Geometrische Optik

Online-Training 2. Runde

Holger Maus

Überblick

1. Reflexion und Spiegelbilder
2. Abbildung durch dünne Linsen
3. Brechung und Totalreflexion

Lichtausbreitung und Reflexion

- Licht breitet sich von einer Lichtquelle in alle Richtungen aus.
- In der Strahlenoptik wird die Ausbreitung durch Lichtstrahlen modelliert.
- Ein idealer Lichtstrahl besitzt einen unendlich kleinen Durchmesser.

Reflexionsgesetz

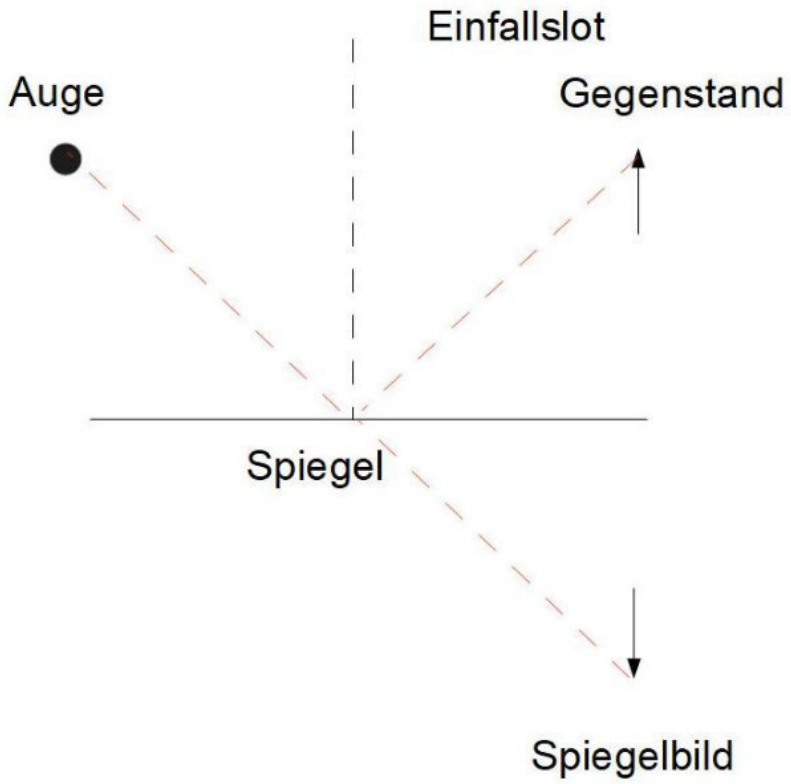
Der Einfallswinkel ist genauso groß wie der Reflexionswinkel:

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

- Beide Winkel werden zum Einfallslot gemessen.
- Das Einfallslot steht senkrecht auf der Spiegelebene.

Entstehung eines Spiegelbildes

- Licht vom Gegenstand wird am Spiegel reflektiert.
- Ein Teil des reflektierten Lichts gelangt ins Auge.
- Das Auge verlängert die Lichtstrahlen gedanklich geradlinig zurück.
- Dadurch erscheint das Bild hinter dem Spiegel.



Entstehung eines Spiegelbildes

Der Abbildungsmaßstab

Bei der Abbildung eines Gegenstands durch eine Linse gilt nach dem Strahlensatz:

$$\boxed{\frac{B}{G} = \frac{b}{g}}$$

- G Gegenstandsgröße
- B Bildgröße
- g Gegenstandsweite
- b Bildweite

Interpretation

Der Quotient aus Bildgröße und Gegenstandsgröße ist gleich dem Quotienten aus Bildweite und Gegenstandsweite.

Das Modell der dünnen Linse

- Die Dicke der Linse wird vernachlässigt.
- Die Lichtbrechung wird vereinfacht in der Mittelebene der Linse betrachtet.
- Tatsächlich wird Licht beim Eintritt in das Glas und beim Austritt aus dem Glas gebrochen.

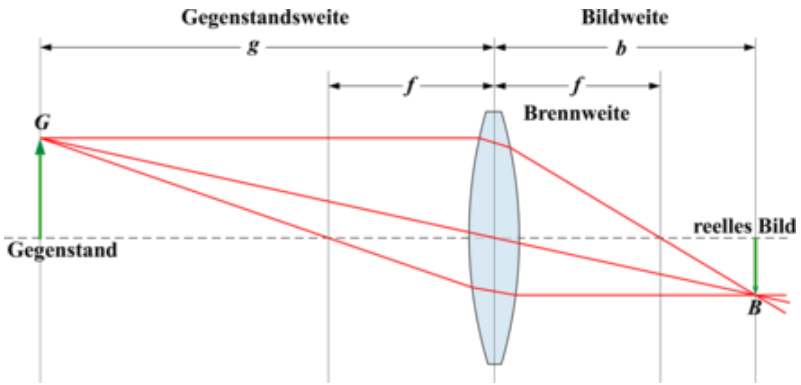
Ziel

Mit der Linsengleichung lassen sich Bildweite, Gegenstandsweite und Brennweite miteinander verknüpfen.

Die Linsengleichung: Strahlenkonstruktion

- Die Brennweite f beschreibt den Abstand zwischen Linse und Brennpunkt.
- Die Gegenstandsweite g ist der Abstand zwischen Gegenstand und Linse.
- Die Bildweite b ist der Abstand zwischen Bild und Linse.

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}}$$

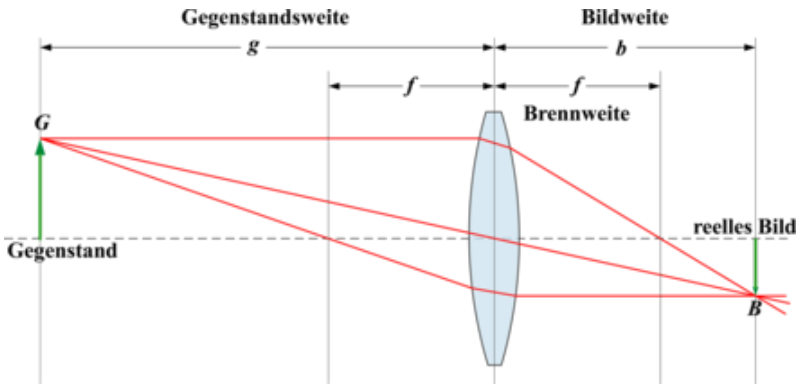


Skizze zur Linsengleichung von Anastasius zwerg, CC BY-SA 3.0

Aufgabe: Herleitung der Linsengleichung

- Leite die Linsengleichung her!

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}}$$



Skizze zur Linsengleichung von Anastasius zwerg, CC BY-SA 3.0

Herleitung der Linsengleichung (1)

Aus dem Strahlensatz folgt für die dargestellte Linsenkonstruktion:

$$\frac{G}{f} = \frac{B}{b-f}$$

Umstellen ergibt:

$$\frac{B}{G} = \frac{b-f}{f}$$

Mit dem Abbildungsmaßstab

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

erhält man:

$$\frac{b}{g} = \frac{b-f}{f}$$

Herleitung der Linsengleichung (2)

Ausgangspunkt:

$$\frac{b}{g} = \frac{b-f}{f}$$

Rechte Seite umformen:

$$\frac{b}{g} = \frac{b}{f} - 1$$

Durch Umstellen folgt:

$$\frac{b}{g} + 1 = \frac{b}{f}$$

Division durch b liefert:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Linsengleichung

Zwei dünne Linsen dicht hintereinander

Werden zwei dünne Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2 unmittelbar hintereinander angeordnet, kann man sie näherungsweise als ein Linsensystem betrachten.

Gesamtbrennweite

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}}$$

Voraussetzung: Der Abstand zwischen den Linsen ist gegenüber den übrigen Abständen vernachlässigbar.

Der Brechungsindex

Der Brechungsindex n beschreibt, wie stark sich die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium gegenüber der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum verringert.

$$\boxed{n = \frac{c_0}{c}}$$

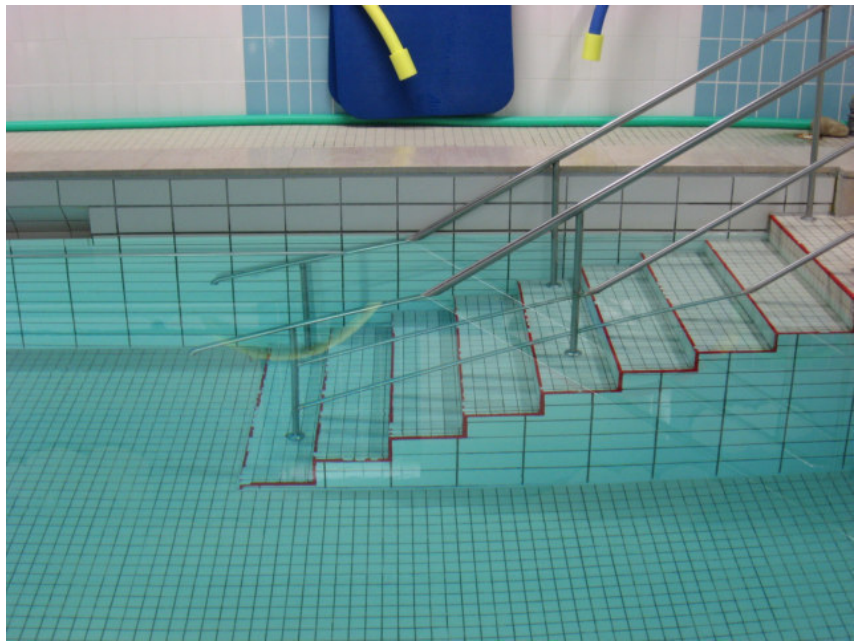
c_0 Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

c Lichtgeschwindigkeit im Medium

- Wasser hat einen höheren Brechungsindex als Luft.
- Beim Übergang zwischen Medien kann sich die Richtung des Lichtstrahls ändern.

Lichtbrechung im Schwimmbad

- Licht wird beim Übergang zwischen Medien unterschiedlicher Brechungsindizes gebrochen.
- Dadurch erscheint ein Gegenstand im Wasser an einer anderen Position.
- Ein Geländer kann an der Wasseroberfläche scheinbar einen Knick aufweisen.



Lichtbrechung im Schwimmbad von Panoga, CC BY-SA 4.0

Das Snelliussche Brechungsgesetz

Beim Übergang zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 gilt:

Brechungsgesetz

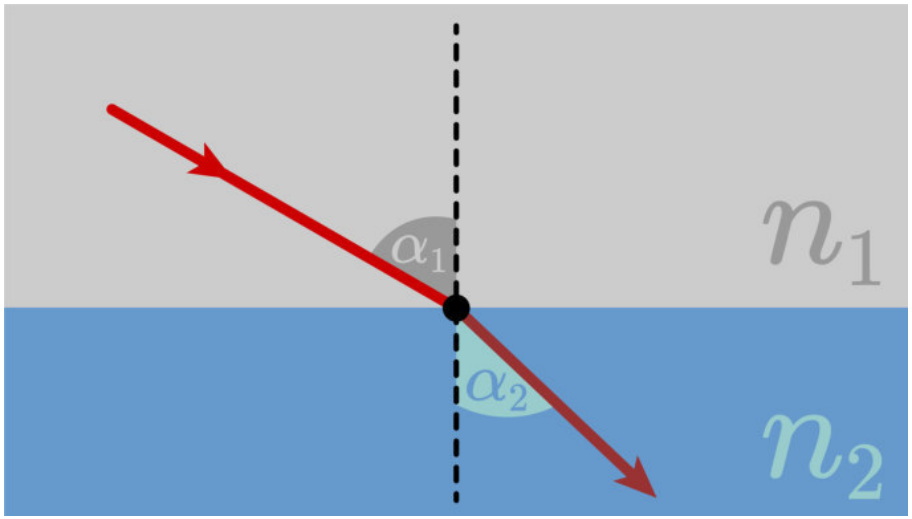
$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

- n_1, n_2 Brechungsindizes der Medien
- α_1 Einfallswinkel
- α_2 Brechungswinkel

Die Winkel werden jeweils zum Lot auf die Grenzfläche gemessen.

Veranschaulichung der Lichtbrechung

- Ein Lichtstrahl ändert beim Übergang zwischen zwei Medien im Allgemeinen seine Richtung.
- Wie stark er gebrochen wird, hängt von den Brechungsindizes und dem Einfallswinkel ab.
- Mit dem Snelliusschen Gesetz lässt sich der Brechungswinkel berechnen.

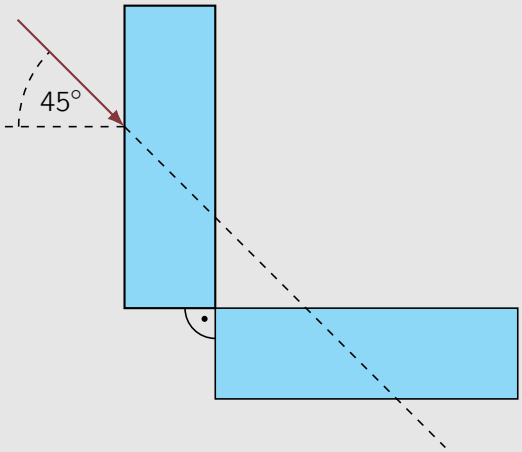


Snelliussches Brechungsgesetz

Aufgabe 6 Lichtbrechung (MC-Aufgabe)

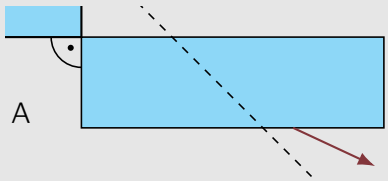
(2. Rd. zur IPhO 2020)

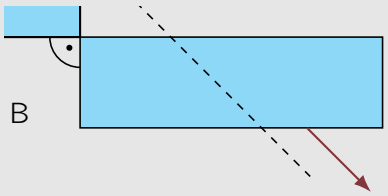
Ein Lichtstrahl trifft, wie nebenstehend abgebildet, auf eine Anordnung von zwei gleich großen, senkrecht zueinander aufgebauten Glasquadern und wird beim Eintritt in den ersten Quader gebrochen. Der Brechungsindex des Glases beträgt 1,5. Außerhalb der Quader befindet sich Luft.

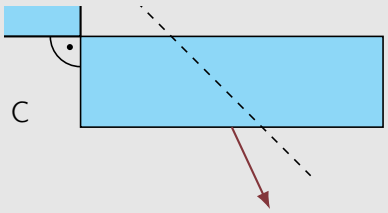


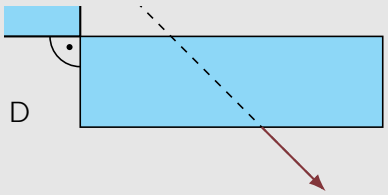
Welcher der folgenden Abbildungsausschnitte zeigt den Verlauf des gebrochenen Lichtstrahls nach dem Austritt aus dem zweiten Quader?

Der Verlauf des Lichtstrahls in dem Quader ist dabei nicht dargestellt und die gestrichelte Linie gibt den Verlauf des ungebrochenen Lichtstrahls wieder.









Antwortteil

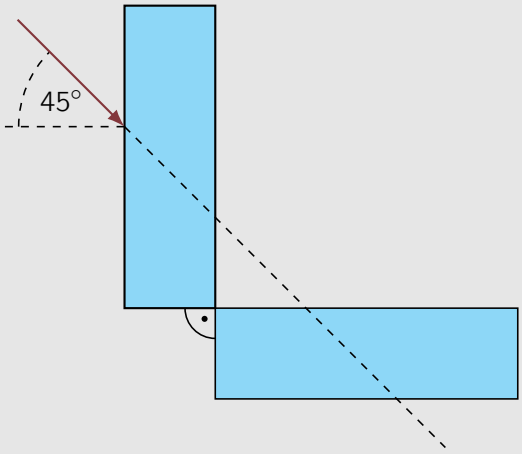
Rechnungen und Erläuterungen

Korrekte Antwort:

Aufgabe 6 Lichtbrechung (MC-Aufgabe)

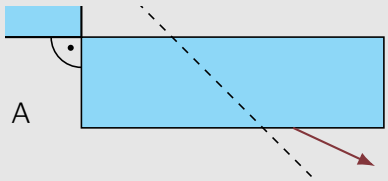
(2. Rd. zur IPhO 2020)

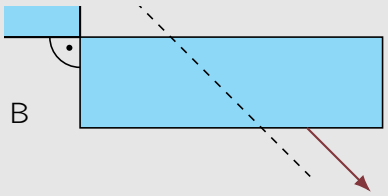
Ein Lichtstrahl trifft, wie nebenstehend abgebildet, auf eine Anordnung von zwei gleich großen, senkrecht zueinander aufgebauten Glasquadern und wird beim Eintritt in den ersten Quader gebrochen. Der Brechungsindex des Glases beträgt 1,5. Außerhalb der Quader befindet sich Luft.

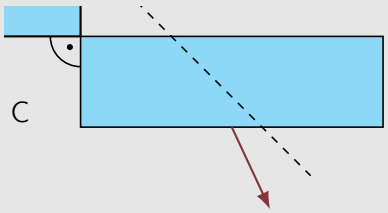


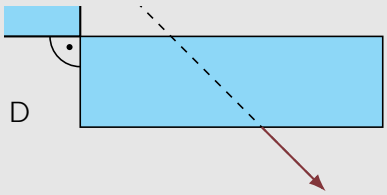
Welcher der folgenden Abbildungsausschnitte zeigt den Verlauf des gebrochenen Lichtstrahls nach dem Austritt aus dem zweiten Quader?

Der Verlauf des Lichtstrahls in dem Quader ist dabei nicht dargestellt und die gestrichelte Linie gibt den Verlauf des ungebrochenen Lichtstrahls wieder.









Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Bei der Brechung eines Lichtstrahls an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 gilt für die Lotwinkel α_1 und α_2 des einfallenden bzw. des gebrochenen Strahles das Snelliussche Brechungsgesetz

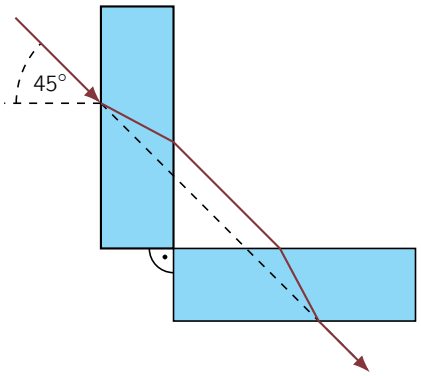
$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 \,.$$

Bei Eintritt in den ersten Glasquader wird der Lichtstrahl zum Lot hin gebrochen. Beim Austritt aus diesem vom Lot weg. Durch zweimalige Anwendung des Brechungsgesetzes ist leicht einzusehen, dass der Lotwinkel nach Austritt aus dem ersten Glasquader erneut 45° beträgt. Der Lichtstrahl ist allerdings verglichen mit dem Verlauf des ungebrochenen Lichtstrahls nach oben parallel verschoben.

Der Lichtstrahl trifft dann unter einem Lotwinkel von ebenfalls 45° auf den zweiten Glasquader und wird analog durch diesen lediglich verschoben, dieses Mal zu dem gestrichelten Verlauf hin. Da beide Glasquader gleich groß sind, ist auch die Verschiebung gleich groß, so dass der Lichtstrahl nach dem Austritt aus dem zweiten Glasquader auf der gestrichelten Linie verläuft.

Damit ist Antwort D die richtige.

Bemerkung: Man kann die Lösung auch direkt durch Konstruktion des Verlaufs des Lichtstrahls mit Hilfe des Brechungsgesetzes in der Skizze herleiten. Dies ist nebenstehend skizziert. Der Lotwinkel in den Glasquadern beträgt dabei etwa 28°.



Korrekte Antwort: *D*

Aufgabe 7 Interferenz (MC-Aufgabe)

(2. Rd. zur IPhO 2020)

In einem Versuch fällt einfarbiges Laserlicht senkrecht auf ein optisches Gitter mit 300 Linien pro mm. Hinter dem Gitter wird das Interferenzmuster auf einem Schirm beobachtet. Der Abstand des Schirms zum Gitter ist dabei sehr groß gegenüber der Ausdehnung des Interferenzmusters.

Die nebenstehenden Graustufenbilder zeigen die bei Verwendung von zwei Lasern mit unterschiedlichen Wellenlängen aber ansonsten gleicher Versuchsanordnung auf dem Schirm entstehenden Interferenzmuster. Die Wellenlänge des vom ersten Laser emittierten Lichts beträgt 650 nm.

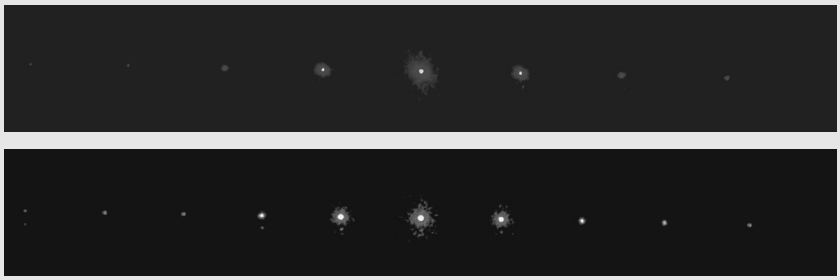


Abb. 1. *Interferenzmuster auf dem Schirm für eine Wellenlänge von* 650 nm *(oben) und eine zweite unbekannte Wellenlänge (unten). Die Bilder zeigen den gleichen Ausschnitt des Schirms.*

Wie groß ist die Wellenlänge des vom zweiten Laser emittierten Laserlichts?

A etwa 450 nm B etwa 530 nm C etwa 610 nm D etwa 690 nm

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Da der Abstand des Schirms zum Gitter groß verglichen mit dem Interferenzmuster auf dem Schirm ist, kann die Interferenz für kleine Winkel zu dem einfallenden Strahl betrachtet werden. Für den Abstand d_n des n-ten Interferenzmaximums auf dem Schirm vom Hauptmaximum in der Mitte gilt daher

$$n\lambda = g\frac{d_n}{\ell}\,. \tag{7.1}$$

Dabei bezeichnen λ die Wellenlänge des verwendeten Laserlichts, g die Gitterkonstante des optischen Gitters und ℓ den Abstand des Gitters vom Schirm. Bezeichne mit $\lambda_1 = 650\,\text{nm}$ die Wellenlänge des ersten Lasers und mit λ_2 die unbekannte Wellenlänge des zweiten Lasers. Da für beide Laser der gleiche

Totalreflexion

Licht kann an einer Grenzfläche nicht nur teilweise reflektiert, sondern auch vollständig reflektiert werden.

- Das Licht muss vom optisch dichteren in das optisch dünnere Medium übergehen wollen.
- Der Einfallswinkel muss größer als der Grenzwinkel α_G sein.
- Dann tritt keine gebrochene Lichtwelle im zweiten Medium auf.

Grenzwinkel der Totalreflexion

Für $n_1 > n_2$ gilt:

$$\boxed{\sin \alpha_G = \frac{n_2}{n_1}}$$

Aufgabe: Grenzwinkel Totalreflektion

- Leite die Formel für den Grenzwinkel der Totalreflektion her!

Grenzwinkel der Totalreflexion

Für $n_1 > n_2$ gilt:

$$\boxed{\sin \alpha_G = \frac{n_2}{n_1}}$$

Aufgabe 1 Ein unscharfes Bild

●●○

(1. Runde zur 47. IPhO 2016)

Ein Lineal wird fotografiert. Weit hinter dem Lineal befindet sich eine Lichterkette, deren kleine Lämpchen auf dem Foto unscharf erscheinen.

Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Abbildung durch eine einzelne, dünne Linse erzeugt wird.

Bestimme mit Hilfe des Fotos den Durchmesser der Kameralinse.

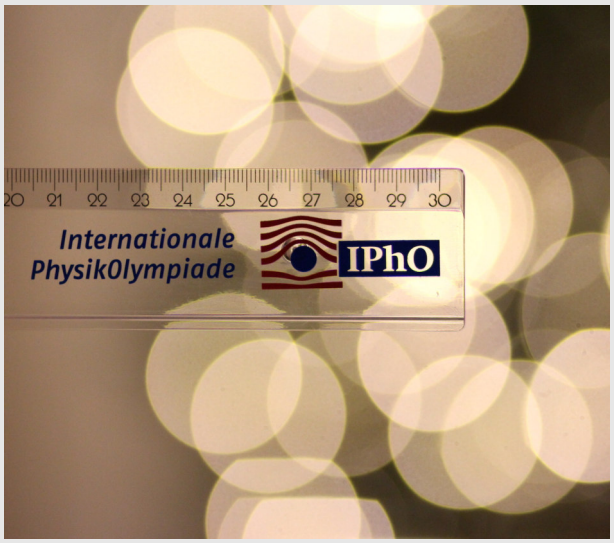


Abb. 1. *Unscharfes Foto einer Lichterkette.*

Aufgabe 1 Ein unscharfes Bild

●●○

(1. Runde zur 47. IPhO 2016)

Ein Lineal wird fotografiert. Weit hinter dem Lineal befindet sich eine Lichterkette, deren kleine Lämpchen auf dem Foto unscharf erscheinen.

Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Abbildung durch eine einzelne, dünne Linse erzeugt wird.

Bestimme mit Hilfe des Fotos den Durchmesser der Kameralinse.

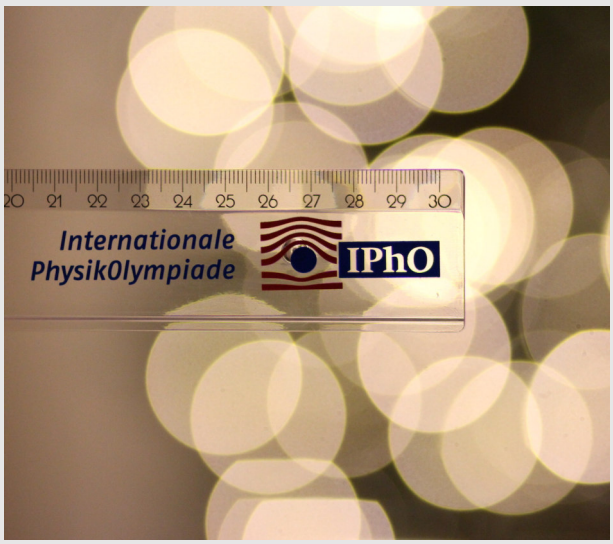


Abb. 1. *Unscharfes Foto einer Lichterkette.*

Lösung

Da die Lichterkette weit weg ist, treffen nahezu parallele Lichtstrahlen auf die Linse, deren Durchmesser L betrage. Die als Punktquellen annehmbaren Lichter erzeugen auf dem Bildsensor Kreise mit einem Durchmesser D. Die folgende Skizze veranschaulicht den Strahlenverlauf bei der Abbildung.

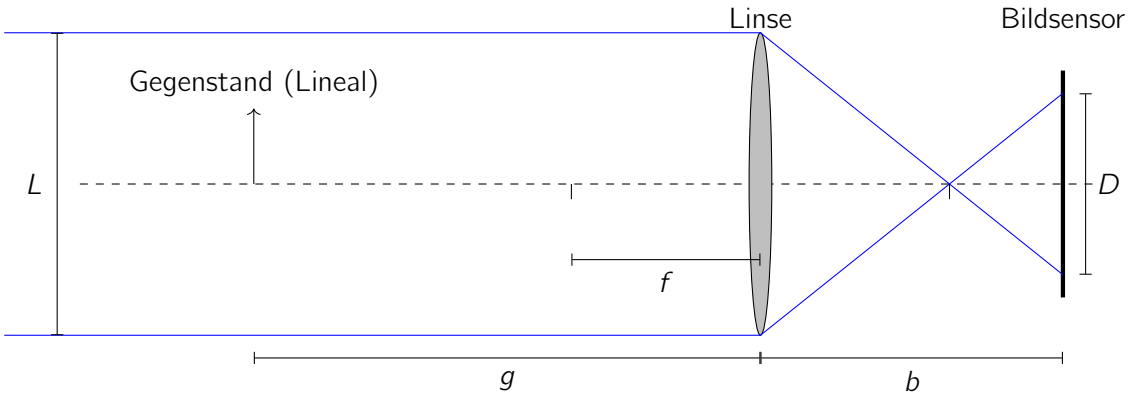


Abb. 2. *Strahlenverlauf bei der Abbildung einer Lampe der Lichterkette.*

Der Abstand des Lineals zur Linse wird dabei mit g und der Abstand des Bildes des Lineals auf dem Bildsensor zur Linse mit b bezeichnet. Außerdem werden die Gegenstandsgröße des Lineals (cm-Maßstab) mit G und die entsprechende Bildgröße mit B bezeichnet.

Mit diesen Bezeichnungen gilt aufgrund des Strahlensatzes

$$\frac{L}{f} = \frac{D}{b-f} \tag{1.1}$$

und außerdem für die Abbildung des Lineals

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{b}\frac{B}{G}\,. \tag{1.2}$$

Dies lässt sich in der Abbildungsgleichung für dünne Linsen nutzen, um diese umzuschreiben zu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b}\left(\frac{B}{G} + 1\right) \qquad \text{bzw.} \qquad b = f\left(1 + \frac{B}{G}\right) . \tag{1.3}$$

Eingesetzt in (1.1) ergibt sich damit für den Linsendurchmesser

$$\boxed{L = \frac{G}{B} D} . \tag{1.4}$$

Vermisst man also die Kreise mit dem scharf abgebildeten Lineal, erhält man den Linsendurchmesser.

Im vorliegenden Fall lässt sich der Durchmesser der Kreise zu etwa $(36{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mm}$ auf der Skala des Lineals bestimmen. Damit besitzt die Linse einen Durchmesser von

$$\boxed{L = (36{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mm}} . \tag{1.5}$$

Hinweis: Der ermittelte Linsendurchmesser stimmt bei dem verwendeten Objektiv nicht sehr gut mit dem aus Brennweite (85 mm) und Blendenzahl (1,8) zu berechnenden Wert von $L = 85\,\mathrm{mm}/1{,}8 \approx 47\,\mathrm{mm}$ überein. Die Annahme einer einfachen dünnen Linse scheint in diesem Fall also keine gute Näherung zu sein.

Bewertung - Ein unscharfes Bild		**Punkte**
1	Beschreibung der Situation (Skizze o.ä.)	2
	Verwendung des Strahlensatzes (1.1)	1
	Verwendung des Abbildungsmaßstabes (1.2) und der Abbildungsgleichung (1.3)	2
	Angabe eines Ausdrucks für den Linsendurchmesser (1.4)	3
	Numerische Bestimmung des Ergebnisses (1.5)	2
		10

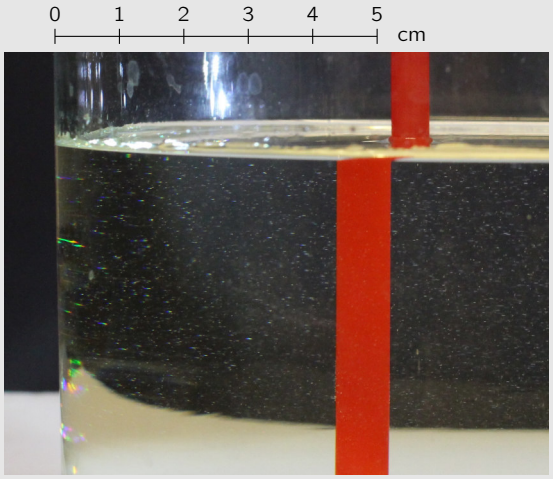
Aufgabe 2 Verschobener Strohhalm

●◐○

(1. Runde zur 49. IPhO 2018)

Ein Strohhalm wird mittig in ein teilweise mit einer transparenten Flüssigkeit gefülltes Glas getaucht. Beobachtet man das Glas von der Seite und verschiebt den Strohhalm senkrecht zur Blickrichtung und entlang des Durchmessers, scheint sich der Strohhalm in der Flüssigkeit gegenüber dem Strohhalm oberhalb der Flüssigkeit zu verschieben.

Das mit einem Maßstab versehene Foto zeigt die Situation, bei der sich der Strohhalmteil in der Flüssigkeit gerade von dem Teil oberhalb zu lösen scheint. Der Durchmesser des dabei verwendeten dünnwandigen Glases beträgt 14,4 cm. Nimm an, dass das Glas aus einer Entfernung betrachtet wird, die groß verglichen mit dem Durchmesser des Glases ist.



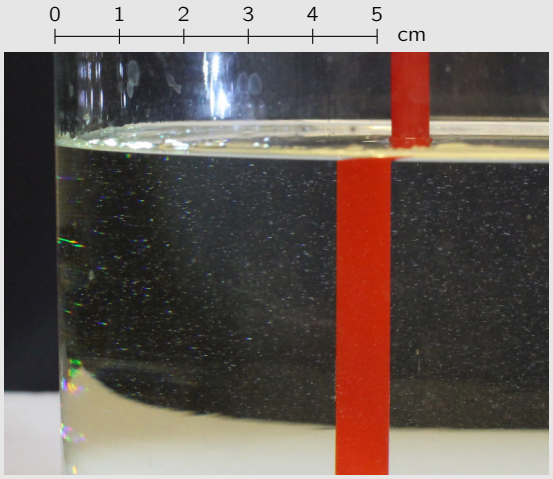
Bestimme näherungsweise den Brechungsindex der Flüssigkeit.

Aufgabe 2 Verschobener Strohhalm

●◐○

(1. Runde zur 49. IPhO 2018)

Ein Strohhalm wird mittig in ein teilweise mit einer transparenten Flüssigkeit gefülltes Glas getaucht. Beobachtet man das Glas von der Seite und verschiebt den Strohhalm senkrecht zur Blickrichtung und entlang des Durchmessers, scheint sich der Strohhalm in der Flüssigkeit gegenüber dem Strohhalm oberhalb der Flüssigkeit zu verschieben.



Das mit einem Maßstab versehene Foto zeigt die Situation, bei der sich der Strohhalmteil in der Flüssigkeit gerade von dem Teil oberhalb zu lösen scheint. Der Durchmesser des dabei verwendeten dünnwandigen Glases beträgt 14,4 cm. Nimm an, dass das Glas aus einer Entfernung betrachtet wird, die groß verglichen mit dem Durchmesser des Glases ist.

Bestimme näherungsweise den Brechungsindex der Flüssigkeit.

Lösung

Für die Brechung muss das dünnwandige Glas nicht mit berücksichtigt werden, so dass es ausreichend ist, den Übergang zwischen Luft und dem Flüssigkeitskörper zu untersuchen. Die nebenstehende Skizze zeigt eine Aufsicht auf das Glas. Dabei ist der Radius des Glases mit R bezeichnet, und d gibt den Durchmesser des Strohhalmes an. Die beiden roten Rechtecke symbolisieren die Querschnitte des Strohhalms (rechts) und des in der Flüssigkeit wahrgenommenen Bildes des Strohhalmes (links). Der Abstand zwischen dem rechten Rand des Strohhalms und dem Rand des Glases in dieser Situation wird mit a bezeichnet.

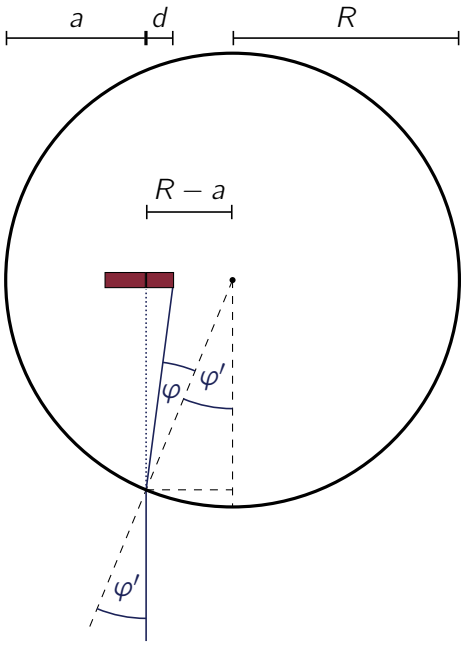


Abb. 3. *Aufsicht auf das Glas mit dem verschobenen Strohhalm.*

Da das Glas aus einer größeren Entfernung beobachtet wird, müssen die zum Beobachter laufenden Lichtstrahlen das Glas in dieser Aufsicht senkrecht nach unten verlassen. Mit den Bezeichnungen in der Abbildung ist

$$\frac{R-a}{R} = \sin\varphi' = n\sin\varphi \approx n\,\frac{R-a-d}{R}\,. \qquad (2.1)$$

Dabei wurde das Brechungsgesetz nach Snellius verwendet und es wurde ausgenutzt, dass die Entfernung vom Übergangspunkt zwischen Luft und Flüssigkeit zum linken Rand des Strohhalms etwa gleich groß ist wie die entsprechende Entfernung zum rechten Rand des Strohhalms[1].

[1] Der Winkel φ lässt sich auch ohne diese Näherung bestimmen. Es ist $\tan(\varphi'-\varphi) = d/\sqrt{R^2-(R-a)^2}$ und damit $\varphi = \varphi' - \arctan\frac{d}{\sqrt{R^2-(R-a)^2}}$. Daraus folgt der Brechungsindex

$$n = \frac{\frac{R-a}{R}}{\sin\left(\arcsin\frac{R-a}{R} - \arctan\frac{d}{\sqrt{R^2-(R-a)^2}}\right)} \approx 1{,}44\,.$$

Der Radius des Glases beträgt laut Aufgabenstellung $R = 7{,}2\,\mathrm{cm}$. Die in Abbildung 3 eingeführten Größen a und d lassen sich in dem gegebenen Foto mit einem Lineal vermessen und mit Hilfe des Maßstabes in der Abbildung bestimmen zu

$$a = (5{,}24 \pm 0{,}06)\,\mathrm{cm} \qquad \text{und} \qquad d = (0{,}59 \pm 0{,}06)\,\mathrm{cm}\,. \tag{2.2}$$

Mit dem Ergebnis (2.1) und den bestimmten Werten folgt daraus für den Brechungsindex der Flüssigkeit

$$\boxed{n = \frac{R-a}{R-a-d} \approx (1{,}43 \pm 0{,}08)}\,. \tag{2.3}$$

Hinweis: Von den Teilnehmenden wird keine Abschätzung der Unsicherheit des Ergebnisses erwartet. Die verwendete Flüssigkeit war 86,5 % Glycerin mit einem Brechungsindex von etwa 1,45. Der bestimmte Wert ist im Rahmen der Fehlergrenzen gut mit diesem Wert vereinbar.

Bewertung - Verschobener Strohhalm		**Punkte**
2	Beschreiben des Strahlenverlaufs (Skizze o.ä.)	2
	Verwenden des Brechungsgesetzes	1
	Nutzen sinnvoller Näherungen (dünnwandiges Glas, ggf. geometrische Näherung)	1
	Aufstellen einer Beziehung zwischen Brechungsindex und messbaren Größen ähnlich zu (2.3)	2
	Bestimmen notwendiger Größen aus Foto mit Hilfe des Maßstabes	2
	Angeben des Ergebnisses mit $1{,}40 \leq n \leq 1{,}50$ (noch 1 Pkt. bei $1{,}35 \leq n < 1{,}40$ oder $1{,}50 < n \leq 1{,}55$)	2
		10

Literatur: Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus dem Artikel Gluck, P. (2011). A simple method to measure the refractive index of a liquid. *Physics Education, 46* (3), 253.