Thermodynamik – Gase

Skript zum Online-Training für die 2. Runde der PhysikOlympiade 2027

Johann Wieczorek

6. November 2026

Über dieses Skript

Dieses Skript begleitet den Vortrag *Thermodynamik – Gase* im Online-Training für die 2. Runde der PhysikOlympiade. Es setzt **keine Vorkenntnisse in Thermodynamik** voraus. Du brauchst nur etwas Mechanik (Kraft, Arbeit, Energie) und den sicheren Umgang mit Potenzen und Logarithmen.

Ziel ist, dass du Aufgaben zu Gasen selbst ansetzen kannst: das System festlegen, den Prozess erkennen und Wärme und Arbeit richtig bilanzieren. Herleitungen kommen nur so weit vor, wie sie beim Verstehen helfen. Kästen mit der Überschrift *Für Interessierte* enthalten kurze Herleitungen mit Integralrechnung. Du kannst sie beim ersten Lesen überspringen.

Zu jedem Prozess gibt es eine Kurzaufgabe. Die ausführlichen Lösungen stehen gesammelt in Abschnitt 6 am Ende des Skripts. **Versuche jede Aufgabe zuerst selbst**, bevor du die Lösung liest. Am Ende findest du eine Formelsammlung für deinen eigenen Formelzettel. Ausführlichere Darstellungen stehen im Lehrbuch von Tipler und Mosca (siehe Literatur).

Inhaltsverzeichnis

1. Grundbegriffe **3**
1.1. System und Zustand . . . 3
1.2. Innere Energie, Wärme und Arbeit . . . 3
1.3. Der erste Hauptsatz . . . 4
1.4. Ein erstes Beispiel: Kompression ohne Wärmeaustausch . . . 5

2. Das ideale Gasgesetz **5**
2.1. Druck, Volumen, Temperatur und Teilchenzahl . . . 5
2.2. Absolute Temperatur . . . 6
2.3. Teilchen in Mol zählen . . . 6
2.4. Die Dichte eines idealen Gases . . . 7

3. Energie im Gas **8**
3.1. Energie eines einatomigen Gases . . . 8
3.2. Wie schnell sind die Teilchen? . . . 8
3.3. Moleküle: Translation, Rotation und Schwingung . . . 9

4. Zustandsänderungen **10**
4.1. Das p-V-Diagramm . . . 10
4.2. Volumenarbeit . . . 11
4.3. Isochorer Prozess: konstantes Volumen . . . 12
4.4. Isobarer Prozess: konstanter Druck . . . 13
4.5. Isothermer Prozess: konstante Temperatur . . . 14
4.6. Adiabatischer Prozess: kein Wärmeaustausch . . . 16
4.7. Die vier Prozesse im Überblick . . . 17
4.8. Thermodynamik = Shut up and calculate! . . . 17

5. Aufgabe zum Weiterdenken: Aufsteigende Luftmassen **18**

6. Lösungen der Aufgaben **20**

Literatur **23**

A. Formelsammlung **24**

1. Grundbegriffe

1.1. System und Zustand

Ein Gas besteht aus unvorstellbar vielen Teilchen. Schon ein Liter Luft enthält etwa $2{,}5 \cdot 10^{22}$ Moleküle. Die Bewegung jedes einzelnen Teilchens zu verfolgen ist aussichtslos. Die Thermodynamik beschreibt das Gas deshalb mit wenigen *makroskopischen* Größen, die man messen kann.

Zuerst legt man fest, was man betrachtet. Das **System** ist bei uns immer eine bestimmte Gasmenge, zum Beispiel das Gas in einem Zylinder mit beweglichem Kolben (Abb. 1). Alles andere, also Zylinderwände, Kolben und die Luft draußen, ist die **Umgebung**.

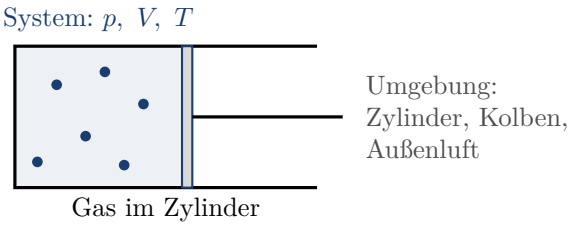


Abbildung 1: Das System ist die Gasmenge im Zylinder. Der Kolben kann sich bewegen.

Der **Zustand** des Gases wird durch folgende Größen beschrieben:

- **Druck** p: Kraft pro Fläche, $p = F/A$. Einheit: $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}$. Oft benutzt man $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$, das ist ungefähr der Luftdruck auf Meereshöhe.
- **Volumen** V in $\mathrm{m^3}$. Es gilt $1\,\mathrm{L} = 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$.
- **Temperatur** T. In Formeln immer die absolute Temperatur in Kelvin (Abschnitt 2.2).
- **Innere Energie** U in Joule.

Diese Größen heißen **Zustandsgrößen**: Sie hängen nur vom momentanen Zustand ab, nicht davon, wie das Gas in diesen Zustand gekommen ist.

1.2. Innere Energie, Wärme und Arbeit

Größe	Bezeichnung	Bedeutung
U	Innere Energie	Energie der ungeordneten Teilchenbewegung
Q	Wärme	Energieübertrag aufgrund eines Temperaturunterschieds
W	Arbeit	Energieübertrag bei Expansion oder Kompression des Gases

Die **innere Energie** U ist die Summe der Energien aller Teilchen in ihrer ungeordneten Bewegung. Die Bewegung des Behälters als Ganzes gehört nicht dazu: Ein Gas in einem fahrenden Zug ist nicht heißer als im stehenden Zug. Wie U genau aussieht, sehen wir in Abschnitt 3.

Die innere Energie kann sich auf zwei Arten ändern:

- Durch **Wärme** Q: Energie fließt von selbst vom wärmeren zum kälteren Körper, etwa von einer heißen Herdplatte in einen Topf.
- Durch **Arbeit** W: Der Kolben wird bewegt, das Gas wird zusammengedrückt oder dehnt sich aus.

Wärme und Arbeit beschreiben *Vorgänge*, U beschreibt einen *Zustand*. Ein Gas „hat“ eine innere Energie, aber es „hat“ keine Wärme. Ein Vergleich mit einem Bankkonto hilft: U ist der Kontostand. Q und W sind zwei verschiedene Arten von Ein- und Auszahlungen, etwa Bareinzahlung und Überweisung. Am Kontostand sieht man nicht mehr, auf welchem Weg das Geld gekommen ist.

1.3. Der erste Hauptsatz

Energie geht nicht verloren. Für das Gas heißt das:

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

$$\Delta U = Q + W$$

Die Änderung der inneren Energie ist gleich der zugeführten Wärme plus der am Gas verrichteten Arbeit.

Die Vorzeichen sind so gewählt, dass alles positiv zählt, was dem Gas Energie *zuführt*:

	positiv	**negativ**
Wärme Q	dem Gas zugeführt	vom Gas abgegeben
Arbeit W	Gas wird komprimiert	Gas expandiert

Expandiert das Gas, schiebt es den Kolben weg und gibt dabei Energie an die Umgebung ab. Dann ist $W < 0$.

Beispiel: Ein Gas nimmt $Q = 100\,\mathrm{J}$ Wärme auf und verrichtet beim Ausdehnen $40\,\mathrm{J}$ Arbeit am Kolben, also $W = -40\,\mathrm{J}$. Dann gilt $\Delta U = 100\,\mathrm{J} - 40\,\mathrm{J} = 60\,\mathrm{J}$.

Achtung: Manche Bücher verwenden die Arbeit, die *das Gas* verrichtet, und schreiben $\Delta U = Q - W$. Das ist physikalisch dasselbe, nur mit anderem Vorzeichen von W. Prüfe in jeder Aufgabe und jedem Buch, welche Konvention gilt. Dieses Skript folgt dem Tipler.

1.4. Ein erstes Beispiel: Kompression ohne Wärmeaustausch



Abbildung 2: Der Kolben wird schnell hineingedrückt. Die Teilchenzahl bleibt gleich.

Wir drücken den Kolben einer Luftpumpe schnell hinein. Was passiert mit der inneren Energie?

- Das Gas wird komprimiert, also ist $W > 0$.
- Der Vorgang ist so schnell, dass kaum Wärme durch die Wände fließen kann: $Q \approx 0$.
- Damit gilt $\Delta U = W > 0$. Die innere Energie steigt, das Gas wird **wärmer**.

Das merkt man beim Aufpumpen eines Fahrradreifens: Die Pumpe wird unten warm. Wie groß der Effekt ist, rechnen wir in Aufgabe 5 aus.

2. Das ideale Gasgesetz

2.1. Druck, Volumen, Temperatur und Teilchenzahl

Wovon hängt der Druck eines Gases ab? Der Druck entsteht dadurch, dass die Teilchen ständig gegen die Wand stoßen und dabei eine Kraft ausüben.

- Sind doppelt so viele Teilchen im gleichen Volumen, gibt es doppelt so viele Stöße. Der Druck verdoppelt sich: $p \propto N/V$.
- Bei höherer Temperatur bewegen sich die Teilchen schneller. Sie stoßen häufiger und heftiger gegen die Wand: $p \propto T$.

Fasst man beides zusammen, erhält man das ideale Gasgesetz:

Ideales Gasgesetz

$$pV = Nk_\mathrm{B}T$$

N: Anzahl der Teilchen, $k_\mathrm{B} \approx 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$: Boltzmann-Konstante, T: absolute Temperatur in Kelvin.

Das Gesetz beschreibt ein **ideales Gas**. In diesem Modell sind die Teilchen punktförmig und wechselwirken nur über Stöße miteinander. Das ist eine gute Näherung für verdünnte Gase, die weit von der Verflüssigung entfernt sind. Luft unter Alltagsbedingungen erfüllt das Gesetz auf besser als ein Prozent genau. Bei hohen Drücken oder kurz vor dem Kondensieren wird es ungenau.

2.2. Absolute Temperatur

Warum muss im Gasgesetz die Temperatur in Kelvin stehen? Ein einfaches Experiment zeigt es: Man schließt ein Gas in einen starren Behälter ein und misst den Druck bei verschiedenen Temperaturen in Grad Celsius. Die Messpunkte liegen auf einer Geraden (Abb. 3).

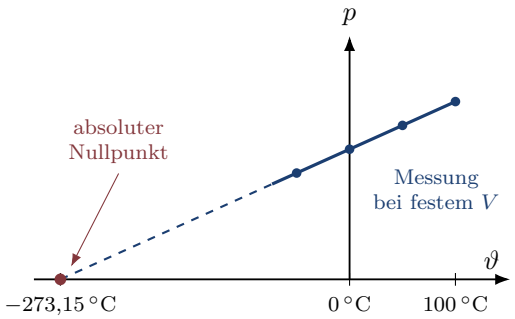


Abbildung 3: Druck eines Gases bei festem Volumen. Die verlängerte Gerade erreicht $p = 0$ bei $-273{,}15\,^\circ\mathrm{C}$.

Verlängert man die Gerade, erreicht sie $p = 0$ bei $-273{,}15\,^\circ\mathrm{C}$. Das Ergebnis ist für jedes verdünnte Gas gleich. Kälter kann es nicht werden, denn ein negativer Druck wäre sinnlos. Diese Temperatur ist der **absolute Nullpunkt**. Die Kelvin-Skala beginnt dort und hat dieselbe Schrittweite wie die Celsius-Skala:

$$T\,[\mathrm{K}] = \vartheta\,[^\circ\mathrm{C}] + 273{,}15$$

In der Kelvin-Skala ist der Druck bei festem Volumen proportional zu T, genau wie das Gasgesetz verlangt.

Merke

Bei **Verhältnissen** von Temperaturen, also in $pV = Nk_\mathrm{B}T$ und allen Formeln daraus, immer Kelvin verwenden. Bei **Differenzen** ΔT sind die Zahlenwerte in Kelvin und Grad Celsius gleich.

Beispiel: Ein starrer Behälter erwärmt sich von $20\,^\circ\mathrm{C}$ auf $40\,^\circ\mathrm{C}$. Verdoppelt sich der Druck? Nein:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{313{,}15\,\mathrm{K}}{293{,}15\,\mathrm{K}} \approx 1{,}068.$$

Der Druck steigt nur um etwa 6,8 %.

2.3. Teilchen in Mol zählen

Teilchenzahlen sind riesig. Deshalb zählt man sie in Paketen: Ein **Mol** enthält $N_\mathrm{A} \approx 6{,}022 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Für die Stoffmenge n in Mol gilt $N = nN_\mathrm{A}$. Setzt man das ins Gasgesetz ein, erhält man

$$pV = Nk_\mathrm{B}T = n\,\underbrace{N_\mathrm{A}k_\mathrm{B}}_{=R}\,T \qquad \Longrightarrow \qquad pV = nRT.$$

N_A	Avogadro-Konstante	$6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$	Teilchen pro Mol
k_B	Boltzmann-Konstante	$1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$	pro Teilchen
R	Gaskonstante	$8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}$	pro Mol

Beide Formen beschreiben dasselbe Gas. Man wählt die Form, die zu den gegebenen Größen passt: $pV = Nk_\mathrm{B}T$, wenn mit einzelnen Teilchen gerechnet wird, $pV = nRT$, wenn Stoffmengen oder Massen gegeben sind.

Aus der Masse m eines Gases erhält man die Stoffmenge mit der **molaren Masse** M:

$$n = \frac{m}{M}.$$

Luft besteht zu etwa 78 % aus Stickstoff $\mathrm{N_2}$ ($M = 28\,\mathrm{g/mol}$) und zu 21 % aus Sauerstoff $\mathrm{O_2}$ ($M = 32\,\mathrm{g/mol}$). Im Mittel gilt für Luft $M \approx 29\,\mathrm{g/mol}$. In Formeln immer in kg/mol einsetzen, also $M = 0{,}029\,\mathrm{kg/mol}$.

Beispiel: Wie viele Moleküle enthält ein Liter Luft bei 1,0 bar und 20 °C?

$$N = \frac{pV}{k_\mathrm{B}T} = \frac{10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}}{1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 293\,\mathrm{K}} \approx 2{,}5 \cdot 10^{22}, \qquad n = \frac{N}{N_\mathrm{A}} \approx 0{,}041\,\mathrm{mol}.$$

2.4. Die Dichte eines idealen Gases

Mit $n = m/M$ und der Dichte $\rho = m/V$ lässt sich das Gasgesetz umschreiben:

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad \Longrightarrow \quad pM = \frac{m}{V}RT = \rho RT \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{pM}{RT}}$$

Für Luft bei 1,0 bar und 20 °C ergibt das $\rho \approx 1{,}19\,\mathrm{kg/m^3}$. Ein Kubikmeter Luft wiegt also gut ein Kilogramm.

Verwechsle nicht die Dichte $\rho = m/V$ (Masse pro Volumen) mit der molaren Masse $M = m/n$ (Masse pro Mol).

Wird die Dichte beim Erwärmen immer kleiner? Das hängt davon ab, was dabei konstant bleibt:

- Bei *festem Druck* gilt $\rho \propto 1/T$. Warme Luft ist leichter als kalte Luft bei gleichem Druck. Deshalb steigt sie auf, etwa in einem Heißluftballon oder in der Aufgabe in Abschnitt 5.
- In einem *starren, geschlossenen Behälter* sind Masse und Volumen fest. Die Dichte bleibt gleich, es steigt nur der Druck.

3. Energie im Gas

3.1. Energie eines einatomigen Gases

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall: einem Gas aus einzelnen Atomen, zum Beispiel Helium oder Argon. Im idealen Gas wechselwirken die Teilchen nicht miteinander. Es gibt also keine potentielle Energie zwischen ihnen. Die innere Energie ist allein die **Bewegungsenergie** der Teilchen.

Wie groß ist diese Energie? Die statistische Physik liefert eine einfache Regel, die wir hier ohne Beweis verwenden:

Gleichverteilungssatz

Im thermischen Gleichgewicht trägt jede Raumrichtung pro Teilchen im Mittel die Energie $\frac{1}{2}k_\mathrm{B}T$ bei.

Plausibel ist das, weil keine Raumrichtung bevorzugt ist: Die Bewegungsenergie verteilt sich im Mittel gleichmäßig auf x, y und z. Für ein Teilchen gilt also

$$\langle E_\mathrm{kin}\rangle = \underbrace{\tfrac{1}{2}k_\mathrm{B}T}_{x} + \underbrace{\tfrac{1}{2}k_\mathrm{B}T}_{y} + \underbrace{\tfrac{1}{2}k_\mathrm{B}T}_{z} = \tfrac{3}{2}k_\mathrm{B}T.$$

Die spitzen Klammern bezeichnen einen Mittelwert über alle Teilchen. Für alle N Teilchen zusammen ergibt sich

$$U = N \cdot \tfrac{3}{2}k_\mathrm{B}T = \tfrac{3}{2}nRT.$$

Daraus folgen zwei wichtige Einsichten:

- **Temperatur misst die mittlere Bewegungsenergie der Teilchen.** Am absoluten Nullpunkt käme die Bewegung im klassischen Bild zum Stillstand.
- Die innere Energie eines idealen Gases hängt **nur von der Temperatur** ab, nicht von Druck oder Volumen. Bleibt T konstant, bleibt auch U konstant. Das brauchen wir beim isothermen Prozess.

3.2. Wie schnell sind die Teilchen?

Aus der mittleren Energie lässt sich eine typische Geschwindigkeit berechnen. Ein Teilchen der Masse m_T hat im Mittel die Energie $\frac{3}{2}k_\mathrm{B}T$:

$$\tfrac{1}{2}m_\mathrm{T}\langle v^2\rangle = \tfrac{3}{2}k_\mathrm{B}T \quad\Longrightarrow\quad \boxed{v_\mathrm{rms} = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3k_\mathrm{B}T}{m_\mathrm{T}}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$$

Im letzten Schritt wurden $m_\mathrm{T} = M/N_\mathrm{A}$ und $R = N_\mathrm{A}k_\mathrm{B}$ verwendet. Der Index „rms“ steht für *root mean square*, die Wurzel aus dem Mittelwert der Geschwindigkeitsquadrate. Die einzelnen Teilchen sind verschieden schnell. v_rms ist ein typischer Wert.

Gas bei 300 K	molare Masse	v_{rms}
Stickstoff N_2	28 g/mol	≈ 520 m/s
Helium He	4 g/mol	≈ 1370 m/s

Die Moleküle der Luft sind also schneller als der Schall (≈ 340 m/s). Bei gleicher Temperatur haben alle Teilchen im Mittel dieselbe Bewegungsenergie. Leichte Teilchen sind deshalb schneller als schwere.

3.3. Moleküle: Translation, Rotation und Schwingung

Ein einzelnes Atom kann sich nur durch den Raum bewegen. Ein Molekül wie O_2 kann zusätzlich rotieren und schwingen. Jede unabhängige Art, Energie zu speichern, nennt man einen **Freiheitsgrad**. Ihre Anzahl wird mit f bezeichnet.

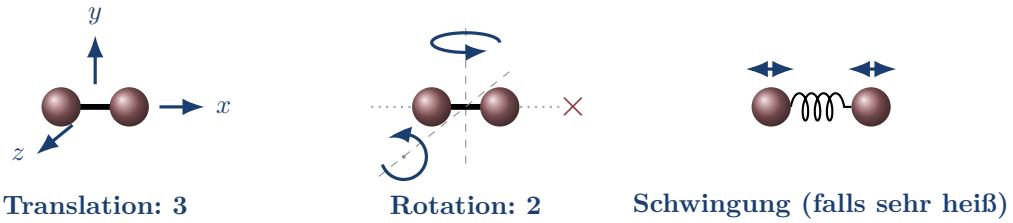


Abbildung 4: Bewegungsmöglichkeiten eines O_2-Moleküls. Die Stange zwischen den Atomen dient nur der Anschauung.

- **Translation:** Bewegung des ganzen Moleküls in x-, y- und z-Richtung. Das sind 3 Freiheitsgrade, wie beim einzelnen Atom.
- **Rotation:** Das Molekül kann sich um die zwei Achsen senkrecht zur Bindung drehen. Das sind 2 Freiheitsgrade. Die Drehung um die Bindungsachse selbst (in Abb. 4 durchgekreuzt) zählt nicht: Die Atome liegen auf dieser Achse, ihr Trägheitsmoment ist winzig, und quantenmechanisch lässt sich diese Drehung bei normalen Temperaturen nicht anregen.
- **Schwingung:** Die Atome können gegeneinander schwingen wie zwei Kugeln an einer Feder. Dabei wird kinetische und potentielle Energie gespeichert. Eine Schwingung braucht aber eine Mindestenergie, die viel größer als $k_{\text{B}}T$ bei Raumtemperatur ist (ein Effekt der Quantenmechanik). Bei Raumtemperatur ist die Schwingung deshalb „eingefroren“ und zählt nicht mit. Erst bei sehr hohen Temperaturen trägt sie bei.

Für jeden Freiheitsgrad gilt wieder der Gleichverteilungssatz: Er trägt pro Teilchen im Mittel $\frac{1}{2}k_{\text{B}}T$ bei.

Innere Energie eines idealen Gases

$$U = \frac{f}{2} nRT, \qquad \Delta U = \frac{f}{2} nR\,\Delta T$$

einatomig (He, Ar)	$f = 3$
zweiatomig bei Raumtemperatur (O_2, N_2, Luft)	$f = 5 = 3 + 2$
zweiatomig, sehr heiß	$f = 5 +$ Schwingung

Luft besteht fast nur aus O_2 und N_2 und ist deshalb zweiatomig: $f = 5$.

Typischer Fehler: In $v_{\text{rms}} = \sqrt{3RT/M}$ steht immer die 3, auch bei Luft. Für die Geschwindigkeit des Moleküls zählt nur die Translation. Rotation bewegt das Molekül nicht von der Stelle.

4. Zustandsänderungen

4.1. Das p-V-Diagramm

Ändert sich der Zustand eines Gases, spricht man von einer **Zustandsänderung** oder einem **Prozess**. Prozesse stellt man anschaulich im p-V-Diagramm dar (Abb. 5): Das Volumen liegt waagerecht, der Druck senkrecht.

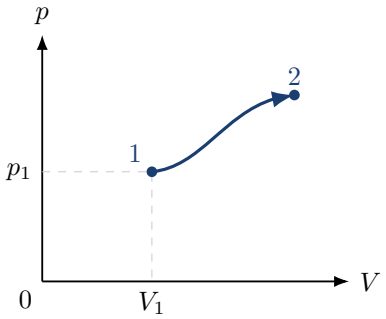


Abbildung 5: Ein Prozess im p-V-Diagramm vom Zustand 1 zum Zustand 2.

- **Ein Punkt** ist ein Gleichgewichtszustand. Bei fester Gasmenge legt er auch die Temperatur fest: $T = pV/(nR)$. Je weiter rechts oben ein Punkt liegt, desto größer ist pV und damit T.
- **Ein Weg** ist die Abfolge der Zustände während eines Prozesses.

Einen Weg kann man nur zeichnen, wenn das Gas zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht ist, also überall denselben Druck und dieselbe Temperatur hat. Das ist der Fall, wenn der Prozess langsam und ohne Reibung abläuft. Ein solcher Prozess ist **reversibel**: Er ließe sich ideal umkehren, ohne bleibende Änderungen an System und Umgebung. Alle Prozesse in diesem Skript werden als reversibel angenommen.

4.2. Volumenarbeit

Wie viel Arbeit wird verrichtet, wenn sich das Volumen eines Gases ändert? Das Gas drückt mit der Kraft $F = pA$ auf den Kolben der Fläche A (Abb. 6). Verschiebt sich der Kolben bei konstantem Druck um die Strecke s, ist die Arbeit „Kraft mal Weg“:

$$|W| = Fs = pAs = p\,|\Delta V|.$$

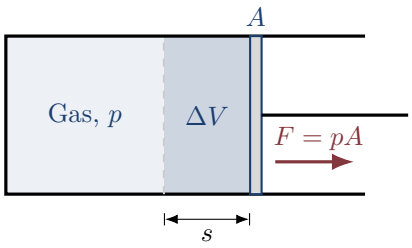


Abbildung 6: Das Gas schiebt den Kolben um die Strecke s. Das Volumen wächst um $\Delta V = As$.

Mit Vorzeichen, also als Arbeit *am* Gas, gilt:

Volumenarbeit bei konstantem Druck

$$W = -p\,\Delta V$$

Expansion: $\Delta V > 0$, also $W < 0$. Das Gas gibt Energie ab.
Kompression: $\Delta V < 0$, also $W > 0$. Dem Gas wird Energie zugeführt.

Das Minuszeichen kommt allein aus unserer Vorzeichenkonvention.

Arbeit als Fläche. Im p-V-Diagramm ist $p\,|\Delta V|$ die Fläche des Rechtecks unter dem Weg (Abb. 7). Ändert sich der Druck unterwegs, zerlegt man den Weg in viele kleine Stücke. Auf jedem Stück ist p fast konstant, und die Arbeit ist die Fläche eines schmalen Rechtecks. Alle Rechtecke zusammen ergeben die Fläche unter der Kurve:

Merke

Der Betrag der Volumenarbeit ist die **Fläche unter der Kurve** im p-V-Diagramm. Kurz schreibt man dafür

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V.$$

Für die Aufgaben in diesem Skript musst du keine Integrale berechnen. Das Integral ist nur eine Schreibweise für die Fläche.

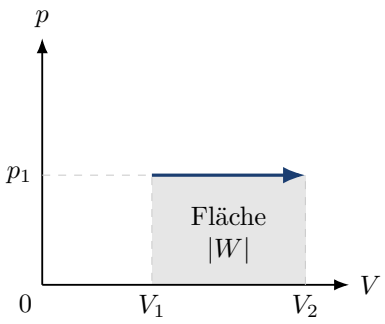


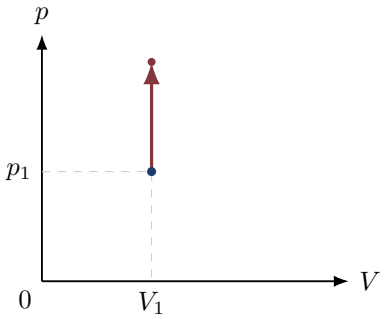
Abbildung 7: Bei konstantem Druck ist die Arbeit eine Rechteckfläche.

Eine wichtige Folgerung: Die Arbeit hängt vom *Weg* ab, nicht nur von Anfangs- und Endzustand. Zwei verschiedene Wege zwischen denselben Punkten haben im Allgemeinen verschieden große Flächen unter sich. Die innere Energie dagegen ist eine Zustandsgröße.

Im Folgenden betrachten wir vier Standardprozesse. Bei jedem bleibt eine Größe konstant. Zur Orientierung schreiben wir jedes Mal das Gasgesetz hin und markieren die konstanten Größen rot.

4.3. Isochorer Prozess: konstantes Volumen

Isochor heißt „bei gleichem Volumen“. Das Gas ist in einem starren Behälter eingeschlossen, etwa in einer Gasflasche oder einem festen Reifen.



$$pV = nRT \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Wird das Gas erwärmt, steigt der Druck. Im Diagramm verläuft der Weg senkrecht nach oben.

Das Volumen ändert sich nicht, also wird keine Volumenarbeit verrichtet: $W = 0$. Mit dem ersten Hauptsatz folgt:

Isochor

$$W = 0, \qquad Q = \Delta U = \frac{f}{2} nR\,\Delta T$$

Die gesamte zugeführte Wärme erhöht die innere Energie.

Aufgabe 1: Autoreifen

Ein Autoreifen ($V = 25\,\mathrm{L}$) enthält Luft ($f = 5$) bei $p_1 = 3{,}2\,\mathrm{bar}$ (absolut) und $20\,^\circ\mathrm{C}$. Nach einer längeren Fahrt hat die Luft $50\,^\circ\mathrm{C}$. Der Reifen sei starr.

a) Welcher Druck herrscht jetzt im Reifen?

b) Wie viel Wärme wurde der Luft zugeführt?

→ Lösung auf Seite 20

Wärmekapazität

Wie viel Energie braucht man, um einen Körper um ein Kelvin zu erwärmen? Diese Größe heißt **Wärmekapazität** C:

$$Q = C\,\Delta T, \qquad C \text{ in } \mathrm{J/K}.$$

Bezieht man sie auf ein Mol Gas und auf konstantes Volumen, erhält man die **molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen** C_V. Aus $Q = \frac{f}{2} nR\,\Delta T = nC_V\,\Delta T$ folgt

$$\boxed{C_V = \frac{f}{2} R} \qquad \text{Luft: } C_V = \tfrac{5}{2} R \approx 20{,}8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}.$$

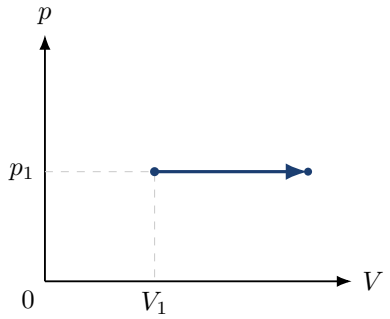
Aus der Schule kennst du vielleicht die spezifische Wärmekapazität von Wasser, $c = 4{,}19\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}$. Sie ist auf ein Kilogramm bezogen. Den Zusammenhang liefert die molare Masse: $c = C/M$. Für Luft ergibt sich $c_V \approx 0{,}72\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}$.

Ein Vergleich: Ein Reifen wie in Aufgabe 1 enthält etwa 95 g Luft. Um diese Luft bei konstantem Volumen zu erwärmen, braucht man genauso viel Wärme wie für nur etwa 16 g Wasser.

Warum betont man „bei konstantem Volumen“? Weil man bei konstantem Druck mehr Wärme braucht. Das zeigt der nächste Prozess.

4.4. Isobarer Prozess: konstanter Druck

Isobar heißt „bei gleichem Druck“. Beispiele sind ein Zylinder mit einem frei beweglichen Kolben, auf dem ein festes Gewicht liegt, oder ein Ballon, der mit der Atmosphäre im Druckgleichgewicht ist.



$$p\,V = nR\,T \quad \Longrightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Wird das Gas erwärmt, dehnt es sich aus. Im Diagramm verläuft der Weg waagerecht nach rechts.

Jetzt verrichtet das Gas Arbeit, denn es schiebt den Kolben weg. Mit dem Gasgesetz lässt sich diese Arbeit durch ΔT ausdrücken:

$$W = -p\,\Delta V = -nR\,\Delta T, \qquad \Delta U = \frac{f}{2}\,nR\,\Delta T.$$

Der erste Hauptsatz liefert die zugeführte Wärme:

$$Q = \Delta U - W = \frac{f}{2}\,nR\,\Delta T + nR\,\Delta T = \Big(\frac{f}{2} + 1\Big)nR\,\Delta T.$$

Isobar

$$W = -p\,\Delta V, \qquad Q = nC_p\,\Delta T \quad \text{mit} \quad C_p = C_V + R = \frac{f+2}{2}R$$

Bei konstantem Druck braucht man pro Kelvin mehr Wärme als bei konstantem Volumen. Ein Teil der Wärme erhöht die innere Energie, der Rest wird als Arbeit an die Umgebung abgegeben, weil das Gas sie beiseiteschieben muss.

Aufgabe 2: Luftballon in der Sonne

Ein schwarzer Luftballon ($V_1 = 10\,\mathrm{L}$, $20\,^\circ\mathrm{C}$) liegt in der Sonne und erwärmt sich auf $50\,^\circ\mathrm{C}$. Die Spannung der Gummihülle sei vernachlässigbar, der Druck im Ballon also immer gleich dem Außendruck $p_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$. Luft: $f = 5$.

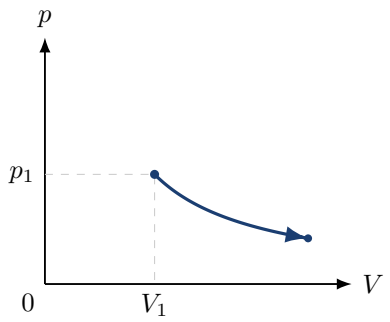
a) Welches Volumen hat der Ballon am Ende?

b) Wie viel Wärme hat die Luft im Ballon aufgenommen?

→ Lösung auf Seite 20

4.5. Isothermer Prozess: konstante Temperatur

Isotherm heißt „bei gleicher Temperatur“. Das Gas steht in gutem Wärmekontakt mit einer großen Umgebung, deren Temperatur sich nicht ändert, und der Prozess läuft langsam ab. So kann ständig Wärme ausgetauscht werden, und die Temperatur bleibt gleich.



$$pV = nRT \quad \Longrightarrow \quad p_1V_1 = p_2V_2$$

Der Druck ist umgekehrt proportional zum Volumen. Im Diagramm ist der Weg ein Stück einer Hyperbel $p \propto 1/V$.

Die innere Energie eines idealen Gases hängt nur von der Temperatur ab. Bleibt T konstant, gilt $\Delta U = 0$, und der erste Hauptsatz liefert $Q = -W$. Die Arbeit ist die Fläche unter der Hyperbel:

Isotherm

$$\Delta U = 0, \qquad W = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1}, \qquad Q = -W$$

Hier steht der natürliche Logarithmus ln. Bei einer isothermen Expansion ist $V_2 > V_1$, also $W < 0$ und $Q > 0$: Das Gas nimmt Wärme aus der Umgebung auf und gibt sie vollständig als Arbeit wieder ab. Beachte: Auch bei konstanter Temperatur fließt Wärme. Das Gas ist dabei immer ein winziges bisschen kälter als die Umgebung, gerade genug, damit Wärme hineinfließt.

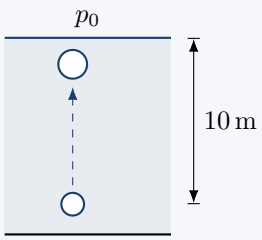
Für Interessierte: Arbeit beim isothermen Prozess

Mit $p = nRT/V$ und konstantem T ergibt das Integral

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT\,(\ln V_2 - \ln V_1) = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Aufgabe 3: Luftblase im See

Eine Luftblase mit dem Volumen V_1 steigt in einem See aus 10 m Tiefe zur Oberfläche auf. Das Wasser hat überall eine Temperatur von 4 °C.
Info: Der Druck in der Wassertiefe h ist $p(h) = p_0 + \rho g h$ mit $p_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ und $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.



a) Welches Volumen hat die Blase kurz vor der Oberfläche?

b) Fließt beim Aufsteigen Wärme in die Blase hinein oder heraus?

→ Lösung auf Seite 21

Aufgabe 4: Isobar oder isotherm?

Dieselbe Menge eines idealen Gases expandiert vom gleichen Anfangszustand auf das doppelte Volumen. Gibt das Gas bei isobarer oder bei isothermer Expansion mehr Arbeit an die Umgebung ab?

A) Mehr bei isobarer Expansion.

B) Mehr bei isothermer Expansion.

C) In beiden Fällen gleich viel.

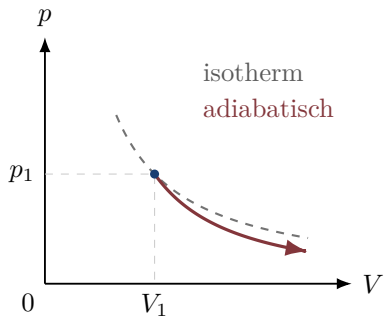
D) Mit den Angaben nicht entscheidbar.

Quelle: PhysikOlympiade, 2. Runde 2025, MC-Aufgabe 43, Formulierung leicht angepasst.

→ Lösung auf Seite 21

4.6. Adiabatischer Prozess: kein Wärmeaustausch

Adiabatisch heißt, dass keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird: $Q = 0$. Das ist der Fall, wenn das Gas gut isoliert ist oder wenn der Vorgang so schnell abläuft, dass keine Zeit für Wärmeaustausch bleibt. Ein Beispiel ist der schnelle Kolbenstoß einer Luftpumpe.



Mit $Q = 0$ liefert der erste Hauptsatz

$$\boxed{\Delta U = W}$$

Kompression: $W > 0$, die Temperatur steigt.
Expansion: $W < 0$, die Temperatur sinkt.

Das ist genau der Effekt aus dem ersten Beispiel. Auch im Alltag sieht man ihn: Eine Spraydose wird beim Sprühen kalt, und aufsteigende Luft kühlt ab, bis sich Wolken bilden.

Im p-V-Diagramm verläuft die Adiabate steiler als die Isotherme durch denselben Punkt. Bei einer adiabatischen Expansion sinkt der Druck aus zwei Gründen: weil das Volumen wächst, wie bei der Isotherme, und zusätzlich, weil die Temperatur fällt.

Die Poisson-Gleichungen

Für eine reversible adiabatische Zustandsänderung eines idealen Gases gelten die **Poisson-Gleichungen**. Sie enthalten den **Adiabatenexponenten** κ, das Verhältnis der beiden Wärmekapazitäten:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f} \qquad \text{einatomig: } \kappa = \tfrac{5}{3}, \qquad \text{Luft: } \kappa = \tfrac{7}{5} = 1{,}4.$$

Poisson-Gleichungen (adiabatisch, reversibel)

$$pV^\kappa = \text{const.} \qquad TV^{\kappa-1} = \text{const.} \qquad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}$$

Die drei Formen folgen mit $pV = nRT$ auseinander. Wähle die Form, in der die gegebenen und gesuchten Größen vorkommen.

Für Interessierte: Herleitung der Poisson-Gleichungen

Bei einer kleinen Volumenänderung $\mathrm{d}V$ gilt $\mathrm{d}U = -p\,\mathrm{d}V$, also

$$\frac{f}{2}\,nR\,\mathrm{d}T = -\frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V \quad \Longrightarrow \quad \frac{f}{2}\,\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Integration ergibt $\frac{f}{2}\ln T = -\ln V + \text{const}$, also $T^{f/2}V = \text{const}$ oder $TV^{2/f} = \text{const}$. Wegen $\kappa - 1 = 2/f$ ist das $TV^{\kappa-1} = \text{const}$. Ersetzt man T durch $pV/(nR)$, erhält man $pV^\kappa = \text{const}$.

Achtung: Die Poisson-Gleichungen gelten nur für reversible Prozesse. Strömt ein Gas frei in ein Vakuum (freie Expansion), ist zwar auch $Q = 0$, aber es wird keine Arbeit verrichtet. Beim idealen Gas bleibt die Temperatur dann gleich.

Aufgabe 5: Fahrradpumpe

Beim Aufpumpen eines Fahrradreifens wird die Luft im Pumpenzylinder ($p_1 = 1{,}0\,\text{bar}$, $20\,^\circ\text{C}$) schnell auf $p_2 = 3{,}5\,\text{bar}$ (absolut) komprimiert, bevor das Ventil zum Schlauch öffnet. Luft: $\kappa = 1{,}4$.

Welche Temperatur hätte die Luft im Pumpenzylinder am Ende, wenn dabei keine Wärme ausgetauscht würde?

→ Lösung auf Seite 21

4.7. Die vier Prozesse im Überblick

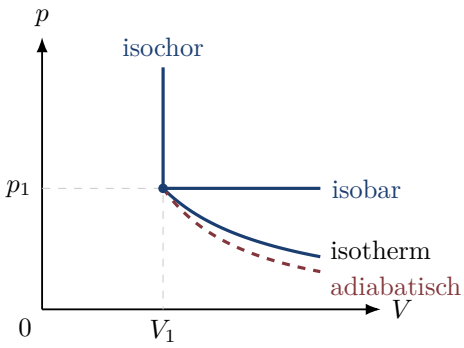


Abbildung 8: Die vier Standardprozesse, ausgehend vom selben Zustand.

Prozess	**konstant**	**Gasgesetz**	W	Q	ΔU
isochor	V	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$	0	$\frac{f}{2} nR\Delta T$	$\frac{f}{2} nR\Delta T$
isobar	p	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$	$-p\Delta V$	$\frac{f+2}{2} nR\Delta T$	$\frac{f}{2} nR\Delta T$
isotherm	T	$p_1V_1 = p_2V_2$	$-nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$	$-W$	0
adiabatisch	–	$pV^\kappa = \text{const.}$	ΔU	0	$\frac{f}{2} nR\Delta T$

4.8. Thermodynamik = Shut up and calculate!

Die Prozessnamen klingen kompliziert, aber man braucht nicht viele Formeln:

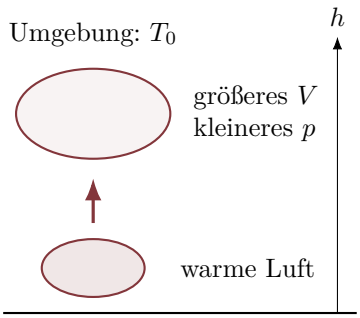
$$pV = nRT, \qquad \Delta U = Q + W, \qquad U = \frac{f}{2} nRT, \qquad pV^\kappa = \text{const.}$$

Dazu kommt die Prozessbedingung: Was bleibt konstant? Dann heißt es einsetzen und konsequent umstellen. Ein bewährtes Vorgehen für Aufgaben:

1. System festlegen: Welche Gasmenge betrachte ich? Bleibt sie konstant?
2. Prozess erkennen: Was ist konstant? Den Prozess im p-V-Diagramm skizzieren.
3. Anfangs- und Endzustand mit dem Gasgesetz verbinden. Temperaturen in Kelvin!
4. Energie mit Vorzeichen bilanzieren: $\Delta U = Q + W$.
5. Ergebnis prüfen: Einheiten, Größenordnung, Grenzfälle.

5. Aufgabe zum Weiterdenken: Aufsteigende Luftmassen

Diese Aufgabe verbindet die Dichte eines Gases mit der adiabatischen Zustandsänderung. Sie ist etwas anspruchsvoller als die bisherigen Kurzaufgaben.



An einem sonnigen Tag erwärmt sich die Luft über dem Boden stärker als die Umgebung. Ein solches warmes **Luftpaket** ist weniger dicht als die umgebende Luft und steigt auf. Beim Aufsteigen nimmt der Außendruck ab. Das Paket dehnt sich aus und kühlt dabei ab. Irgendwann ist es nicht mehr wärmer als seine Umgebung.

Für den Druck der Umgebung verwenden wir das Modell einer **isothermen Atmosphäre** mit überall gleicher Temperatur T_0:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT_0}\right) = p_0\, e^{-h/H}, \qquad H = \frac{RT_0}{Mg}.$$

Die Länge H heißt *Skalenhöhe*. Auf je eine Skalenhöhe nach oben sinkt der Druck um den Faktor e. Diese Formel ist ein sinnvoller Eintrag auf dem eigenen Formelzettel.

Aufgabe 6: Wie hoch steigt die Luft?

Trockene Luft erwärmt sich am Boden auf T_1 und steigt auf. Die Umgebung hat überall dieselbe Temperatur T_0. Bei welcher Höhe ist das Luftpaket nicht mehr leichter als seine Umgebung?

$p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ $\quad M = 29{,}0\,\mathrm{g/mol}$ $\quad \kappa = 1{,}4$ $\quad g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$
$T_0 = 10\,^\circ\mathrm{C}$ $\quad T_1 = 25\,^\circ\mathrm{C}$ $\quad R = 8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}$

Nimm an, dass das Paket beim Aufsteigen keine Wärme und keine Masse mit der Umgebung austauscht und stets denselben Druck wie die Umgebung hat.

Tipp: Wann ist ein Luftpaket bei gleichem Druck leichter als seine Umgebung?

Quelle: PhysikOlympiade, 3. Runde 2011, Aufgabe 84a. Modellfrage leicht präzisiert.

→ Lösung auf Seite 22

6. Lösungen der Aufgaben

Hier stehen die ausführlichen Lösungen. Lies sie erst, nachdem du die Aufgabe selbst versucht hast.

Lösung zu Aufgabe 1: Autoreifen

a) Das Volumen ist konstant, also gilt $p_2/p_1 = T_2/T_1$ mit Temperaturen in Kelvin:

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 3{,}2\,\text{bar} \cdot \frac{323{,}15\,\text{K}}{293{,}15\,\text{K}} \approx 3{,}53\,\text{bar}.$$

Der Druck steigt um etwa 0,3 bar. Das passt zur Faustregel von etwa 0,1 bar pro 10 K. Deshalb soll man den Reifendruck im kalten Zustand messen.

b) Für den isochoren Prozess gilt $Q = \frac{f}{2} nR\,\Delta T$. Die Stoffmenge kennen wir nicht, aber das Produkt nR folgt aus dem Anfangszustand: $nR = p_1 V/T_1$. Damit ist

$$Q = \frac{5}{2} p_1 V \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{5}{2} \cdot 3{,}2 \cdot 10^5\,\text{Pa} \cdot 0{,}025\,\text{m}^3 \cdot \frac{30\,\text{K}}{293{,}15\,\text{K}} \approx 2{,}0\,\text{kJ}.$$

Kürzer: Bei festem Volumen gilt $nR\,\Delta T = \Delta(pV) = V\,\Delta p$. Damit wird

$$Q = \frac{f}{2} V\,\Delta p = \frac{5}{2} \cdot 0{,}025\,\text{m}^3 \cdot 0{,}33 \cdot 10^5\,\text{Pa} \approx 2{,}0\,\text{kJ}.$$

Die Stoffmenge braucht man gar nicht. Die Angabe „absolut“ ist wichtig: Ein Reifenmanometer zeigt den Überdruck gegenüber der Außenluft an, hier also 2,2 bar.

Lösung zu Aufgabe 2: Luftballon in der Sonne

a) Der Druck ist konstant, also gilt $V_2/V_1 = T_2/T_1$:

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 10\,\text{L} \cdot \frac{323{,}15\,\text{K}}{293{,}15\,\text{K}} \approx 11{,}0\,\text{L}.$$

b) Für den isobaren Prozess gilt $Q = \frac{7}{2} nR\,\Delta T$. Bei konstantem Druck ist $nR\,\Delta T = p_0\,\Delta V$, mit $\Delta V \approx 1{,}02\,\text{L}$:

$$Q = \frac{7}{2} p_0\,\Delta V = \frac{7}{2} \cdot 10^5\,\text{Pa} \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 \approx 360\,\text{J}.$$

Davon gehen $|W| = p_0\,\Delta V \approx 100\,\text{J}$ als Arbeit an die Atmosphäre und $\Delta U = \frac{5}{2} p_0\,\Delta V \approx 260\,\text{J}$ in die innere Energie.

Vergleich mit dem Reifen: Isochor gilt $Q = \frac{f}{2} V\,\Delta p$, isobar gilt $Q = \frac{f+2}{2} p\,\Delta V$. Die zusätzliche 1 im Zähler ist genau die Arbeit an der Umgebung.

Lösung zu Aufgabe 3: Luftblase im See

a) Die Blase ist klein, steigt langsam auf und steht in gutem Wärmekontakt mit dem Wasser. Ihre Temperatur bleibt deshalb gleich der Wassertemperatur: Der Prozess ist isotherm. In 10 m Tiefe herrscht

$$p_1 = p_0 + \rho g h = 1{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} + 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 10\,\mathrm{m} \approx 1{,}98\,\mathrm{bar}.$$

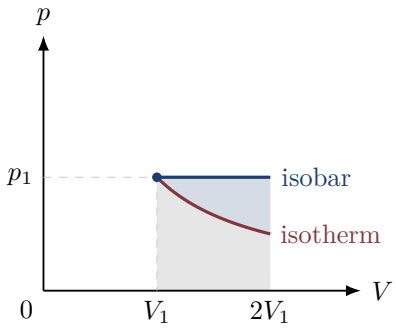
Mit $p_1 V_1 = p_0 V_2$ folgt

$$V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_0} \approx 1{,}98\,V_1 \approx 2\,V_1.$$

Das Volumen verdoppelt sich fast. Die Wassertemperatur von 4 °C braucht man gar nicht, denn sie ist ja konstant und kürzt sich heraus. Nicht jede Angabe in einer Aufgabe wird gebraucht.

b) Die Blase dehnt sich aus, also ist $W < 0$. Wegen $T = \text{const}$ ist $\Delta U = 0$, also $Q = -W > 0$. **Das Wasser liefert Wärme an die Blase.** Ohne diese Wärme würde sich die Luft bei der Expansion abkühlen.

Lösung zu Aufgabe 4: Isobar oder isotherm?



Antwort A. Die abgegebene Arbeit ist die Fläche unter dem Weg. Beim isobaren Weg bleibt der Druck hoch, beim isothermen fällt er. Unter der waagerechten Linie liegt also zusätzlich die blaue Fläche.

Rechnerisch: Isobar ist $|W| = p_1 \cdot (2V_1 - V_1) = p_1 V_1$. Isotherm ist $|W| = nRT \ln 2 = p_1 V_1 \ln 2 \approx 0{,}69\, p_1 V_1$. Wegen $\ln 2 < 1$ ist die isobare Arbeit größer.

Beide Prozesse enden beim selben Volumen, aber in verschiedenen Zuständen: Isobar endet das Gas bei p_1 und $2T_1$, isotherm bei $p_1/2$ und T_1. Das Flächenargument allein genügt für die Antwort.

Lösung zu Aufgabe 5: Fahrradpumpe

Betrachtet wird die feste Luftmenge im Pumpenzylinder. Die Luft im Schlauch ist kein abgeschlossenes System, weil bei jedem Pumpstoß Luft hinzukommt. Ohne Wärmeaustausch ist der Prozess adiabatisch.

Gegeben sind Drücke und eine Temperatur, gesucht ist eine Temperatur. Also passt die dritte Poisson-Form. Mit $(\kappa - 1)/\kappa = 0{,}4/1{,}4 = 2/7$:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} = 293{,}15\,\mathrm{K} \cdot 3{,}5^{2/7} \approx 419\,\mathrm{K} \approx 146\,^\circ\mathrm{C}.$$

Warum verbrennt man sich trotzdem nicht? Der Vorgang ist nicht vollständig adiabatisch: Die Zylinderwand nimmt Wärme auf und hat eine viel größere Wärmekapazität als die wenigen Gramm Luft. Das untere Ende der Pumpe wird nach mehreren Stößen aber spürbar warm.

Lösung zu Aufgabe 6: Wie hoch steigt die Luft?

Schritt 1: Leichter heißt wärmer. Auf das Paket wirken der Auftrieb $F_\mathrm{A} = \rho_\mathrm{U} V g$ und die Gewichtskraft $F_\mathrm{G} = \rho_\mathrm{L} V g$. Es steigt, solange $\rho_\mathrm{L} < \rho_\mathrm{U}$ ist. Aus $pV = nRT = \frac{m}{M}RT$ folgt $\rho = \dfrac{pM}{RT}$. Paket und Umgebung haben denselben Druck und dieselbe molare Masse, also gilt

$$\rho_\mathrm{L} < \rho_\mathrm{U} \quad \Longleftrightarrow \quad T_\mathrm{L} > T_0.$$

Das Paket steigt, solange es wärmer ist als seine Umgebung.

Schritt 2: Temperatur des Pakets. Das Paket dehnt sich adiabatisch aus. Gegeben sind Drücke, gesucht ist eine Temperatur, also passt wie bei der Fahrradpumpe die Poisson-Gleichung

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}.$$

Am Boden hat das Paket T_1 und p_0, in der Höhe h den Druck $p(h) = p_0 e^{-h/H}$:

$$T_\mathrm{L}(h) = T_1 \left(\frac{p(h)}{p_0}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} = T_1 \exp\Big(-\frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{h}{H}\Big).$$

Schritt 3: Höhe bestimmen. Gleichsetzen mit T_0 und Logarithmieren:

$$T_1 \exp\Big(-\frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{h}{H}\Big) = T_0 \quad \Longrightarrow \quad \ln\frac{T_1}{T_0} = \frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{h}{H} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{h = \frac{RT_0}{Mg}\,\frac{\kappa}{\kappa-1}\,\ln\frac{T_1}{T_0}}$$

Schritt 4: Zahlen. Mit $T_0 = 283{,}15\,\mathrm{K}$ und $T_1 = 298{,}15\,\mathrm{K}$:

$$H = \frac{8{,}314 \cdot 283{,}15}{0{,}0290 \cdot 9{,}81}\,\mathrm{m} \approx 8275\,\mathrm{m}, \qquad h = 8275\,\mathrm{m} \cdot \frac{1{,}4}{0{,}4} \cdot \ln\frac{298{,}15}{283{,}15} \approx 1{,}5\,\mathrm{km}.$$

Plausibilität:

- Grenzfall $T_1 = T_0$: Dann ist $\ln 1 = 0$, also $h = 0$. Ein Paket, das nicht wärmer ist als die Umgebung, steigt nicht auf.
- Einheiten: $RT_0/(Mg)$ hat die Einheit $\frac{\mathrm{J/mol}}{\mathrm{kg/mol \cdot m/s^2}} = \mathrm{m}$.
- Im Logarithmus müssen absolute Temperaturen stehen.

Das Ergebnis ist die Höhe, in der sich Auftrieb und Gewicht gerade ausgleichen. Dass das Paket wegen seines Schwungs etwas darüber hinausschießen kann, ist nicht berücksichtigt. Die reale Atmosphäre ist auch nicht isotherm: Ihre Temperatur nimmt mit der Höhe ab.

Literatur

- P. A. Tipler, G. Mosca: *Physik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik*. Springer Spektrum, 8. Auflage 2019. DOI: 10.1007/978-3-662-58281-7
  - Kap. 14.1–14.3: Gasgesetz, Druck und kinetische Gastheorie
  - Kap. 15.4–15.9: Erster Hauptsatz, p-V-Diagramme, Wärmekapazitäten und adiabatische Prozesse
- Aufgaben aus dem Auswahlwettbewerb zur Internationalen PhysikOlympiade: 2. Runde 2025 (MC-Aufgabe 43) und 3. Runde 2011 (Aufgabe 84).

A. Formelsammlung

Gas, Teilchen und Energie

Ideales Gasgesetz	$pV = Nk_\mathrm{B}T = nRT$
Teilchenzahl, Stoffmenge	$N = nN_\mathrm{A}, \quad n = m/M, \quad R = N_\mathrm{A}k_\mathrm{B}$
Dichte	$\rho = pM/(RT)$
Erster Hauptsatz	$\Delta U = Q + W \quad (Q, W > 0$: dem Gas zugeführt$)$
Innere Energie	$U = \frac{f}{2}nRT \quad (f = 3$ einatomig, $f = 5$ Luft$)$
Teilchengeschwindigkeit	$v_\mathrm{rms} = \sqrt{3RT/M}$
Molare Wärmekapazitäten	$C_V = \frac{f}{2}R, \quad C_p = C_V + R, \quad \kappa = C_p/C_V = (f+2)/f$
Volumenarbeit	$W = -\int p\,\mathrm{d}V$

Standardprozesse, feste Gasmenge

isochor (V konst.)	$W = 0, \quad Q = nC_V\Delta T$
isobar (p konst.)	$W = -p\Delta V, \quad Q = nC_p\Delta T$
isotherm (T konst.)	$W = -nRT\ln(V_2/V_1), \quad Q = -W$
adiabatisch ($Q = 0$)	$pV^\kappa = \text{const.}, \quad TV^{\kappa-1} = \text{const.}$
	$T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{(\kappa-1)/\kappa}$

Druck in Flüssigkeit und Atmosphäre

Wasser, Tiefe h	$p = p_0 + \rho g h$
isotherme Atmosphäre, Höhe h	$p = p_0\, e^{-Mgh/(RT_0)}$

Konstanten

Boltzmann-Konstante	$k_\mathrm{B} = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Avogadro-Konstante	$N_\mathrm{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Gaskonstante	$R = 8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}$
Umrechnung	$T\,[\mathrm{K}] = \vartheta\,[^\circ\mathrm{C}] + 273{,}15, \quad 1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$