den Positionen $\vec{r}_i$ gilt mit $M = \sum_i m_i$:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

- komponentenweise:

$$x_S = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \qquad y_S = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}$$



schematische Massenverteilung

Tipp

Der Schwerpunkt liegt näher an größeren Massen. Bei gleichen Massen entspricht er dem geometrischen Mittel der Positionen.

Für einen kontinuierlichen Körper wird die Summe durch ein Integral über infinitesimale Massenelemente ersetzt:

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\mathrm{d}m} \qquad M = \int \mathrm{d}m$$

Bestimmung von $\mathrm{d}m$?

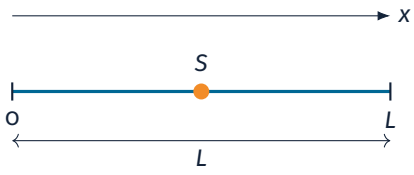
- 1D (Liniendichte λ):
$$\mathrm{d}m = \lambda(x)\,\mathrm{d}x$$
- 2D (Flächendichte σ):
$$\mathrm{d}m = \sigma(x,y)\,\mathrm{d}A$$
- 3D (Massendichte ρ):
$$\mathrm{d}m = \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

Tipp

Bei homogener Dichte kürzt sich die Dichte im Zähler und Nenner heraus.

Beispiel: Massenschwerpunkt eines homogenen Stabes

Ein homogener Stab der Länge L und Masse M liegt entlang der x-Achse. Bestimme seinen Massenschwerpunkt.



Homogene lineare Massendichte:

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

$$\mathrm{d}m = \lambda \, \mathrm{d}x$$

Berechnung:

$$x_S = \frac{1}{M} \int_0^L x \, \mathrm{d}m$$

Einsetzen von $\mathrm{d}m$:

$$x_S = \frac{\lambda}{M} \int_0^L x \, \mathrm{d}x$$

Integration:

$$x_S = \frac{\lambda}{M} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L$$

Mit $\lambda = M/L$:

$$\boxed{x_S = \frac{L}{2}}$$

Wahl des Systems

Zhou M2 Statics, Ex. 1:
6 ident. Blöcke mit starren Stäben dazwischen gleiten auf Tisch, ges.: Spannung T im mittleren Stab



Welche(s) System(e) analysieren?

- 1 Block
- 2 Blöcke
- 3 Blöcke
- ganzes System

Prinzip

Wähle das System so, dass möglichst viele unbekannte innere Kräfte wegfallen (also möglichst groß), aber klein genug, dass die gesuchte Kraft auf das System wirkt.

Zhou M2 Statics, Ex. 1:
6 ident. Blöcke mit starren Stäben dazwischen gleiten auf Tisch, ges.: Spannung T im mittleren Stab



Welche(s) System(e) analysieren?

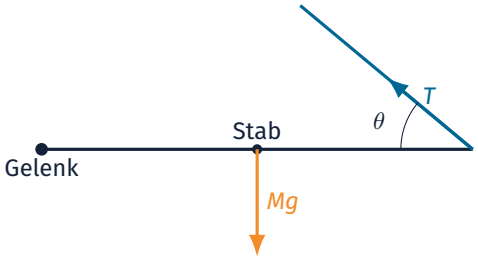
- 1 Block
- 2 Blöcke
- 3 Blöcke
- ganzes System

Prinzip

Wähle das System so, dass möglichst viele unbekannte innere Kräfte wegfallen (also möglichst groß), aber klein genug, dass die gesuchte Kraft auf das System wirkt.

$\rightarrow$ Lösung: ganzes System + drei Blöcke links (2 Bew.-Gl. aufstellen, a und T berechnen, vollst. Lösungsweg im Handout nachlesbar)

Ein homogener Stab (Masse M, Länge L) ist links gelenkig befestigt und wird rechts durch ein Seil gehalten (Winkel θ zum Stab). Bestimme die Spannung T im Seil.



Gelenk als Bezugspunkt:

$$TL\sin\theta - Mg\frac{L}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{Mg}{2\sin\theta}}$$

Prinzip

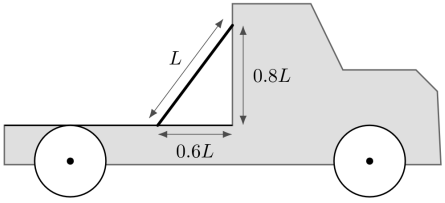
Wähle den Bezugspunkt so, dass unbekannte Kräfte möglichst kein Drehmoment beitragen.

Aufgabe: Zeige, dass für $\sum \vec{F} = 0$ das Gesamtdrehmoment unabhängig vom Ursprung ist ($\sum \vec{\tau}_O = \sum \vec{\tau}_{O'}$).

Übungsaufgabe: Grenzfälle Haftreibung

Wdh.: Es ist $|\vec{f}_H| \leq \mu_H N$, Gleichheit gilt erst im Grenzfall des beginnenden Gleitens.

Zhou M2 Statics, Ex. 6: Brett der Länge L auf Auto (Bew. nach rechts), keine Reibung an der vertikalen Seite, $\mu_H = 0.5$ an der horizontalen Seite. Das Brett soll nicht rutschen oder umfallen.



a) max. Startbeschleunigung?

b) max. Bremsbeschleunigung?

c) für welche Bremsbeschleunigung ist die Haftreibung $f_H = 0$?

Vorgehen

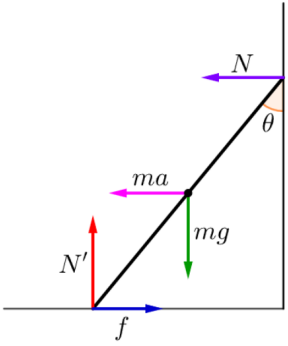
1. Bezugssystem wählen
2. Skizze mit allen wirkenden Kräften (Tipp: Normalkräfte, Gewichtskraft, Reibungskraft)
3. Kräfte-GGW (2 Gl. in x und y) & Drehmoment-GGW aufstellen
4. Grenzen der Reibungskraft (kann nach links/rechts wirken!)
5. Bedingung an Umkippen (Normalkraft an der vertikalen Wand?)

Lösung zur Aufgabe: Grenzfälle Haftreibung

1. Transformation ins Bezugssystem des Autos (mit Beschleunigung a) $\rightarrow$ Kraft ma nach links

Lösung zur Aufgabe: Grenzfälle Haftreibung

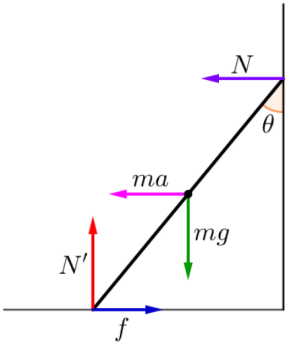
1. Transformation ins Bezugssystem des Autos (mit Beschleunigung a) $\rightarrow$ Kraft ma nach links
2. Skizze der Kräfte



Quelle: K. Zhou, M2 Statics Solutions, Problem 6

Lösung zur Aufgabe: Grenzfälle Haftreibung

1. Transformation ins Bezugssystem des Autos (mit Beschleunigung a) $\rightarrow$ Kraft ma nach links
2. Skizze der Kräfte

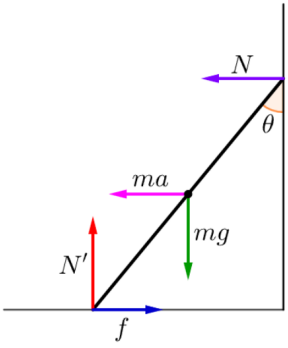


Quelle: K. Zhou, M2 Statics Solutions, Problem 6

3. Kräfte-GGW (2 Gl. in x und y) & Drehmoment-GGW aufstellen:
   $N + ma = f, \quad mg = N', \quad -mg\frac{L}{2}\sin\theta + ma\frac{L}{2}\cos\theta + NL\cos\theta = 0$
   $\rightarrow 2N + ma = mg\tan\theta$
   $\rightarrow$ Ausdrücke für N und f ableiten:
   $N = \frac{m(g\tan\theta - a)}{2}, F = \frac{m(g\tan\theta + a)}{2}$

Lösung zur Aufgabe: Grenzfälle Haftreibung

1. Transformation ins Bezugssystem des Autos (mit Beschleunigung a) $\rightarrow$ Kraft ma nach links
2. Skizze der Kräfte

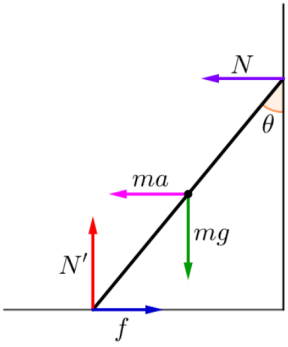


Quelle: K. Zhou, M2 Statics Solutions, Problem 6

3. Kräfte-GGW (2 Gl. in x und y) & Drehmoment-GGW aufstellen:
   $N + ma = f, \quad mg = N', \quad -mg\frac{L}{2}\sin\theta + ma\frac{L}{2}\cos\theta + NL\cos\theta = 0$
   $\rightarrow 2N + ma = mg\tan\theta$
   $\rightarrow$ Ausdrücke für N und f ableiten:
   $N = \frac{m(g\tan\theta - a)}{2}, F = \frac{m(g\tan\theta + a)}{2}$
4. Grenzen der Reibungskraft (kann nach links/rechts wirken!)
   $-mg\mu_H \leq f \leq mg\mu_H \quad \rightarrow \quad -\frac{7}{4}g \leq a \leq \frac{1}{4}g$

Lösung zur Aufgabe: Grenzfälle Haftreibung

1. Transformation ins Bezugssystem des Autos (mit Beschleunigung a) $\rightarrow$ Kraft ma nach links
2. Skizze der Kräfte

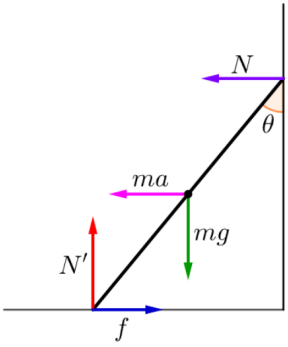


Quelle: K. Zhou, M2 Statics Solutions, Problem 6

3. Kräfte-GGW (2 Gl. in x und y) & Drehmoment-GGW aufstellen:
   $N + ma = f, \quad mg = N', \quad -mg\frac{L}{2}\sin\theta + ma\frac{L}{2}\cos\theta + NL\cos\theta = 0$
   $\rightarrow 2N + ma = mg\tan\theta$
   $\rightarrow$ Ausdrücke für N und f ableiten:
   $N = \frac{m(g\tan\theta - a)}{2}, F = \frac{m(g\tan\theta + a)}{2}$
4. Grenzen der Reibungskraft (kann nach links/rechts wirken!)
   $-mg\mu_H \leq f \leq mg\mu_H \quad \rightarrow \quad -\frac{7}{4}g \leq a \leq \frac{1}{4}g$
5. Bedingung an Umkippen (Normalkraft an der vertikalen Wand?)
   $N \geq 0 \quad \rightarrow \quad a \leq g\tan\theta = \frac{3}{4}g$

Lösung zur Aufgabe: Grenzfälle Haftreibung

1. Transformation ins Bezugssystem des Autos (mit Beschleunigung a) $\rightarrow$ Kraft ma nach links
2. Skizze der Kräfte

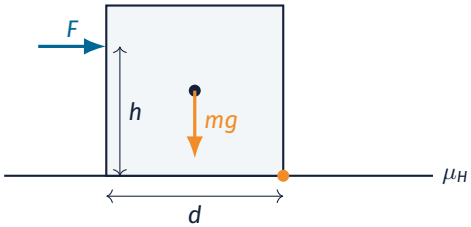


Quelle: K. Zhou, M2 Statics Solutions, Problem 6

3. Kräfte-GGW (2 Gl. in x und y) & Drehmoment-GGW aufstellen:
   $N + ma = f, \quad mg = N', \quad -mg\frac{L}{2}\sin\theta + ma\frac{L}{2}\cos\theta + NL\cos\theta = 0$
   $\rightarrow 2N + ma = mg\tan\theta$
   $\rightarrow$ Ausdrücke für N und f ableiten:
   $N = \frac{m(g\tan\theta - a)}{2}, F = \frac{m(g\tan\theta + a)}{2}$
4. Grenzen der Reibungskraft (kann nach links/rechts wirken!)
   $-mg\mu_H \leq f \leq mg\mu_H \quad \rightarrow \quad -\frac{7}{4}g \leq a \leq \frac{1}{4}g$
5. Bedingung an Umkippen (Normalkraft an der vertikalen Wand?)
   $N \geq 0 \quad \rightarrow \quad a \leq g\tan\theta = \frac{3}{4}g$
6. Antworten aus Ungl. ablesen:
   a) 1/4 g
   b) -7/4 g
   c) $\frac{3}{4}g + a = 0 \quad \rightarrow$ bremst mit 3/4 g

Kippen oder Gleiten?

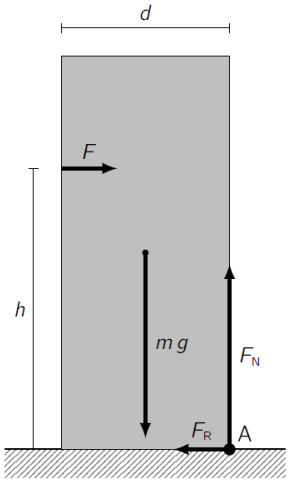
Aufgabensammlung IPhO-Auswahlwettbewerb:
Ein Quader der Masse m und Breite d wird horizontal mit Kraft F gedrückt. Greift die Kraft unten an, rutscht der Quader, ohne zu kippen. Ab Höhe h kippt der Quader, bevor er rutscht. Am Kippgrenzfall dreht er sich um die untere Kante. Bestimme h (Reibungskoeff. μ_H ist gegeben).



Tipp

- wenn F gerade noch nicht zum Kippen ausreicht, heben sich Drehmomente bzgl. A auf
- skizziere alle Kräfte - was gilt für F und f_H, wenn der Quader nicht rutscht?

Kippen oder Gleiten?



Quelle: IPhO-Auswahl

Zum Rutschen nötige Kraft:

$$F_{\text{Gleit}} = \mu_H mg = f_{H,max}$$

Zum Kippen nötige Kraft aus $\sum \vec{\tau}_A = 0$:

$$mg\frac{d}{2} = F_{Kipp}h \qquad \rightarrow \qquad F_{\text{Kipp}} = \frac{mgd}{2h}.$$

- $F_{\text{Gleit}} < F_{\text{Kipp}}$: Gleiten beginnt zuerst.
- $F_{\text{Kipp}} < F_{\text{Gleit}}$: Kippen beginnt zuerst.

Lösung

Angriffshöhe h, bei der Kippen vor Gleiten eintritt, erfüllt:

$$F_{\text{Kipp}} < F_{\text{Gleit}} \quad \Longleftrightarrow \quad h > \frac{d}{2\mu_H}.$$

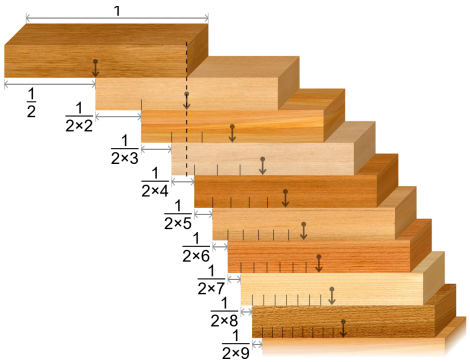
Abschluss & Trainingsaufgabe

Tipps zum Umgang mit Statik-Problemen

- **Wahl des Systems** – so groß, dass möglichst viele Unbekannte verschwinden & klein genug, sodass gesuchte Kraft nicht im System verschwindet
- **Kräfte skizzieren** – welche Normal-, Gewichts-, Reibungskraft & Spannung wirken?
- **Gleichgewicht** – geg. wenn $\sum \vec{F} = 0$ und $\sum \vec{\tau} = 0$
- **Rutschen?** – im Grenzfall nimmt Reibung max. Wert $f_H = \mu_H F_N$ an
- **Kippen?** – result. Drehmoment um Kipppunkt im Grenzfall 0
- **Drehpunkt geschickt wählen** – Unbekannte Kräfte eliminieren.
- **Ergebnis überprüfen** – Einheiten, sinnvolle Werte (VZ/Zahl) und Grenzfälle

Ziel der meisten Statik-Aufgaben ist, Bezugspunkte / Systeme geschickt zu wählen und alle relevanten Kräfte und ihre Angriffspunkte zu erkennen.

Blockstapelproblem



Quelle: Wikimedia

Stapel N identischer homogener Blöcke der Länge L, aufliegend auf der Tischkante mit max. Überhang x_N:

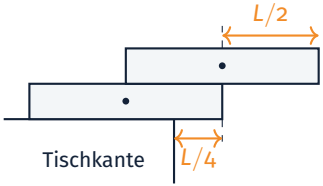
a) max. Überhang für 2 aufgelegte Blöcke (skizzieren)?

b) wo liegt der Schwerpunkt der $k-1$ obersten Blöcke relativ zum k-ten Block?

c) mithilfe von b) das Drehmoment-GGW für obere k Blöcke um Kante des $k+1$-ten Blocks aufstellen $\rightarrow$ bestimme Überhang y_k des k-ten Blocks

d) allg. Formel für x_N, was passiert für $N \rightarrow \infty$?

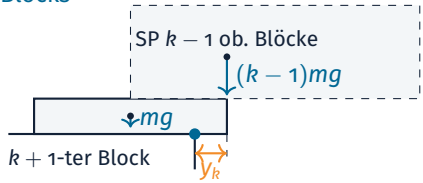
a) 2 Blöcke



Schwerpunkt des oberen Blocks liegt über Kante des Blocks darunter, Schwerpunkt beider Blöcke liegt auf der Tischkante $\rightarrow x_2 = \frac{3}{4}L$

b) Schwerpunkt der $k-1$ obersten Blöcke liegt optimal auf der Kante des k-ten Blocks

c) Drehmoment-GGW um Kante des $k+1$-ten Blocks

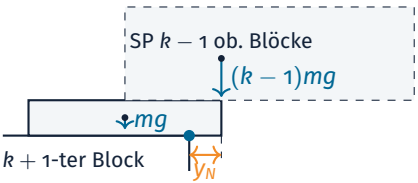


Drehmomente vom k-ten Block und den $k-1$ oberen Blöcken gleichen sich aus:

$$\boxed{(k-1)mgy_k = \left(\frac{L}{2} - y_k\right) mg}$$

$$\rightarrow y_k = \frac{L}{2k}$$

Reminder von c) Drehmoment-GGW um Kante des $k+1$-ten Blocks



Versatz des k-ten Blocks:

$$y_k = \frac{L}{2k}$$

d) ges. Überhang x_N, Verhalten für $N \to \infty$

$\to$ zuerst Stapel aller Blöcke genau an der Tischkante, dann zuerst obersten Block um y_1 verschieben, 2. Block um y_2 usw. bis zum N-ten Block um y_N

$\to$ Summe der Versätze ergibt x_N: :

$$x_N = \frac{L}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} = \frac{L}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right).$$

$\to$ harmon. Reihe $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$ divergiert, also $x_N \xrightarrow{N\to\infty} \infty$

- welche 3 GGW-Bedingungen gelten in der Ebene?
- gilt: $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow$ Körper ist im Gleichgewicht?
- welche Schritte sollten vor dem Aufstellen der Gleichungen passieren?
- was sind entscheidende Kriterien für Kippen/Rutschen(/Rollen)?
- wie wird Massenschwerpunkt bestimmt?

Fragen zum Vortragsinhalt oder zu Aufgaben (auch nicht im Vortrag erwähnte) gerne hier oder per Mail an luise.koehler01@stud.uni-goettingen.de

Skripte, Aufgaben etc. zur Vorbereitung

Aneignen/Nachschlagen von Inhalten, leichtere Aufgaben zum Einstieg:

- LEIFIphysik (Schulniveau): `https://www.leifiphysik.de/`
- Isaac Science (UK, viele MC Fragen): `https://isaacscience.org/`

Vorbereitungsmaterialien / Übungsaufgaben für die 2. Runde:

- IPhO Website, Material zur 2. Runde: `https://www.scienceolympiaden.de/ipho/internationale-physik-olympiade-material-download/material-aktuelle-runde-2`

spezif. Olympiadentraining, v.a. für höhere Runden → Tipps/Handouts und Aufgabensammlungen:

- Kevin Zhou, Physics Olympiad Handouts – M2 (Statics): `https://knzhou.github.io/teaching/`
- Offizielles IPhO-Archiv mit Aufgaben und Lösungen: `https://www.ipho-new.org/documentations/`
- Liste mit mehr Resourcen auf Art of Problem Solving: `https://artofproblemsolving.com/community/c164h2094716p15140851`